数学・物理通信

5巻10号　　2015年12月

編集　新関章三・矢野　忠

2015 年 12 月 8 日

目次(Contents)

三すくみ方程式 (2)

世戸 憲治 *

Equation of Three-Way Deadlock(2)

Kenji Seto*

1 はじめに

前回の「三すくみ方程式」(数学・物理通信 5 巻 9 号) では，X, Y, Z について対称性のない方法で解いたために，X, Y と Z が，まったく，異なる形の解になってしまった．これを中西襄先生にお見せしたところ，X, Y, Z の対称性を保ちながら解く方法を考えていただいた．今回は，この方法にしたがって解くことを試みる．解くべき方程式は，時間 t の関数 $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ に関する連立非線形微分方程式

$$\frac{dX}{dt} = XY - ZX, \qquad \frac{dY}{dt} = YZ - XY, \qquad \frac{dZ}{dt} = ZX - YZ \tag{1.1}$$

である．

2 方程式の解法

初めに，(1.1) 式，それぞれの辺々を加えると，

$$\frac{d}{dt}(X + Y + Z) = 0 \tag{2.1}$$

となるので，これはただちに積分され，積分定数を $3C$ として，

$$X + Y + Z = 3C \tag{2.2}$$

となる．C は X, Y, Z の算術平均である．また，(1.1) のそれぞれを，X, Y, Z で割ってから辺々を加えると，

$$\frac{1}{X}\frac{dX}{dt} + \frac{1}{Y}\frac{dY}{dt} + \frac{1}{Z}\frac{dZ}{dt} = 0 \tag{2.3}$$

となり，これもただちに積分され，積分定数を D^3 として，

$$XYZ = D^3 \tag{2.4}$$

となる．D は X, Y, Z の幾何平均である．ここで，[算術平均] は [幾何平均] より等しいか大きいことより，

$$C \geq D \tag{2.5}$$

となることに注意する．

*北海学園大学名誉教授　　E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

前回は，この (2.2) (2.4) 式より X, Y を消去し，Z のみの方程式としてから Z を時間の関数として求めたために，X, Y, Z に関する対称性が見えてこない式になってしまった．今回は，中西襄先生が考えられた方法，すなわち，X, Y, Z の対称性を保ちながら解く方法を考察していく．そのために，つぎの量

$$XY + YZ + ZX = f \tag{2.6}$$

を導入する．もちろん，この f は定数ではなく，時間 t の関数 $f(t)$ である．この $f(t)$ が求められれば，X, Y, Z は，p の 3 次方程式

$$p^3 - 3Cp^2 + fp - D^3 = 0 \tag{2.7}$$

の根として求められる．この方程式を解くことは，ここでは保留にし，実際に解くのは f が時間の関数として求まった後にする．

この f を時間の関数として求める前に，f の動き得る範囲を求めておく．[2 乗平均] $\geq$ [算術平均] より，$3C^2 \geq f$ が示される．この不等式は直接証明することも簡単である．また，[幾何平均] $\geq$ [調和平均] より，$f \geq 3D^2$ が導かれるので，f の動き得る範囲は，

$$3C^2 \geq f \geq 3D^2 \tag{2.8}$$

に限定される．ここで，等式が成立するのは，$X = Y = Z = C$ の場合のみである．

以下，f を時間の関数として求める過程を述べていく．まず，f の時間微分は，(2.6) 式より，

$$\frac{df}{dt} = (Y+Z)\frac{dX}{dt} + (Z+X)\frac{dY}{dt} + (X+Y)\frac{dZ}{dt} \tag{2.9}$$

となるが，これに (1.1) 式を適用すると，

$$\frac{df}{dt} = (X-Y)(Y-Z)(Z-X) \tag{2.10}$$

となる．この式自体は X, Y, Z の任意の 2 個の入れ替えに対し対称ではないが，この式の両辺を 2 乗して，

$$\left(\frac{df}{dt}\right)^2 = \varPhi, \qquad \varPhi = \big[(X-Y)(Y-Z)(Z-X)\big]^2 \tag{2.11}$$

としたときは，この $\varPhi$ が X, Y, Z について対称となる．したがて，この $\varPhi$ はこれまでの対称式 (2.2) (2.4) (2.6) 式を用いて書けるはずである．結果は，

$$\varPhi = -4f^3 + 9C^2f^2 + 54CD^3f - 27(4C^3 + D^3)D^3 \tag{2.12}$$

となる．実は，この (2.12) 式を (2.11) の $\varPhi$ の定義から導くのはそう簡単なものではないので，その過程の要点を「付録 1」で述べることにする．

以上から，df/dt を対称式で表すと，

$$\frac{df}{dt} = \sqrt{\varPhi} \tag{2.13}$$

あるいは，積分形にして，

$$t = \int \frac{df}{\sqrt{\varPhi}} \tag{2.14}$$

となる．これ以降は，この積分を楕円積分の標準形にもっていくことを考える．この $\varPhi$ は f の 3 次式なので，変数を f から ξ へ

$$f = \frac{1}{\xi} \tag{2.15}$$

と変換すると，(2.14) 式は，

$$t = -\int \frac{d\xi}{\sqrt{-A\xi F(\xi)}} \tag{2.16}$$

となる．ここに，ξ の 3 次式 $F(\xi)$，および，定数 A を

$$F(\xi) = \xi^3 - \frac{54CD^3}{A}\xi^2 - \frac{9C^2}{A}\xi + \frac{4}{A}, \qquad A = 27(4C^3 + D^3)D^3 \tag{2.17}$$

と定義する．さらに，この式を因数分解するために，$F(\xi) = 0$ とおいたときの根を Cardano の解法にしたがって解いていく．初めに，変数を ξ から ζ に

$$\xi = \zeta + \frac{18CD^3}{A} \tag{2.18}$$

で変換すると，

$$F = \zeta^3 - \frac{C^2(4C^3 + 5D^3)}{3(4C^3 + D^3)^2 D^3}\zeta + \frac{40C^6 + 10C^3D^3 + 4D^6}{27(4C^3 + D^3)^3 D^3} \tag{2.19}$$

と ζ の 2 次の項が消えた形となる．ここでさらに，

$$\zeta = u + v \tag{2.20}$$

とおくと，方程式 $F = 0$ は

$$u^3 + v^3 + \frac{40C^6 + 10C^3D^3 + 4D^6}{27(4C^3 + D^3)^3 D^3} + (u+v)\Big(3uv - \frac{C^2(4C^3 + 5D^3)}{3(4C^3 + D^3)^2 D^3}\Big) = 0 \tag{2.21}$$

となるが，この式を 2 本の式に分離して，

$$u^3 + v^3 = -\frac{40C^6 + 10C^3D^3 + 4D^6}{27(4C^3 + D^3)^3 D^3}, \qquad uv = \frac{C^2(4C^3 + 5D^3)}{9(4C^3 + D^3)^2 D^3} \tag{2.22}$$

となる．この第 2 式を 3 乗して連立方程式を解くと，u^3，v^3 は，

$$u^3,\ \text{or}\ \ v^3 = \frac{-1}{27(4C^3 + D^3)^3 D^3}\Big[(20C^6{+}5C^3D^3{+}2D^6) \pm 2i(4C^3{+}D^3)\sqrt{\frac{(C-D)^3(C^2+CD+D^2)^3}{D^3}}\Big] \tag{2.23}$$

と求められる．ここで，大括弧中の 2 項目で，プラス符号をとったときは u^3, また，マイナス符号をとったときは v^3 とする．以下，数式簡素化のため，これと同じ書き方をする．また，(2.5) 式で注意したように，$C \geq D$ なので，この平方根の中は非負であり，この 2 項目は虚数となる．つぎに，これら u^3, v^3 の 3 乗根をとるために，この式を極表示すると，

$$u^3,\ \ \text{or}\ \ v^3 = -r^3 e^{\pm 3\alpha i} \tag{2.24}$$

となる．ただし，ここで，r^3 は，

$$r^3 = \frac{1}{27(4C^3 + D^3)^3 D^3}\sqrt{\frac{C^6(4C^3 + 5D^3)^3}{D^3}}, \quad \text{ゆえに} \quad r = \frac{1}{3(4C^3 + D^3)D}\sqrt{\frac{C^2(4C^3 + 5D^3)}{D}} \tag{2.25}$$

また，3α は，

$$3\alpha = \arctan\Big[\frac{2(4C^3 + D^3)}{20C^6 + 5C^3D^3 + 2D^6}\sqrt{\frac{(C-D)^3(C^2+CD+D^2)^3}{D^3}}\Big] \tag{2.26}$$

と定義する．$X = Y = Z$ で $C = D$ となるときは，$u^3 = v^3$ となって重根になるので，ここでの積分は楕円積分にならない．ここでは，この $C = D$ の場合を例外として扱わないことにする．したがって，α の範囲は，$0 < \alpha < \pi/6$ となる．

(2.24) 式の 3 乗根をとるとき，1 の 3 乗根である $e^{\pm\phi i}$，$(\phi = 2\pi/3)$ が付く場合があることと，積 uv は (2.22) の第 2 式を満たさなければならないので，u，v の組み合わせは，

$$\Big(u = -re^{\alpha i},\ \ v = -re^{-\alpha i}\Big),\quad \Big(u = -re^{(\alpha-\phi)i},\ \ v = -re^{-(\alpha-\phi)i}\Big),\quad \Big(u = -re^{(\alpha+\phi)i},\ \ v = -re^{-(\alpha+\phi)i}\Big) \tag{2.27}$$

の 3 通りとなる．これらの結果を (2.20) 式を通して，(2.18) 式に代入すると $F(\xi) = 0$ としたときの 3 根は，

$$\xi_1 = B - 2r\cos(\alpha),\quad \xi_2 = B - 2r\cos(\alpha-\phi),\quad \xi_3 = B - 2r\cos(\alpha+\phi) \tag{2.28}$$

