数学・物理通信

5巻11号　　2015年12月

編集　新関章三・矢野　忠

2015年12月30日

目次(Contents)

$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi/2$ を理解する

矢野　忠 [1]

Understanding $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi/2$

Tadashi YANO [2]

1　はじめに

このエッセイはすでに愛数協の機関誌『研究と実践』に載せたものである [1]．ごく最近になってこのエッセイを補足したいと思う文献に出会った [2]．以前に書いた内容は修正する必要は感じなかったが，この文献にしたがって 6 節と付録 1–4 を追加して改定した．なお，この機会に他の部分も少し修正した．

私が大学で学んだ微分積分学の教科書 [3] の不定積分の公式が出ている p. 84 に

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x = -\cos^{-1} x,\quad (-1 \leq x \leq 1) \tag{1.1}$$

と書いてある．２つ目の等号以降の $-\cos^{-1} x$ は自筆で書き込んである．この式の最右辺の部分をいつ書き込んだのかはわからない．この本を教科書として使っていた当時の 1958 年から愛媛大学に勤務するようになってから間もない 1970 年くらいまでのことではないかと思われる．

この部分を書き込んだときにこの公式に違和感を覚えたのを記憶している．その違和感はどこから来ているのか定かではなかったが，多分 $\sin^{-1} x$ と $\cos^{-1} x$ との間にどのような関係があるか分かっていなかったためであろう．そのときには関数 $\sin^{-1} x$ と $\cos^{-1} x$ とで，とる主値がちがうということに関係しているのではないかと推測していたと思う．いつか調べて見なくてはと思いながら，手掛かりはなく，ごく最近までそのままになっていた．

2　Maclaurin 展開による導出

今年 (2003 年)6 月に量子力学の講義でトンネル効果を教えようと準備していたときに $\cos^{-1} x$ の Maclaurin 展開が必要になった．自分で $\cos^{-1} x$ の Maclaurin 展開を導くのが面倒だったので，手元にあった西村鷹明著『物理数学道具箱』 [4] を開いてみると p. 149 に

$$\begin{aligned}\cos^{-1} x &= \frac{\pi}{2} - x - \left(\frac{1}{2}\right)\frac{x^3}{3} - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)\frac{x^5}{5} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)\frac{x^7}{7} - \cdots \\ &= \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x \end{aligned} \tag{2.1}$$

が出ていた．これはまさに以前から知りたいと思っていた関係ではないか.

上に出てきた Maclaurin 展開の計算は西村氏の本の中に詳しく述べてあるので，それを確かめる計算をここではしないが，標題の関係を得るための一つの方法が分かった．

これで標題に掲げた関係式が得られたのだが，なんだかもう一つ十分でない気がする．それは結果が Maclaurin 展開で得られたという点である．もっと別の方法がないと十分に納得したとは言えそうにない．

[1] 元愛媛大学

[2] yanotad@earth.ocn.ne.jp

3　積分を用いた導出

そう思って吉田武著『オイラーの贈物』[5] を開いてみた．この本の pp. 192-193 に積分を用いてこの関係式が導出されていた．

この関係を得るにはつぎの 2 つの事実を用いる．まず，

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.1}$$

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.2}$$

この 2 式 (3.1) と (3.2) とを辺々加えれば，

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x + \cos^{-1}x) = 0 \tag{3.3}$$

したがって

$$\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = c \tag{3.4}$$

が得られる．いま，$\sin^{-1}0 = 0$,　$\cos^{-1}0 = \pi/2$ であることを用いて定数 c の値を決めれば，

$$\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2} \tag{3.5}$$

が得られる [3]．

もう忘れてしまっていたのだが，$\sin^{-1}x$ と $\cos^{-1}x$ との関係についてずいぶん以前から関心を抱いていたので，多分この導出法についてはすでに読んでいたと思う．でもそれにもかかわらずこの関係が分かったとは思わなかったらしい．

それはあまりにもこれが形式的な導出に思えたからではなかろうか．それがやっと，今回の Maclaurin 展開による方法で少し分かった気がして来るようになった．それでも，まだもう一つすっきりしない気がする．

4　初等的な導出

$\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ で $\theta_1 = \sin^{-1}x$,　$\theta_2 = \cos^{-1}x$ とおけば，$x = \sin\theta_1 = \cos\theta_2$ が得られ，これが確かに $\theta_2 = \pi/2 - \theta_1$ のときに成り立つことは，ちょっと高校で数学を学んだ人なら誰でもすぐ分かることであろう [4]．$\theta_2 = \pi/2 - \theta_1$ は $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ を意味しているのに，後者の表現ではちょっと物珍しく見えるのは何故なのだろうか．

そう思いながら，前掲の『物理数学道具箱』[4] を見ていると p. 172 に上の考えに沿った証明も与えられていた [5]．それをここで紹介しておこう．

$$\theta = \sin^{-1}x \tag{4.1}$$

とおくと

$$x = \sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \tag{4.2}$$

である．したがって

$$\frac{\pi}{2} - \theta = \cos^{-1}x \tag{4.3}$$

が得られる．ここで，$\theta = \sin^{-1}x$ を代入すれば，

$$\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2} \tag{3.5}$$

が得られる．これがこの関係の初等的でもっとも素直な導出法であろう．やっと分かったという気がして来た．

[3] ここで $\sin^{-1}x$,　$\cos^{-1}x$ は 5 節で述べる逆三角関数の主値をとっている．
[4] このことを直観的にわかるためには付録 1 と図 1 を参照せよ．
[5] [6] にも同じような導出がある．