となる．ただし，数式簡素化のため，

$$B = \frac{18CD^3}{A} = \frac{2C}{3(4C^3 + D^3)} < \sqrt{3}r \tag{2.29}$$

と定義する．この定義で，これら根の大小関係は，$\xi_1 < 0 < \xi_2 < \xi_3$ となる．これで (2.17) 式の $F(\xi)$ が因数分解されるので，(2.16) 式の被積分関数にある平方根の中身は，

$$-A\xi F(\xi) = -A\xi\big[\xi - \big(B - 2r\cos(\alpha)\big)\big]\big[\xi - \big(B - 2r\cos(\alpha-\phi)\big)\big]\big[\xi - \big(B - 2r\cos(\alpha+\phi)\big)\big] \tag{2.30}$$

あるいは，$\phi = 2\pi/3$ を用い，これを (2 次式) $\times$ (2 次式) の形にして，

$$= A\big[-\xi^2 + \big(B - 2r\cos(\alpha)\big)\xi\big]\big[\xi^2 - 2\big(B + r\cos(\alpha)\big)\xi + R^2\big] \tag{2.31}$$

となる．ここで，数式簡素化のため，R を

$$R = \sqrt{\big(B + r\cos(\alpha)\big)^2 - 3r^2\sin^2(\alpha)} \tag{2.32}$$

とおいた．これで，(2.16) 式の積分は，

$$t = -\int \frac{d\xi}{\sqrt{A\big[-\xi^2 + \big(B - 2r\cos(\alpha)\big)\xi\big]\big[\xi^2 - 2\big(B + r\cos(\alpha)\big)\xi + R^2\big]}} \tag{2.33}$$

となるが，楕円積分の標準形にするにはさらなる変数変換が必要になり，ξ から η への 1 次変換

$$\xi = \frac{(P^2 + R^2)\eta - (P^2 - R^2)}{\big(B + 4r\cos(\alpha)\big)(1+\eta)} \tag{2.34}$$

を施す．ここに，P^2 を

$$P^2 = rR\sqrt{3\big(4\cos^2(\alpha) - 1\big)} \tag{2.35}$$

と定義する．この変換で，(2.33) 式の平方根の中の第 1 因子は

$$-\xi^2 + \big(B - 2r\cos(\alpha)\big)\xi = \frac{-P^2(P^2+R^2)^2\eta^2 + P^2(P^2-R^2)^2}{R^2\big(B + 4r\cos(\alpha)\big)^2(1+\eta)^2} \tag{2.36}$$

となり，第 2 因子は，

$$\xi^2 - 2\big(B + r\cos(\alpha)\big)\xi + R^2 = \frac{-2P^2\big(3rB\cos(\alpha) + 3r^2 - P^2\big)\eta^2 + 2P^2\big(3rB\cos(\alpha) + 3r^2 + P^2\big)}{\big(B + 4r\cos(\alpha)\big)^2(1+\eta)^2} \tag{2.37}$$

となる．この (2.34) の変換式は，変換後の分子で η の 1 次の項が消えるようにしたものである．さらに，(2.34) 式の微分は，

$$d\xi = \frac{2P^2 d\eta}{\big[B + 4r\cos(\alpha)\big](1+\eta)^2} \tag{2.38}$$

となるので，これらの結果を (2.33) の積分式に代入するわけだが，その前に，(2.36) (2.37) 式に現れる各因子の符号を調べておく必要がある．これらは，$0 < \alpha < \pi/6$ として，解析的にわかるものもあるが，解析的には求め難いものも存在する．そこで，$0.2 \le D < C \le 10$ の場合に限って，数値的に調べた結果は，

$$P^2 - R^2 > 0, \qquad 3rB\cos(\alpha) + 3r^2 - P^2 > 0 \tag{2.39}$$

となった．これは，C, D の値の限定された範囲内のものではあるが，一般の C, D の値のときも成立するものとして議論を進めることにする．

(2.36) (2.37) (2.38) の各式を積分式 (2.33) に代入するにあたって，さらなる定数の置き換え

$$\mu = \frac{P^2 - R^2}{P^2 + R^2}, \qquad \nu = \sqrt{\frac{3rB\cos(\alpha) + 3r^2 + P^2}{3rB\cos(\alpha) + 3r^2 - P^2}} \tag{2.40}$$

を定義しておく．この定義で，$\mu < 1 < \nu$ となることを注意する．また，積分の全体に付く係数として，

$$T = \frac{\sqrt{2}\big(B + 4r\cos(\alpha)\big)R}{(P^2 + R^2)\sqrt{A\big[3rB\cos(\alpha) + 3r^2 + P^2\big]}} \tag{2.41}$$

を定義すると，積分式 (2.33) は

$$t = -\nu T \int \frac{d\eta}{\sqrt{(\mu^2 - \eta^2)(\nu^2 - \eta^2)}} \tag{2.42}$$

となる．これで，楕円積分の標準形に近づいてきたが，最後にもう 1 つの変換が必要で，η から χ への変換

$$\eta = \mu\chi, \qquad \text{or} \qquad \eta = \frac{\nu}{\chi} \tag{2.43}$$

を施す．この 2 通りのどちらを採用しても全体の符号が変わるだけで，結果は，

$$t = \mp T \int \frac{d\chi}{\sqrt{(1 - \chi^2)(1 - k^2\chi^2)}} \tag{2.44}$$

となる．ここに，マイナス符号とプラス符号は，それぞれ，(2.43) の第 1 式，第 2 式に対応する．また，k は楕円関数の母数で，

$$k = \frac{\mu}{\nu} < 1 \tag{2.45}$$

と定義した．これでようやく楕円積分の標準形に達したわけで，この積分は Jacobi の楕円関数 sn の逆関数となるので，これから，

$$\chi = \mp \operatorname{sn}(t/T) \tag{2.46}$$

となる．ここでは，t の積分定数は敢えて入れないことにする．χ が求められたので，(2.43) (2.34) (2.15) の各式を遡って (2.7) 式に含まれる f は，

$$f = -\frac{\big(B + 4r\cos(\alpha)\big)\big(1 - \mu\operatorname{sn}(t/T)\big)}{(P^2 + R^2)\mu\big(1 + \operatorname{sn}(t/T)\big)}, \quad \text{or} \quad f = \frac{\big(B + 4r\cos(\alpha)\big)\big(\nu + \operatorname{sn}(t/T)\big)}{(P^2 + R^2)\big(\nu - \mu\operatorname{sn}(t/T)\big)} \tag{2.47}$$

と求められる．ここに，この第 1 式，第 2 式は，それぞれ，(2.43) の第 1 式，第 2 式に対応する．この第 1 式の分母は，sn の値が -1 になるときゼロとなるので，発散してしまい解としては不適切なものとなるので，以下ではこの第 2 式の方を解として採用する．

これで，f が時間の関数として求められたので，残る問題は，(2.7) の 3 次方程式を解くことである．これは (2.17) 式を因数分解したときと同じく，Cardano の解法にしたがって解いていく．初めに，(2.7) 式において 2 次の項を消すために，p から q に

$$p = q + C \tag{2.48}$$

と変換すると，

$$q^3 + (f - 3C^2)q + fC - 2C^3 - D^3 = 0 \tag{2.49}$$

となる．ここで，

$$q = u + v \tag{2.50}$$

とおくと

$$u^3 + v^3 + fC - 2C^3 - D^3 + (u + v)(3uv + f - 3C^2) = 0 \tag{2.51}$$

となるが，これを 2 本の式に分離して，

$$u^3 + v^3 = 2C^3 + D^3 - fC, \qquad uv = \frac{1}{3}(3C^2 - f) \tag{2.52}$$

となる．この第 2 式を 3 乗したものと，第 1 式とから u^3, v^3 を求めると，

$$u^3, \quad \text{or} \quad v^3 = \frac{1}{2}\Big(2C^3 + D^3 - Cf \pm i\sqrt{\frac{1}{27}\Phi}\,\Big) \tag{2.53}$$

と複素数で求められる．ここに，Φ は (2.12) 式で定義されたものである．3 乗根をとるためにこれらを極表示し，

$$u^3, \quad \text{or} \quad v^3 = \rho^3 e^{\pm 3\beta i} \tag{2.54}$$

としたとき，ρ^3 は

$$\rho^3 = \sqrt{\frac{(3C^2 - f)^3}{27}}, \quad \text{ゆえに} \quad \rho = \sqrt{\frac{1}{3}(3C^2 - f)} \tag{2.55}$$

と定義する．なお，(2.8) 式で示したようにこの平方根の中身は正である．また，3β は

$$3\beta = \arctan\Big[\frac{\sqrt{\Phi}}{\sqrt{27}\big(2C^3 + D^3 - Cf\big)}\Big] \tag{2.56}$$

と定義する．これを用いて，u^3, v^3 の 3 乗根をとり，その積 uv が (2.52) の第 2 式を満たす組み合わせは，前回同様に，$\phi = 2\pi/3$ を用いて，

$$\Big(u = \rho e^{\beta i}, \;\; v = \rho e^{-\beta i}\Big), \quad \Big(u = \rho e^{(\beta - \phi)i}, \;\; v = \rho e^{-(\beta - \phi)i}\Big), \quad \Big(u = \rho e^{(\beta + \phi)i}, \;\; v = \rho e^{-(\beta + \phi)i}\Big) \tag{2.57}$$

の 3 通りとなる．これで，(2.50) (2.48) 式を通して，方程式 (2.7) が解けたことになり，最初に求めようとしていた X, Y, Z が求められたことになる．しかし，X, Y, Z のうちのどれが，これらの根にどのように対応するかの判断基準は存在しないので，

$$X, \quad Y, \quad Z = C + 2\rho\cos(\beta), \;\; \text{or} \;\; C + 2\rho\cos(\beta - \phi), \;\; \text{or} \;\; C + 2\rho\cos(\beta + \phi) \tag{2.58}$$

という書き方をしておく．この式に含まれる ρ, β は (2.55) (2.56) 式で，また，その中に含まれる f は (2.47) の第 2 式で与えられる．さらに，β に含まれる Φ については，(2.14) 式から (2.44) 式に至るまでの過程で，変数を f から ξ, さらに，η, χ と変換してきたが，その過程をたどると，

$$\Phi = \Big[\frac{2P^2\big(B + 4r\cos(\alpha)\big)}{\nu T(P^2 + R^2)^2(1 - k\chi)^2}\Big]^2(1 - k^2\chi^2)(1 - \chi^2) \tag{2.59}$$

となる．これに，(2.46) 式の $\chi = \mathrm{sn}(t/T)$ を代入して，

$$\Phi = \Big[\frac{2P^2\big(B + 4r\cos(\alpha)\big)}{\nu T(P^2 + R^2)^2\big(1 - k\,\mathrm{sn}(t/T)\big)^2}\Big]^2 \mathrm{cn}^2(t/T)\mathrm{dn}^2(t/T) \tag{2.60}$$

となるので，3β を定義する (2.56) 式は，

$$3\beta = \arctan\Bigl[\frac{2P^2\bigl(B+4r\cos(\alpha)\bigr)\mathrm{cn}(t/T)\mathrm{dn}(t/T)}{\sqrt{27}\,\nu\,T\bigl(2C^3+D^3-Cf\bigr)(P^2+R^2)^2\bigl(1-k\,\mathrm{sn}(t/T)\bigr)^2}\Bigr] \tag{2.61}$$

と書き換えられる．ここで，arctan の取り方について注意が必要である．この式右辺の分母にある $2C^3+D^3-Cf$ という因子は，(2.2) (2.4) (2.6) 式を用いると，

$$2C^3+D^3-Cf = -(C-X)(C-Y)(C-Z) \tag{2.62}$$

となって，この値は正にも負にもなり得る．この式にはもう 1 つ，$\mathrm{cn}(t/T)$ が含まれておりこれも正負の値をとり得る．arctan の主値は $-\pi/2$ から $\pi/2$ までであるが，これら因子の正負の値によってこれを補正する必要がでてくる．すなわち，$2C^3+D^3-Cf<0$ でかつ $\mathrm{cn}(t/T)>0$ の場合は，(2.61) 式の右辺に π を加える．また，$2C^3+D^3-Cf<0$ でかつ $\mathrm{cn}(t/T)<0$ の場合はこの右辺から π を引くということにする． この処置をしておかないと次節でグラフを描いたときにおかしなものになってしまう．

3　グラフ表示

この節では，これまでに得られた結果に基づいて数値的にグラフを描くが，その前に，パラメータを減らすため，変数 X, Y, Z, t に，任意定数 C を用いたスケール変換を施し，

$$X/C \ \rightarrow\ X, \quad Y/C \ \rightarrow\ Y, \quad Z/C \ \rightarrow\ Z, \quad Ct \ \rightarrow\ t \tag{3.1}$$

としたものを，改めて X, Y, Z, t とおく．この変換で方程式 (1.1) は不変である．ここで，C として元の X, Y, Z の [算術平均] を採用すると，新しい変数での [算術平均] は 1 となるので，以後，一般性を失うことなく，これまでの C を 1 とおくことができる．

ここで，(2.58) 式に基づいて数値的にグラフを描くが，X, Y, Z が，3 次方程式 (2.7) のどの根に対応するかは決まらないので，ここでは，仮に，

$$X = C+2\rho\cos(\beta), \qquad Y = C+2\rho\cos(\beta-\phi), \qquad Z = C+2\rho\cos(\beta+\phi) \tag{3.2}$$

とした場合を考察することにする．また，数値計算をするにあたって，積分定数 C を 1 とすることは前に述べたが，D の値を 0.6 とおくことにし，このときのグラフを以下の図 1 に示す．

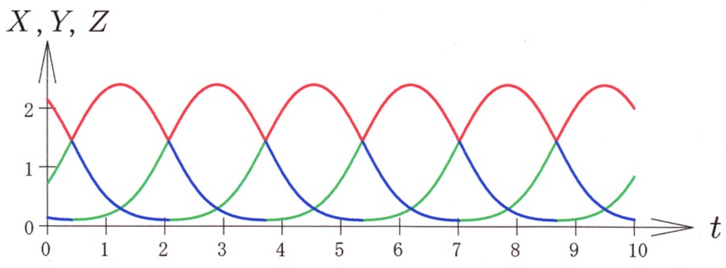

図 1　　$C=1$, $D=0.6$ の場合の解曲線

この図で，赤，緑，青の各曲線は，それぞれ，$X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ に対応する．見て分かるとおり，曲線 $X(t)$ は値の大きい方だけ，曲線 $Y(t)$, $Z(t)$ は値が小さい方だけを占めている．実際はそんなことはなく，これは時間発展の途中で，$X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ が入れ替わって，3 相の滑らかな曲線になっていると見るべきである．

このときの各曲線の振動周期は，どのように決まるのであろうか．この $C=1$, $D=0.6$ という設定で，楕円関数の母数 k, 第 1 種完全楕円積分 K, および，時間のスケールを決める (2.41) 式の T の値は,

$$k=0.059727\cdots, \qquad K=1.572403\cdots, \qquad T=0.262549\cdots \tag{3.3}$$

となる．三すくみの波は，X, Y, Z の波各 1 個分，計 3 個の波が集まって 1 個の大きな波を形成する．したがって，その周期は，楕円関数の周期 $4K$ の 3 倍 $12K$ に時間スケールの T を掛けた，$12KT=4.9539\cdots$ となる．この値は，図から判断される値と一致している．

なお，周期に関し解析的に求められる範囲で求めてみると，この $C=1$ という設定で，$D\to 0$ の極限をとったときは，(2.40) 式の μ, ν, および，楕円関数の母数 k, 時間スケールの T は,

$$\mu\to 1, \quad \nu\to 1, \quad k\to 1, \quad T\to\frac{2}{3} \tag{3.4}$$

となる．このとき，楕円関数 sn は双曲線関数 tanh になるので，周期は無限大となる．また，$D\to 1$ の極限では,

$$\mu\to\frac{2}{7}, \quad \nu\to\infty, \quad k\to 0, \quad T\to\frac{1}{3\sqrt{3}} \tag{3.5}$$

となる．このとき，楕円関数 sn は三角関数 sin となるので，その周期は 2π となり，三すくみの周期は $12KT=2\pi/\sqrt{3}$ となる．ただし，この $D\to 1(=C)$ という極限では，(2.8) 式から分かるように，$f(t)$ が時間に依存しなくなり，$f(t)\to 3C^2$ となって，(2.55) 式の $\rho(t)$ がゼロとなる．したがって，振動は起こらなくなり，$X=Y=Z=C$ となる．これは，[算術平均] と [幾何平均] が等しいことから当然の結果である．

以下の図 2 に $C=1$ の設定，および，$0<D\leq 1$ の範囲で，三すくみの周期 $12KT$ を数値的に求めたグラフを示す.

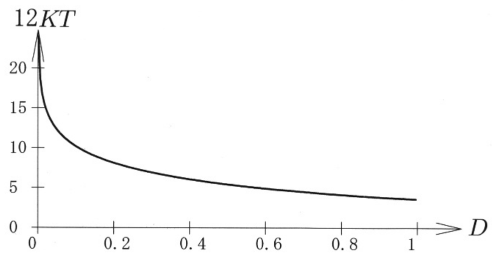

図 2　$C=1$ としたときの三すくみの周期 $12KT$

この図から，三すくみの周期は，$D\to 0$ の極限で発散しているが，D の増加と共に減少していき，$D=1$ で，最少の $2\pi/\sqrt{3}\risingdotseq 3.6275$ となることが見て取れる．

4　おわりに

グラフを描くとき，通常は Visual Basic を使っている．しかし，これには，楕円関数などというものは組み込み関数として備わっていないため，初めは，maxima を使って描こうとした．前回のときはこれでうまく描くことができたが，今回のものは式が複雑すぎるせいか，何度試してもうまく描くことができず，エラーになってしまう．1 日中，試行錯誤を繰り返したが，結局あきらめざるを得なくなった．maxima はうまくいくときは便利であるが，うまくいかなかったとき，どこがどのようにいけないのかということがまったくわからない．しかたなく，Visual Basic で，自分で楕円関数のプログラムを組むことで，ようやくグラフを描くこと

に成功した．Visual Basic の場合はエラーになったとき，どこがどのようにいけないのかが表示されるので，その点，使っていて安心できる．何事も，他力本願でやろうとすると，思わぬ窮地に陥れられる見本みたいなものと勉強になった．

初めは，こんな計算は簡単にできるだろうと思いつつ，いざ，始めてみると最初の予想に反して，煩雑な計算の連続になってしまった．しかし，最後のグラフがうまく描けたことで，計算ミスはなかったものと確信する．もっとも，こんな計算をしなくても，初めの微分方程式に X, Y, Z の初期値を与えて，方程式を数値的に解いてしまえば，事は簡単にすむはずである．こんな計算をするのは，よほどの暇人と思われるかもしれない．しかし，楕円関数を使う機会はほとんどないので，先人たちが残してくれた楕円関数なるものを，一度，使ってみるのも悪くはないと思い立ったしだいである．

5　付録 1: (2.12) 式の導き方

(2.11) 式で定義された $\varPhi$ は X, Y, Z の 6 次式なので，これを (2.2) の C, (2.4) 式の D, (2.6) 式の f で表そうとすると，a_i, $(i=1,2,\cdots 7)$ を適当な係数として，

$$\varPhi = a_1f^3 + a_2C^2f^2 + a_3C^4f + a_4CD^3f + a_5C^3D^3 + a_6D^6 + a_7C^6 \tag{5.1}$$

の形になるはずである．これを念頭にして，初め，$Z=0$ の場合を考えると，

$$3C = X+Y, \qquad f = XY, \qquad D = 0 \tag{5.2}$$

となり，また，(2.11) の $\varPhi$ は，

$$\varPhi = (XY)^2(X-Y)^2 \tag{5.3}$$

となるので，これら 2 式から，容易に，

$$\varPhi = -4f^3 + 9C^2f^2 \tag{5.4}$$

が導かれる．(5.1) 式は，$D=0$ のときこの結果にならなければならないので，$a_1=-4$, $a_2=9$, $a_3=0$, $a_7=0$ となる．あとは，残る a_4, a_5, a_6 を求めなければならないが，以後は，$Z\neq 0$ として，(2.11) の $\varPhi$ の定義から，この (5.4) 式を引き算すると，

$$\varPhi-[-4f^3+9C^2f^2] = \big[-4(X^3+Y^3+Z^3)+6(XY^2+X^2Y+YZ^2+Y^2Z+ZX^2+Z^2X)+3XYZ\big]XYZ \tag{5.5}$$

となる．あとは，$(3C)^3=(X+Y+Z)^3$, $3Cf=(X+Y+Z)(XY+YZ+ZX)$ を展開した式を利用して，この右辺をまとめると，

$$\text{右辺} = 54CD^3f - 27(4C^3+D^3)D^3 \tag{5.6}$$

となる．これから，(2.12) 式が

$$\varPhi = -4f^3 + 9C^2f^2 + 54CD^3f - 27(4C^3+D^3)D^3 \tag{5.7}$$

と求められる．

[謝辞]

今回の原稿は,「はじめに」にところで述べたように，京都大学名誉教授の中西襄先生のご忠告によって初めて書くことができたものです．また，完成後も貴重なコメントをいただきました．ここに，謹んで感謝いたします．

三角関数のパラメータを含む関数の有限級数の和 2

Finite Sums of Functions of Trigonometric Functions
with One Parameter 2

中 西　襄 [1]

Noboru NAKANISHI [2]

1　はじめに

前論文 (「数学・物理通信」5-9) で次のような三角関数の関数の有限和に対する公式を与えた.

$$\begin{aligned} S(n;a) &\equiv \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \frac{r\pi}{2n+1} + a^2 \cos^2 \frac{r\pi}{2n+1}} \\ &= \frac{2n+1}{2a} \cdot \frac{(1+a)^{2n+1} + (1-a)^{2n+1}}{(1+a)^{2n+1} - (1-a)^{2n+1}} - \frac{1}{2a^2}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}(n;a) &\equiv \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \frac{(2r-1)\pi}{2(2n+1)} + a^2 \cos^2 \frac{(2r-1)\pi}{2(2n+1)}} \\ &= \frac{2n+1}{2a} \cdot \frac{(1+a)^{2n+1} - (1-a)^{2n+1}}{(1+a)^{2n+1} + (1-a)^{2n+1}} - \frac{1}{2}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} T(n;a) &\equiv \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \frac{r\pi}{2(n+1)} + a^2 \cos^2 \frac{r\pi}{2(n+1)}} \\ &= \frac{n+1}{a} \cdot \frac{(1+a)^{2(n+1)} + (1-a)^{2(n+1)}}{(1+a)^{2(n+1)} - (1-a)^{2(n+1)}} - \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{a^2}\Big), \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} U(n;a) &\equiv \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \frac{(2r-1)\pi}{4n} + a^2 \cos^2 \frac{(2r-1)\pi}{4n}} \\ &= \frac{n}{a} \cdot \frac{(1+a)^{2n} - (1-a)^{2n}}{(1+a)^{2n} + (1-a)^{2n}}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

他方，公式集　森口・宇多川・一松著「数学公式 II　ー級数・フーリエ解析ー」の p.20 に，連続変数 x を含む三角関数の関数の有限和に対する次のような公式があった.

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{n} \sec^2\left(x + \frac{2(r-1)\pi}{n}\right) &= n^2 \sec^2(nx) && [n : \text{奇数}] \\ &= \frac{n^2}{1 - (-1)^{n/2}\cos(nx)} && [n : \text{偶数}]; \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{n} \csc^2\left(x + \frac{2(r-1)\pi}{n}\right) &= n^2 \csc^2(nx) && [n : \text{奇数}] \\ &= \frac{n^2}{2} \csc^2\left(\frac{nx}{2}\right) && [n : \text{偶数}]. \end{aligned} \tag{1.6}$$

[1] 京都大学名誉教授

[2] nbr-nak@trio.plala.or.jp

このように，三角関数の中に連続変数 x を持ち込んでも，和公式を与えることができることがわかる．そこで今回は，前論文の三角関数の中に x を持ち込んだ場合への公式 (1.1)〜(1.4) の拡張公式を導出することを考える．それは特別の場合として (1.5)，(1.6) を含むものである．

2　拡張公式

前論文で与えた公式の三角関数の変数に x を付け加えた公式を考える．この場合，和を 1 から n までに限定するわけにはいかない．それは留数表示したとき，被積分関数の極以外の因子が実軸に関して対称な関数にならないからである．そこで今度は，和の取り方をそれぞれで公式の形が最も簡単になるように選ぶことにする．

拡張された和公式は次のようになる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}(x,n;a) &\equiv \sum_{r=0}^{2n} \frac{1}{\sin^2(x+\frac{r\pi}{2n+1})+a^2\cos^2(x+\frac{r\pi}{2n+1})} \\ &= \frac{2n+1}{a}\cdot\frac{(1+a)^{2(2n+1)}-(1-a)^{2(2n+1)}}{(1+a)^{2(2n+1)}+(1-a)^{2(2n+1)}-2(1-a^2)^{2n+1}\cos(2(2n+1)x)},\end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{S}}(x,n;a) &\equiv \sum_{r=1}^{2n+1} \frac{1}{\sin^2(x+\frac{(2r-1)\pi}{2(2n+1)})+a^2\cos^2(x+\frac{(2r-1)\pi}{2(2n+1)})} \\ &= \frac{2n+1}{a}\cdot\frac{(1+a)^{2(2n+1)}-(1-a)^{2(2n+1)}}{(1+a)^{2(2n+1)}+(1-a)^{2(2n+1)}+2(1-a^2)^{2n+1}\cos(2(2n+1)x)},\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}(x,n;a) &\equiv \sum_{r=0}^{2n+1} \frac{1}{\sin^2(x+\frac{r\pi}{2(n+1)})+a^2\cos^2(x+\frac{r\pi}{2(n+1)})} \\ &= \frac{2(n+1)}{a}\cdot\frac{(1+a)^{4(n+1)}-(1-a)^{4(n+1)}}{(1+a)^{4(n+1)}+(1-a)^{4(n+1)}-2(1-a^2)^{2(n+1)}\cos(4(n+1)x)},\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}(x,n;a) &\equiv \sum_{r=1}^{2n} \frac{1}{\sin^2(x+\frac{(2r-1)\pi}{4n})+a^2\cos^2(x+\frac{(2r-1)\pi}{4n})} \\ &= \frac{2n}{a}\cdot\frac{(1+a)^{4n}-(1-a)^{4n}}{(1+a)^{4n}+(1-a)^{4n}+2(1-a^2)^{2n}\cos(4nx)}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

太字の量の $x=0$ での値は次のようになっている．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}(0,n;a) &= 2S(n;a)+\frac{1}{a^2}, \\ \tilde{\boldsymbol{S}}(0,n;a) &= 2\tilde{S}(n;a)+1, \\ \boldsymbol{T}(0,n;a) &= 2T(n;a)+1+\frac{1}{a^2}, \\ \boldsymbol{U}(0,n;a) &= 2U(n;a).\end{aligned} \tag{2.5}$$

なお，$n=0$ の場合は次のような恒等式に帰着する．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S}(x,0;a) &= \frac{1}{\sin^2 x + a^2\cos^2 x} = \frac{2}{1+a^2-(1-a^2)\cos(2x)},\\
\tilde{\boldsymbol{S}}(x,0;a) &= \frac{1}{\sin^2(x+\frac{\pi}{2}) + a^2\cos^2(x+\frac{\pi}{2})} = \frac{2}{1+a^2+(1-a^2)\cos(2x)},\\
\boldsymbol{T}(x,0;a) &= \frac{1}{\sin^2 x + a^2\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2(x+\frac{\pi}{2}) + a^2\cos^2(x+\frac{\pi}{2})}\\
&= \frac{8(1+a^2)}{2(1+a^2)^2-(1-a^2)^2(1+\cos(4x))},\\
\boldsymbol{U}(x,0;a) &= 0 = 0.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

3　公式の証明

(2.1)〜(2.4) を証明する．

$a=\pm 1$ の場合はすべて自明であるので，以下 $a^2 \neq 1$ とする．以下では a 及び x は実数とするが，あとから解析接続で複素数にできる．

まず，分母因子を変形する．

$$\begin{aligned}
&\sin^2(x+\theta) + a^2\cos^2(x+\theta)\\
&\qquad = \frac{1}{4}(-e^{2i(x+\theta)} + 2 - e^{-2i(x+\theta)} + a^2 e^{2i(x+\theta)} + 2a^2 + a^2 e^{-2i(x+\theta)})
\end{aligned} \tag{3.1}$$

であるから，$e^{2ix}=t$，$e^{2i\theta}=z$ とおけば，(3.1) は

$$-\frac{1}{4}[(1-a^2)tz - 2(1+a^2) + (1-a^2)(tz)^{-1}] = -\frac{(1-a^2)t}{4z}(z-t^{-1}\alpha)(z-t^{-1}\alpha^{-1}) \tag{3.2}$$

と因数分解される．ただし

$$\alpha \equiv \frac{1-a}{1+a} \tag{3.3}$$

と置いた．したがって，$\theta_n(r)$ を $0 \leqq \theta_n(r) < \pi$ であるような r と n の関数とするとき [3]，留数定理とコーシーの定理により，

$$\begin{aligned}
&\sum_r \frac{1}{\sin^2(x+\theta_n(r)) + a^2\cos^2(x+\theta_n(r))}\\
&\qquad = -\frac{4}{(1-a^2)t}\cdot\frac{1}{2\pi i}\Big(\int_C - \int_{C(\alpha)} - \int_{C(\alpha^{-1})}\Big)dz\\
&\qquad\qquad \frac{z}{(z-t^{-1}\alpha)(z-t^{-1}\alpha^{-1})}\sum_r \frac{1}{z-e^{2i\theta_n(r)}}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

と表示できる．ここに積分路 C は，原点を中心とし正方向に廻る半径 $R\,(> \max(|\alpha|, |\alpha^{-1}|)$ の円，$C(\lambda)$ は $z=\lambda$ の周りを正方向に廻る微小円である．$R\to\infty$ とすると，C からの寄与は 0 であることが分かる．したがって，

$$\begin{aligned}
&\sum_r \frac{1}{\sin^2(x+\theta_n(r)) + a^2\cos^2(x+\theta_n(r))}\\
&\qquad = \frac{4}{(1-a^2)t}\cdot\frac{1}{2\pi i}\Big(\int_{C(\alpha)} + \int_{C(\alpha^{-1})}\Big)dz \frac{zF_n(z)}{(z-t^{-1}\alpha)(z-t^{-1}\alpha^{-1})}\\
&\qquad = \frac{4}{(1-a^2)t}\Big(\frac{\alpha F_n(t^{-1}\alpha)}{\alpha-\alpha^{-1}} + \frac{\alpha^{-1}F_n(t^{-1}\alpha^{-1})}{\alpha^{-1}-\alpha}\Big)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

[3] 前論文では $\theta_n(r)$ の上界が $\pi/2$ であったことに注意．

となる．ただし

$$F_n(z) \equiv \sum_r \frac{1}{z - e^{2i\theta_n(r)}} = \frac{d}{dz}\log\prod_r (z - e^{2i\theta_n(r)}) \tag{3.6}$$

と置いた．ここに現れた log の中の積は，$e^{2i\theta_n(r)}$ がどのような円分方程式の解の r についてのセット I_n であるかで決まる．

(1) $\boldsymbol{S}(x, n; a)$ の場合

この場合は $\theta_n(r) = r\pi/(2n+1)$ $(r = 0, 1, \cdots, 2n)$ であるから，I_n は方程式 $z^{2n+1} - 1 = 0$ の解の全体である．したがって，

$$F_n(z) = \frac{d}{dz}\log(z^{2n+1} - 1) = \frac{(2n+1)z^{2n}}{z^{2n+1} - 1} \tag{3.7}$$

となる．ゆえに (3.6) から

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}(x, n; a) &= \frac{4}{(1-a^2)(\alpha - \alpha^{-1})}\Big(\frac{(2n+1)(t^{-1}\alpha)^{2n+1}}{(t^{-1}\alpha)^{2n+1} - 1} - \frac{(2n+1)(t\alpha)^{-2n-1}}{(t\alpha)^{-2n-1} - 1}\Big) \\ &= \frac{4}{(1-a^2)(\alpha - \alpha^{-1})} \cdot \frac{-(2n+1)(1 - \alpha^{2(2n+1)})}{1 + \alpha^{2(2n+1)} - (t^{2n+1} + t^{-(2n+1)})\alpha^{2n+1}} \end{aligned} \tag{3.8}$$

を計算すればよい．$t = e^{2ix}$ と (3.3) の $\alpha = (1-a)/(1+a)$ を代すると，

$$\boldsymbol{S}(x, n; a) = \frac{2n+1}{a} \cdot \frac{(1+a)^{2(2n+1)} - (1-a)^{2(2n+1)}}{(1+a)^{2(2n+1)} + (1-a)^{2(2n+1)} - 2(1-a^2)^{2n+1}\cos(2(2n+1)x)} \tag{3.9}$$

を得る．

(2) $\tilde{\boldsymbol{S}}(x, n; a)$ の場合

このと場合は $\theta_n(r) = (2r-1)\pi/2(2n+1)$ $(r = 1, 2, \cdots, 2n+1)$ であるから，I_n は方程式 $z^{2n+1} + 1 = 0$ の解の全体である．したがって，

$$F_n(z) = \frac{d}{dz}\log(z^{2n+1} + 1) = \frac{(2n+1)z^{2n}}{z^{2n+1} + 1} \tag{3.10}$$

となる．ゆえに (3.6) から

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{S}}(x, n; a) &= \frac{4}{(1-a^2)(\alpha - \alpha^{-1})}\Big(\frac{(2n+1)(t^{-1}\alpha)^{2n+1}}{(t^{-1}\alpha)^{2n+1} + 1} - \frac{(2n+1)(t\alpha)^{-2n-1}}{(t\alpha)^{-2n-1} + 1}\Big) \\ &= \frac{4}{(1-a^2)(\alpha - \alpha^{-1})} \cdot \frac{-(2n+1)(1 - \alpha^{2(2n+1)})}{1 + \alpha^{2(2n+1)} + (t^{2n+1} + t^{-(2n+1)})\alpha^{2n+1}} \end{aligned} \tag{3.11}$$

を計算すればよい．$t = e^{2ix}$ と (3.3) の $\alpha = (1-a)/(1+a)$ を代すると，

$$\tilde{\boldsymbol{S}}(x, n; a) = \frac{2n+1}{a} \cdot \frac{(1+a)^{2(2n+1)} - (1-a)^{2(2n+1)}}{(1+a)^{2(2n+1)} + (1-a)^{2(2n+1)} + 2(1-a^2)^{2n+1}\cos(2(2n+1)x)} \tag{3.12}$$

を得る．

(3) $\boldsymbol{T}(x, n; a)$ の場合

この場合は $\theta_n(r) = r\pi/2(n+1)$ $(r = 0, 1, \cdots, 2n+1)$ である．I_n は方程式 $z^{2(n+1)} - 1 = 0$ の解の全体である．したがって，

$$F_n(z) = \frac{d}{dz}\log(z^{2(n+1)} - 1) = \frac{2(n+1)z^{2n+1}}{z^{2(n+1)} - 1} \tag{3.13}$$

となる．ゆえに (3.6) から

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}(x,n;a) &= \frac{4}{(1-a^2)(\alpha-\alpha^{-1})}\Big(\frac{2(n+1)(t^{-1}\alpha)^{2(n+1)}}{(t^{-1}\alpha)^{2(n+1)}-1}-\frac{2(n+1)(t\alpha)^{-2(n+1)}}{(t\alpha)^{-2(n+1)}-1}\Big)\\ &= \frac{4}{(1-a^2)(\alpha-\alpha^{-1})}\cdot\frac{-2(n+1)(1-\alpha^{4(n+1)})}{1+\alpha^{4(n+1)}-(t^{2(n+1)}+t^{-2(n+1)})\alpha^{2(n+1)}}\end{aligned} \tag{3.14}$$

を計算すればよい．$t=e^{2ix}$ と (3.3) の $\alpha=(1-a)/(1+a)$ を代すると，

$$\boldsymbol{T}(x,n;a)=\frac{2(n+1)}{a}\cdot\frac{(1+a)^{4(n+1)}-(1-a)^{4(n+1)}}{(1+a)^{4(n+1)}+(1-a)^{4(n+1)}-2(1-a^2)^{2(n+1)}\cos(4(n+1)x)} \tag{3.15}$$

を得る．

(4) $\boldsymbol{U}(x,n;a)$ の場合

このと場合は $\theta_n(r)=(2r-1)\pi/4n$ $(r=1,2,\cdots,2n)$ であるから，I_n は方程式 $z^{2n}+1=0$ の解の全体である．したがって，

$$F_n(z)=\frac{d}{dz}\log(z^{2n}+1)=\frac{2nz^{2n-1}}{z^{2n}+1} \tag{3.16}$$

となる．ゆえに (3.6) から

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}(x,n;a) &= \frac{4}{(1-a^2)(\alpha-\alpha^{-1})}\Big(\frac{2n(t^{-1}\alpha)^{2n}}{(t^{-1}\alpha)^{2n}+1}-\frac{2n(t\alpha)^{-2n}}{(t\alpha)^{-2n}+1}\Big)\\ &= \frac{4}{(1-a^2)(\alpha-\alpha^{-1})}\cdot\frac{(-2n)(1-\alpha^{4n})}{1+\alpha^{4n}+(t^{2n}+t^{-2n})\alpha^{2n}}\end{aligned} \tag{3.17}$$

を計算すればよい．$t=e^{2ix}$ と (3.3) の $\alpha=(1-a)/(1+a)$ を代すると，

$$\boldsymbol{U}(x,n;a)=\frac{2n}{a}\cdot\frac{(1+a)^{4n}-(1-a)^{4n}}{(1+a)^{4n}+(1-a)^{4n}+2(1-a^2)^{2n}\cos(4nx)} \tag{3.18}$$

を得る．(証明終)

4　a の特殊値

公式 (2.1)〜(2.4) で a が特殊値のときを考える．$a=\pm1$ のときは，各式両辺とも左辺の項数に等しい．

$a=0$ のときは，右辺では $a\to0$ をとると，三角関数の倍角公式を使って，次の公式を得る．

$$\boldsymbol{S}(x,n;0)=\sum_{r=0}^{2n}\frac{1}{\sin^2(x+\frac{r\pi}{2n+1})}=\frac{(2n+1)^2}{\sin^2((2n+1)x)}, \tag{4.1}$$

$$\tilde{\boldsymbol{S}}(x,n;0)=\sum_{r=1}^{2n+1}\frac{1}{\sin^2(x+\frac{(2r-1)\pi}{2(2n+1)})}=\frac{(2n+1)^2}{\cos^2((2n+1)x)}, \tag{4.2}$$

$$\boldsymbol{T}(x,n;0)=\sum_{r=0}^{2n+1}\frac{1}{\sin^2(x+\frac{r\pi}{2(n+1)})}=\frac{4(n+1)^2}{\sin^2(2(n+1)x)}, \tag{4.3}$$

$$\boldsymbol{U}(x,n;0)=\sum_{r=1}^{2n}\frac{1}{\sin^2(x+\frac{(2r-1)\pi}{4n})}=\frac{4n^2}{\cos^2(2nx)}. \tag{4.4}$$

(2.1)〜(2.4) の両辺に a^2 を乗じて，$a \to \infty$ とすると，次の公式が得られる．

$$\lim_{a\to\infty} a^2 \boldsymbol{S}(x,n;a) = \sum_{r=0}^{2n} \frac{1}{\cos^2(x+\frac{r\pi}{2n+1})} = \frac{(2n+1)^2}{\cos^2((2n+1)x)}, \tag{4.5}$$

$$\lim_{a\to\infty} a^2 \tilde{\boldsymbol{S}}(x,n;a) = \sum_{r=1}^{2n+1} \frac{1}{\cos^2(x+\frac{(2r-1)\pi}{2(2n+1)})} = \frac{(2n+1)^2}{\sin^2((2n+1)x)}, \tag{4.6}$$

$$\lim_{a\to\infty} a^2 \boldsymbol{T}(x,n;a) = \sum_{r=0}^{2n+1} \frac{1}{\cos^2(x+\frac{r\pi}{2(n+1)})} = \frac{4(n+1)^2}{\sin^2(2(n+1)x)}, \tag{4.7}$$

$$\lim_{a\to\infty} a^2 \boldsymbol{U}(x,n;a) = \sum_{r=1}^{2n} \frac{1}{\cos^2(x+\frac{(2r-1)\pi}{4n})} = \frac{4n^2}{\cos^2(2nx)}. \tag{4.8}$$

さて，1 節に掲げた公式集の公式 (1.5) と (1.6) で $r-1=r'$ とし，n の偶奇を式で明示すると，

$$\sum_{r'=0}^{2n} \frac{1}{\cos^2(x+\frac{2r'\pi}{2n+1})} = \frac{(2n+1)^2}{\cos^2((2n+1)x)}, \tag{4.9}$$

$$\sum_{r'=0}^{2n-1} \frac{1}{\cos^2(x+\frac{r'\pi}{n})} = \frac{4n^2}{1-(-1)^n\cos(2nx)}, \tag{4.10}$$

$$\sum_{r'=0}^{2n} \frac{1}{\sin^2(x+\frac{2r'\pi}{2n+1})} = \frac{(2n+1)^2}{\sin^2((2n+1)x)}, \tag{4.11}$$

$$\sum_{r'=0}^{2n-1} \frac{1}{\sin^2(x+\frac{r'\pi}{n})} = \frac{2n^2}{\sin^2(nx)} \tag{4.12}$$

となる．

(4.9) は (4.5) と，(4.11) は (4.1) とそれぞれ一致している．和の取り方が異なっているように見えるが，$\cos^2\theta$ や $\sin^2\theta$ が周期 π を持っていることに注意して，$0 \leqq r' \leqq n$ については $2r'=r$，$n+1 \leqq r' \leqq 2n$ については $2r'=r+2n+1$ とすれば，同じであることがわかる．

(4.10) は，n の偶奇に応じて分けて考えなければならない．

$$\sum_{r'=0}^{4n-1} \frac{1}{\cos^2(x+\frac{r'\pi}{2n})} = \frac{8n^2}{\sin^2(2nx)}, \tag{4.13}$$

$$\sum_{r'=0}^{4n+1} \frac{1}{\cos^2(x+\frac{r'\pi}{2n+1})} = \frac{2(2n+1)^2}{\cos^2((2n+1)x)}. \tag{4.14}$$

これらの級数和は，$\cos^2\theta$ が周期 π を持っていることから同じ項が重複しているので，和を半分にしてよい．したがって

$$\sum_{r=0}^{2n-1} \frac{1}{\cos^2(x+\frac{r\pi}{2n})} = \frac{4n^2}{\sin^2(2nx)}, \tag{4.15}$$

$$\sum_{r=0}^{2n} \frac{1}{\cos^2(x+\frac{r\pi}{2n+1})} = \frac{(2n+1)^2}{\cos^2((2n+1)x)} \tag{4.16}$$

となる．(4.15) は n を $n+1$ と書き換えれば (4.7) と一致している．(4.16) は (4.5) と一致している．

同様に，(4.12) も重複部分を除くため和を半分にすると，

$$\sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{\sin^2(x+\frac{r\pi}{n})} = \frac{n^2}{\sin^2(nx)} \tag{4.17}$$

となる．この式は (4.1) と (4.3) とをまとめたものに他ならない．

以上により，公式集の公式 (1.5)，(1.6) が証明された．この公式集には $\tilde{\boldsymbol{S}}$ と $\boldsymbol{U}$ から出る公式は収録されていないことになる．

5 相互関係

(2.1)〜(2.4) では，相互関係式

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}(x,n;a) &= \boldsymbol{S}(x,n+\tfrac{1}{2};a), \\ \boldsymbol{U}(x,n;a) &= \tilde{\boldsymbol{S}}(x,n-\tfrac{1}{2};a) \end{aligned} \tag{5.1}$$

は自明な式である．つまり，(2.1) と (2.3) はまとめて

$$\begin{aligned} &\sum_{r=0}^{N-1} \frac{1}{\sin^2(x+\frac{r\pi}{N}) + a^2\cos^2(x+\frac{r\pi}{N})} \\ &\qquad = \frac{N}{a}\cdot\frac{(1+a)^{2N}-(1-a)^{2N}}{(1+a)^{2N}+(1-a)^{2N}-2(1-a^2)^N\cos(2Nx)}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

(2.2) と (2.4) はまとめて

$$\begin{aligned} &\sum_{r=1}^{N} \frac{1}{\sin^2(x+\frac{(2r-1)\pi}{2N}) + a^2\cos^2(x+\frac{(2r-1)\pi}{2N})} \\ &\qquad = \frac{N}{a}\cdot\frac{(1+a)^{2N}-(1-a)^{2N}}{(1+a)^{2N}+(1-a)^{2N}+2(1-a^2)^N\cos(2Nx)} \end{aligned} \tag{5.3}$$

という和公式になるわけである．(5.2) において x を $x+(\pi/2N)$ に，r を $r-1$ に置き換えると，$\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$ だから，ちょうど (5.3) になる．ということは，(5.2) にすべて集約されるということになる．

なお，(2.1)〜(2.3) の右辺を比較すれば，容易に関係式

$$\boldsymbol{T}(x,n;a) = \boldsymbol{S}(x,\tfrac{1}{2}n;a) + \tilde{\boldsymbol{S}}(x,\tfrac{1}{2}n;a) \tag{5.4}$$

が得られる．これは本質的に，任意関数 $\varphi(r)$ について

$$\sum_{r=0}^{4n+1} \varphi(r) = \sum_{r=0}^{2n} \varphi(2r) + \sum_{r=1}^{2n+1} \varphi(2r-1) \tag{5.5}$$

という恒等式が成り立つことからの帰結である．

6 母関数

変数 x を含んだ $\cot^2$ の冪乗和 $\sum_{r=0}^{N-1} \cot^{2k}(x+\frac{r\pi}{N})$ の母関数

$$\Phi^{\cot}(x,N;-a^2) \equiv \sum_{r=0}^{N-1} \frac{1}{1+a^2\cot^2(x+\frac{r\pi}{N})} \tag{6.1}$$

を考える．

$$\mathbf{\Phi}^{\cot}(x,N;-a^2)=\sum_{r=0}^{N-1}\frac{\sin^2(x+\frac{r\pi}{N})}{\sin^2(x+\frac{r\pi}{N})+a^2\cos^2(x+\frac{r\pi}{N})} \tag{6.2}$$

であるから，これの留数による計算は，3 節の計算において (3.4) の被積分関数に因子

$$\sin^2\left(x+\frac{r\pi}{N}\right)=-\frac{1}{4}(tz-2+(tz)^{-1}) \tag{6.3}$$

がかかるだけである．この因子の両方の極からの寄与は等しく，(3.5) の右辺に共通因子として

$$-\frac{1}{4}(\alpha-2+\alpha^{-1})=-\frac{a^2}{1-a^2} \tag{6.4}$$

がかかることになる．しかし今度の場合は，半径 $R(\to\infty)$ の円 C 上で (6.3) は絶対値が R の 1 次の量ので，C 上の積分からの寄与として $N/(1-a^2)$ が付け加わる．したがって

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}^{\cot}(x,N;-a^2)&=\frac{N}{1-a^2}-\frac{a^2}{1-a^2}\cdot\frac{N}{a}\cdot\frac{(1+a)^{2N}-(1-a)^{2N}}{(1+a)^{2N}+(1-a)^{2N}-2(1-a^2)^N\cos(2Nx)}\\&=N\cdot\frac{(1+a)^{2N-1}+(1-a)^{2N-1}-2(1-a^2)^{N-1}\cos(2Nx)}{(1+a)^{2N}+(1-a)^{2N}-2(1-a^2)^N\cos(2Nx)}\end{aligned} \tag{6.5}$$

を得る．

同様にして，

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}^{\cot}(x,N;-a^2)\equiv\sum_{r=0}^{N-1}\frac{1}{1+a^2\cot^2(x+\frac{(2r-1)\pi}{2N})} \tag{6.6}$$

に対しては，

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}^{\cot}(x,N;-a^2)=N\cdot\frac{(1+a)^{2N-1}+(1-a)^{2N-1}+2(1-a^2)^{N-1}\cos(2Nx)}{(1+a)^{2N}+(1-a)^{2N}+2(1-a^2)^N\cos(2Nx)} \tag{6.7}$$

を得る．これは $\tilde{\mathbf{\Phi}}^{\cot}(x,N;-a^2)=\mathbf{\Phi}^{\cot}(x+(\pi/2N),N;-a^2)$ からも分かる．

次に変数 x を含んだ $\tan^2$ の冪乗和 $\sum_{r=0}^{N-1}\tan^{2k}(x+\frac{r\pi}{N})$ の母関数

$$\mathbf{\Phi}^{\tan}(x,N;-a^2)\equiv\sum_{r=0}^{N-1}\frac{1}{1+a^2\tan^2(x+\frac{r\pi}{N})} \tag{6.8}$$

を考えよう．

$$\mathbf{\Phi}^{\tan}(x,N;-a^2)=a^{-2}\sum_{r=0}^{N-1}\frac{\cos^2(x+\frac{r\pi}{N})}{\sin^2(x+\frac{r\pi}{N})+a^{-2}\cos^2(x+\frac{r\pi}{N})} \tag{6.9}$$

で，$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ だから，a を a^{-1} と読み替えて (5.2) と (6.5) とから計算できて，

$$\mathbf{\Phi}^{\tan}(x,N;-a^2)=N\cdot\frac{(1+a)^{2N-1}+(1-a)^{2N-1}-2(-1)^N(1-a^2)^{N-1}\cos(2Nx)}{(1+a)^{2N}+(1-a)^{2N}-2(-1)^N(1-a^2)^N\cos(2Nx)} \tag{6.10}$$

となる．同様に

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}^{\tan}(x,N;-a^2)\equiv\sum_{r=1}^{N}\frac{1}{1+a^2\tan^2(x+\frac{(2r-1)\pi}{2N})} \tag{6.11}$$

に対しては，

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}^{\tan}(x,N;-a^2)=N\cdot\frac{(1+a)^{2N-1}+(1-a)^{2N-1}+2(-1)^N(1-a^2)^{N-1}\cos(2Nx)}{(1+a)^{2N}+(1-a)^{2N}+2(-1)^N(1-a^2)^N\cos(2Nx)} \tag{6.12}$$

を得る．

(6.5)，(6.7)，(6.10)，(6.12) を見較べると，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi}^{\tan}(x,N;-a^2) &= \boldsymbol{\Phi}^{\cot}(x,N;-a^2) \quad [N：偶数],\\
&= \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{\cot}(x,N;-a^2) \quad [N：奇数];\\
\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{\tan}(x,N;-a^2) &= \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{\cot}(x,N;-a^2) \quad [N：偶数],\\
&= \boldsymbol{\Phi}^{\cot}(x,N;-a^2) \quad [N：奇数]
\end{aligned}
\tag{6.13}
$$

となっていることがわかる．これらの関係式は，$\tan^2\theta = \cot^2(\theta \pm (\pi/2))$ を使って定義式から直接証明できるものであり，上記の結果の良いチェックになっている．

(6.5)，(6.7) の $-a^2$ についての冪展開を Maxima を用いて計算し，三角関数の倍角公式を使って整理すると，次の公式が得られる．

$$
\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{N-1} \cot^2\left(x+\frac{r\pi}{N}\right) &= \frac{N(N-\sin^2(Nx))}{\sin^2(Nx)},\\
\sum_{r=0}^{N-1} \cot^4\left(x+\frac{r\pi}{N}\right) &= \frac{N[3N^3-2N(N^2+2)\sin^2(Nx)+3\sin^4(Nx)]}{3\sin^4(Nx)};
\end{aligned}
\tag{6.14}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{N} \cot^2\left(x+\frac{(2r-1)\pi}{2N}\right) &= \frac{N(N-\cos^2(Nx))}{\cos^2(Nx)},\\
\sum_{r=1}^{N} \cot^4\left(x+\frac{(2r-1)\pi}{2N}\right) &= \frac{N[3N^3-2N(N^2+2)\cos^2(Nx)+3\cos^4(Nx)]}{3\cos^4(Nx)}.
\end{aligned}
\tag{6.15}
$$

7 cot の冪乗和公式の再現

「数学・物理通信」5-4，5-5 で次の冪乗和公式を与えた．

$$
\begin{aligned}
S_k(n) \equiv \sum_{r=1}^{n} \cot^{2k}\left(\frac{r\pi}{2n+1}\right) &= \frac{1}{3}n(2n-1) \quad (k=1 のとき)\\
&= \frac{1}{45}n(2n-1)(4n^2+10n-9) \quad (k=2 のとき),
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{S}_k(n) \equiv \sum_{r=1}^{n} \cot^{2k}\left(\frac{(2r-1)\pi}{2(2n+1)}\right) &= n(2n+1) \quad (k=1 のとき)\\
&= \frac{1}{3}n(2n+1)(4n^2+6n-1) \quad (k=2 のとき),
\end{aligned}
\tag{7.2}
$$

$$
\begin{aligned}
T_k(n) \equiv \sum_{r=1}^{n} \cot^{2k}\left(\frac{r\pi}{2(n+1)}\right) &= \frac{1}{3}n(2n+1) \quad (k=1 のとき)\\
&= \frac{1}{45}n(2n+1)(4n^2+14n-3) \quad (k=2 のとき),
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$

$$
\begin{aligned}
U_k(n) \equiv \sum_{r=1}^{n} \cot^{2k}\left(\frac{(2r-1)\pi}{4n}\right) &= n(2n-1) \quad (k=1 のとき)\\
&= \frac{1}{3}n(2n-1)(4n^2+2n-3) \quad (k=2 のとき).
\end{aligned}
\tag{7.4}
$$

これらの結果が，(6.14)，(6.15) からも再現できることを見ておこう．(6.14) に直接 $x=0$ を代入すると両辺とも発散してしまうので，左辺の $r=0$ の項を右辺に移項してから $x\to 0$ の極限をと

る．極限値は，x に関する冪展開を Maxima を使って計算すれば簡単に答えがでる．

$$
\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{N-1}\cot^2\left(\frac{r\pi}{N}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{N^2}{\sin^2(Nx)} - N - \cot^2 x\right) \\
&= \frac{1}{3}(N-1)(N-2), \\
\sum_{r=1}^{N-1}\cot^4\left(\frac{r\pi}{N}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{N^4}{\sin^4(Nx)} - \frac{2N(N^2+2)}{3\sin^2(Nx)} + N - \cot^4 x\right) \\
&= \frac{1}{45}(N-1)(N-2)(N^2+3N-13).
\end{aligned}
\tag{7.5}
$$

$N = 2n+1$ と置き，$\cot^2\theta$ の周期が $\pi/2$ であることを使うと，

$$
\begin{aligned}
2\sum_{r=1}^{n}\cot^2\left(\frac{r\pi}{2n+1}\right) &= 2\cdot\frac{1}{3}n(2n-1), \\
2\sum_{r=1}^{n}\cot^4\left(\frac{r\pi}{2n+1}\right) &= 2\cdot\frac{1}{45}n(2n-1)(4n^2+10n-9)
\end{aligned}
\tag{7.6}
$$

となって，(7.1) を再現する．$N = 2(n+1)$ と置き，$\cot^2\theta$ の周期が $\pi/2$ であることと $\cot(\pi/2) = 0$ を使うと，

$$
\begin{aligned}
2\sum_{r=1}^{n}\cot^2\left(\frac{r\pi}{2(n+1)}\right) &= 2\cdot\frac{1}{3}n(2n+1), \\
2\sum_{r=1}^{n}\cot^4\left(\frac{r\pi}{2(n+1)}\right) &= 2\cdot\frac{1}{45}n(2n-1)(4n^2+14n-3)
\end{aligned}
\tag{7.7}
$$

となって，(7.3) を再現する．

次は (6.15) に $x = 0$ を代入すると，

$$
\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{N}\cot^2\left(\frac{(2r-1)\pi}{2N}\right) &= N(N-1), \\
\sum_{r=1}^{N}\cot^4\left(\frac{(2r-1)\pi}{2N}\right) &= \frac{1}{3}N(N-1)(N^2+N-3).
\end{aligned}
\tag{7.8}
$$

$N = 2n+1$ と置き，$\cot^2\theta$ の周期が $\pi/2$ であることと $\cot(\pi/2) = 0$ を使うと，

$$
\begin{aligned}
2\sum_{r=1}^{n}\cot^2\left(\frac{(2r-1)\pi}{2(2n+1)}\right) &= 2\cdot n(2n+1), \\
2\sum_{r=1}^{n}\cot^4\left(\frac{(2r-1)\pi}{2(2n+1)}\right) &= 2\cdot\frac{1}{3}n(2n+1)(4n^2+6n-1)
\end{aligned}
\tag{7.9}
$$

となって，(7.2) を再現する．$N = 2n$ と置き，$\cot^2\theta$ の周期が $\pi/2$ であることを使うと，

$$
\begin{aligned}
2\sum_{r=1}^{n}\cot^2\left(\frac{(2r-1)\pi}{2(2n+1)}\right) &= 2\cdot n(2n-1), \\
2\sum_{r=1}^{n}\cot^4\left(\frac{(2r-1)\pi}{2(2n+1)}\right) &= 2\cdot\frac{1}{3}n(2n-1)(4n^2+2n-3)
\end{aligned}
\tag{7.10}
$$

となって，(7.4) を再現する．

8　まとめ

前論文で与えた三角関数のパラメータ a を含む有限級数の和の公式を，連続変数 x を持つ場合に拡張した．x を含まない場合には，4 つの公式における項の数を n にそろえた．しかしこれが可能なのは，x がない場合存在する特別な対称性のおかげである．今回の場合はそれができないので，項の数は円分方程式のすべての解に対応して自然に決まる数になる．しかし，このおかげで却って見通しがよくなることが分かった．中心結果は，エレガントな一般公式 (5.2)，すなわち

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{N-1} &\frac{1}{1+a^2-(1-a^2)\cos(y+\frac{2r\pi}{N})} \\ &= \frac{N}{2a}\cdot\frac{(1+a)^{2N}-(1-a)^{2N}}{(1+a)^{2N}+(1-a)^{2N}-2(1-a^2)^N\cos(Ny)}\end{aligned} \tag{8.1}$$

である（$2x=y$ と置いた.）．この公式さえあれば，これまでにこの関連で論じてきたすべての公式が導かれることか分かった．

重ね合わせの理

矢野　忠[1]

Law of Superposition

Tadashi YANO[2]

1　はじめに

電池と抵抗とが併存する電気回路で，キルヒホッフの法則を用いて流れる電流の大きさを求めたいとき，利用される解法の一つに重ね合わせの理 (law of superposition) がある [3]．この解法は連立 1 次方程式を解くときに使うことができる．

2 節では重ね合わせの理について説明する．3 節でこの重ね合わせの理を用いて一つの連立 1 次方程式を解く．加減法を用いて解いた解と比べて，これが正しい解であることを確認する．4 節で重ね合わせの理を証明しよう．付録では加減法で解く．

2　重ね合わせの理

いま 3 元 1 次連立方程式

$$3x + y - z = b_1 \tag{2.1}$$

$$-x + y + z = b_2 \tag{2.2}$$

$$-x + y + 3z = b_3 \tag{2.3}$$

の重ね合わせの理による解法の手順を示す．ここで，b_1, b_2, b_3 はすべて定数とする．

1.　$b_2 = b_3 = 0$ のとき
2.　$b_1 = b_3 = 0$ のとき
3.　$b_1 = b_2 = 0$ のとき

の 3 つの場合に分けて，(2.1),(2.2),(2.3) を解く．

1．　$b_2 = b_3 = 0$ のとき，連立方程式は

$$3x + y - z = b_1 \tag{2.4}$$

$$-x + y + z = 0 \tag{2.5}$$

$$-x + y + 3z = 0 \tag{2.6}$$

---

[1] 元愛媛大学

[2] yanotad@earth.ocn.ne.jp

[3] 重ね合わせの理については [1] で知った．(2.1)-(2.3) の連立 1 次方程式の電気回路からの導出もそこに載っている．また [2] を参照せよ．重ね合わせの原理は英語では principle of superposition という．これは線形系には常に重ね合わせが原理的に成り立つからである．文献 2 では重ね合わせの理 (law of superposition) といい，重ね合わせの**原理**という語を使っていない．ちなみに文献 1 では重ね合わせの理の訳語として principle of superposition を用いている．

となる．このときの (2.4),(2.5),(2.6) の解を x_1, y_1, z_1 と表す.

２． $b_1 = b_3 = 0$ のとき，連立方程式は

$$3x + y - z = 0 \tag{2.7}$$
$$-x + y + z = b_2 \tag{2.8}$$
$$-x + y + 3z = 0 \tag{2.9}$$

となる．このときの (2.7),(2.8),(2.9) の解を x_2, y_2, z_2 と表す.

３． $b_1 = b_2 = 0$ のとき，連立方程式は

$$3x + y - z = 0 \tag{2.10}$$
$$-x + y + z = 0 \tag{2.11}$$
$$-x + y + 3z = b_3 \tag{2.12}$$

となる．このときの (2.10),(2.11),(2.12) の解を x_3, y_3, z_3 と表す.

以上，3 つの場合の解が求められれば，もとの連立方程式 (2.1),(2.2),(2.3) の解 x, y, z は

$$x = x_1 + x_2 + x_3 \tag{2.13}$$
$$y = y_1 + y_2 + y_3 \tag{2.14}$$
$$z = z_1 + z_2 + z_3 \tag{2.15}$$

で求めることができる．これを**重ね合わせの理**という．この重ね合わせの理が成り立つ理由は 4 節に述べる．3 節でこの原理を用いて連立方程式を解いてみよう.

3　連立方程式を解く

１） $b_2 = b_3 = 0$ のとき，(2.4),(2.5),(2.6) を解く.

(2.6)−(2.5) から

$$2z = 0$$
$$z = 0 \tag{3.1}$$

(2.4) に (3.1) を代入して

$$3x + y = b_1 \tag{2.4'}$$

(2.5) に (3.1) を代入して

$$-x + y = 0 \tag{2.5'}$$

(2.4')−(2.5') から

$$4x = b_1$$
$$x = \frac{b_1}{4} \tag{3.2}$$

(2.5') に (3.2) を代入して

$$y = \frac{b_1}{4} \tag{3.3}$$

したがって
$$(x_1,\ y_1,\ z_1) = \left(\frac{b_1}{4},\ \frac{b_1}{4},\ 0\right) \tag{3.4}$$
と求められる．

2） $b_1 = b_3 = 0$ のとき，(2.7),(2.8),(2.9) を解く．

(2.7)−(2.9) から
$$\begin{aligned} 4x - 4z &= 0 \\ x &= z \end{aligned} \tag{3.5}$$
(2.7) に (3.5) を代入して
$$2x + y = 0 \tag{2.7'}$$
(2.8) に (3.5) を代入して
$$y = b_2 \tag{3.6}$$
(2.9) に (3.5) を代入して
$$y + 2z = 0 \tag{2.9'}$$
(2.9') に (3.6) を代入して
$$\begin{aligned} 2z + b_2 &= 0 \\ z &= -\frac{b_2}{2} \end{aligned} \tag{3.7}$$
(3.5) に (3.7) を代入して
$$x = -\frac{b_2}{2} \tag{3.8}$$
したがって
$$(x_2,\ y_2,\ z_2) = \left(-\frac{b_2}{2},\ b_2,\ -\frac{b_2}{2}\right) \tag{3.9}$$
と求められる．

3） $b_1 = b_2 = 0$ のとき，(2.10),(2.11),(2.12) を解く．

(2.10)+(2.11) から
$$\begin{aligned} 2(x + y) &= 0 \\ x + y &= 0 \\ x &= -y \end{aligned} \tag{3.10}$$
(2.12)−(2.11) から
$$\begin{aligned} 2z &= b_3 \\ z &= \frac{b_3}{2} \end{aligned} \tag{3.11}$$
(2.11) に (3.10) を代入すれば
$$2y + z = 0 \tag{3.12}$$
(3.12) に (3.11) を代入すれば
$$\begin{aligned} 2y + \frac{b_3}{2} &= 0 \\ y &= -\frac{b_3}{4} \end{aligned} \tag{3.13}$$

(3.10) に (3.13) を代入すれば

$$x = \frac{b_3}{4} \tag{3.14}$$

したがって

$$(x_3,\ y_3,\ z_3) = \left(\frac{b_3}{4},\ -\frac{b_3}{4},\ \frac{b_3}{2}\right) \tag{3.15}$$

と求められる．

3 つの解 (3.4),(3.9),(3.15) から (2.1),(2.2),(2.3) の解は (2.13)−(2.15) によって

$$x = \frac{1}{4}(b_1 - 2b_2 + b_3) \tag{3.16}$$

$$y = \frac{1}{4}(b_1 + 4b_2 - b_3) \tag{3.17}$$

$$z = \frac{1}{2}(-b_2 + b_3) \tag{3.18}$$

と求められる．

この解を付録で述べる加減法によって解いた解 (6.6)−(6.8) と比べれば，一致しているので，この解法は正しいことが予想される．だが，この段階ではまだ重ね合わせの理は証明されたわけではない．

4　重ね合わせの理の証明

この節では与えられた連立 1 次方程式を用いて重ね合わせの理を証明しよう．

(2.1), (2.2), (2.3) をマトリックスを用いて表せば

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

となる．いま

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

と係数マトリックスを A と表せば，(4.1) は

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

と表される．いま $\det A \neq 0$ であるからマトリックス A の逆マトリックス A^{-1} が存在する．(4.3) を未知数 x，y，z について解けば

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ &= b_1 A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} b_1 A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.4}$$

いま

$$b_1 A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

$$b_2 A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

$$b_3 A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

と表せば,

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

$$A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

$$A \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = b_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

が得られる．これが 2 節で解くことを要請された 3 組の連立 1 次方程式であった．

したがって，(4.4) から (4.5)–(4.7) を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ y_1 + y_2 + y_3 \\ z_1 + z_2 + z_3 \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

で求める解が得られる．

これは重ね合わせの理が成り立つことを示している．

5　おわりに

連立 1 次方程式を重ね合わせの理で解くことができることを示した．もっともこれが手続きとして私たちが中学校の数学で学んで以来使って来た，連立 1 次方程式を解く普通の方法と比べて簡単かどうかとなると必ずしも簡単だというわけでもない．

そうだとするとこんな解法があるということは単なる知識にしかすぎなくて，実際上の利便性はあまりないのかもしれない．ただ原理的にこういう方法があるということを知っておくことは別にわるいことではなかろう．

6　付録　加減法による解

加減法で (2.1)-(2.3) を解いて，3 節で得た解が正しい解であることを確かめておこう．

まず (2.1)+(2.2) から

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= b_1 + b_2 \\ x + y &= \frac{1}{2}(b_1 + b_2) \end{aligned} \tag{6.1}$$

さらに (2.2)×(−3)+(2.3) から

$$\begin{aligned} 2x - 2y &= -3b_2 + b_3 \\ x - y &= \frac{1}{2}(-3b_2 + b_3) \end{aligned} \tag{6.2}$$

(6.1)+(6.2) から

$$\begin{aligned} 2x &= \frac{1}{2}(b_1 - 2b_2 + b_3), \\ x &= \frac{1}{4}(b_1 - 2b_2 + b_3) \end{aligned} \tag{6.3}$$

と x が求められる．

また (6.1)−(6.2) から

$$\begin{aligned} 2y &= \frac{1}{2}(b_1 + 4b_2 - b_3), \\ y &= \frac{1}{4}(b_1 + 4b_2 - b_3) \end{aligned} \tag{6.4}$$

と y が求められる．

最後に (2.2) から

$$z = b_2 + (x - y)$$

これに (6.2) を代入して

$$z = \frac{1}{2}(-b_2 + b_3) \tag{6.5}$$

と z が求められる．これで x，y，z が求められたから，(6.3), (6.4),(6.5) をまとめれば

$$x = \frac{1}{4}(b_1 - 2b_2 + b_3), \tag{6.6}$$

$$y = \frac{1}{4}(b_1 + 4b_2 - b_3), \tag{6.7}$$

$$z = \frac{1}{2}(-b_2 + b_3) \tag{6.8}$$

となる．これが加減法による解である．

(2015. 9. 17)

参考文献

[1] http://www004.upp.so-net.ne.jp/s_honma/equation/superposition.htm

[2] 平山　博,『電気回路論』（電気学会，1951）140-142

編集後記

5 巻 9 号と 5 巻 10 号を同時発行できることを喜んでいる．これも原稿を投稿して下さる方々のお蔭である．今号は原稿がないからどうしようとか考える必要がまったくないのは編集発行人としてはこんなに幸せに感じることはない．今後もつづけて投稿をお願いしたい．

用語について 5 巻 9 号の編集段階で考えさせられることがあったので，ここで述べておく．これは 5 巻 9 号の「平方完成と 2 次式」の英文タイトルをためらうことなく Completion of Square and Quadratic Form と書いておいたのだが,『数学入門辞典』（岩波書店）を調べたら，quadratic form は 2 次形式と訳されており，2 次形式は 2 次の同次多項式のことらしい．では 2 次式のことをなんというのか思いつかず途方にくれた．

辞書を引いたのだが，手持ちの英和辞典には 2 次方程式 quadratic equations とか 2 次関数 quadratic functions とかはすぐに出てくるが，単に 2 次式というのが出てこない．

困ったなと思って,『数・数式と図形の英語』（日興企画）の 2 次方程式の項を調べたら，2 次式という用語の訳として quadratic expressions があり，ああそうだった．式を英語では expression というのだったと思い出した．

この本の日本語の索引には 2 次式の項目がなかったので，まったく出ていないのかと思ったが，英語の索引の方には quadratic の項に quadratic expressions が載っていた．

その後，世戸憲治さんからこのタイトルに関して修正のご意見を頂いたので，それにしたがって「2 次式と平方完成」と言葉の順序を変えたので，英語も Quadratic Expressions and Completion of Square となった．

いつも世戸さんには『数学・物理通信』に載せる論文の体裁等について編集者にいろいろアドバイスを頂いている．彼はご自身の論文の投稿のみならず，すべてに配慮が行きわたっており，編集者として感謝をしている．

（矢野　忠）