5　複素解析的な導出

つづいて，複素解析的な標記の関係の導出を述べたいが，その前に「はじめに」のところでちょっと触れた三角関数の主値のことを考えてみよう．三角関数

$$y = \sin x, \tag{5.1}$$

$$y = \cos x, \tag{5.2}$$

$$y = \tan x \tag{5.3}$$

を考えたとき，ある x の値に対して y の値が 1 つ対応している．一般に与えられた独立変数 x の値に対し，一つの従属変数 y の値が定まるとき，y を x の関数という．三角関数についてはこの関数の定義になんらの問題も生じない．しかし，三角関数の逆関数を考えようとすれば，問題が起こってくる．それは y の値に対する x の値が無限に存在するという，関数の多価性が現れるからである．関数が多価関数であっても何の問題もないのかもしれないが，三角関数はもともと周期関数であるので，変数の変域をある領域に限って逆関数を 1 対 1 対応が成り立つようにすることができる．すなわち，

$$y = \sin x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \tag{5.4}$$

$$y = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi \tag{5.5}$$

$$y = \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \tag{5.6}$$

とそれぞれの関数に対して変数の変域を限定することをこれらの関数の主値をとるという．このとき，$\sin x$ と $\cos x$ とはもちろん $-1 \leq y \leq 1$ の間の値をとり，$\tan x$ は $-\infty < y < \infty$ の間の値をとる．つぎに (5.4)-(5.6) の逆関数を求めると

$$y = \sin^{-1} x, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \tag{5.7}$$

$$y = \cos^{-1} x, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \pi \tag{5.8}$$

$$y = \tan^{-1} x, \quad -\infty \leq x \leq \infty, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \tag{5.9}$$

が得られる．ここでは特に x の変域と y の値域に注意をしておきたい [6]．

さて本題に戻って高木貞治著『解析概論』 [7] にしたがって複素解析の観点から標題の関係を求めておこう．逆三角関数 $\sin^{-1} x$ と $\cos^{-1} x$ とについて上に述べた三角関数の主値をとれば，対数関数を用いて

$$\mathrm{Sin}^{-1} x = -i\mathrm{Log}(ix + \sqrt{1-x^2}), \tag{5.10}$$

$$\mathrm{Cos}^{-1} x = -i\mathrm{Log}(x + i\sqrt{1-x^2}) \tag{5.11}$$

と表せる [7]．ここで，$\mathrm{Sin}^{-1}x$, $\mathrm{Cos}^{-1}x, \mathrm{Log}x$ はすべて主値 をとることを表している [8]．これから

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sin}^{-1}x + \mathrm{Cos}^{-1}x &= -i\mathrm{Log}(ix + \sqrt{1-x^2})(x + i\sqrt{1-x^2}) \\
&= -i\mathrm{Log}\ i \\
&= -i\frac{\pi}{2}i \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned} \tag{5.12}$$

(5.12) で $\mathrm{Log}\ i$ は純虚数 i の偏角 $\arg\ i$ であるから，$\mathrm{Log}\ i = (\pi/2)i$ となることを用いた．このことは付録 3 の (10.5) に $z = i$ を代入し，また $\arg\ i = \pi/2$ であることを思い出せばわかる．

これで $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ の 4 つ目の導出法が得られた．

[6] (5.7)-(5.9) を得るために，まず (5.4)-(5.6) で $x \leftrightarrow y$ の置換を行った後に y について解く．

[7] このエッセイの初版を書いた 2003 年に [7] を読んで (5.10),(5.11) をどうやって導いたか知った．ところが 10 数年が経ってその導き方を忘れてしまっていた．付録 2 に要点を述べる．

[8] 対数関数の主値については付録 3 を参照せよ．

6　$\sin\,(\theta_1+\theta_2)=1$ を解く

この節では [2] にしたがった $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$ を求める 5 つ目の導出として，三角方程式 $\sin\,(\theta_1+\theta_2)=1$ を解く．

4 節ですでに述べたように

$$\sin^{-1}x=\theta_1, \tag{6.1}$$

$$\cos^{-1}x=\theta_2 \tag{6.2}$$

とおこう．このとき，もちろん

$$x=\sin\theta_1, \tag{6.3}$$

$$x=\cos\theta_2 \tag{6.4}$$

が成り立つ．したがって (6.1),(6.2) から

$$\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\theta_1+\theta_2 \tag{6.5}$$

と表される．ここで $\sin^{-1}x$ と $\cos^{-1}x$ の主値をとることにすれば，θ_1,θ_2 の定義域は

$$-\frac{\pi}{2}\le\theta_1\le\frac{\pi}{2}, \tag{6.6}$$

$$0\le\theta_2\le\pi \tag{6.7}$$

となる．

$\sin\theta_1,\cos\theta_2$ はすでに (6.3) と (6.4) で与えられているので，これから $\cos\theta_1,\sin\theta_2$ を求めることができれば，$\sin(\theta_1+\theta_2)$ の値が求められ，これから $\theta_1+\theta_2$ を求めることができる．

では，まず $\cos\theta_1$ を求めよう．

$$\begin{aligned}\cos^2\theta_1&=1-\sin^2\theta_1=1-x^2,\\ \cos\theta_1&=\pm\sqrt{1-x^2}\end{aligned} \tag{6.8}$$

である．θ_1 の変域は (6.6) であったから，この変域では $\cos\theta_1>0$ であるから

$$\cos\theta_1=\sqrt{1-x^2} \tag{6.9}$$

となる．

つぎに $\sin\theta_2$ を求めよう．

$$\begin{aligned}\sin^2\theta_2&=1-\cos^2\theta_2=1-x^2,\\ \sin\theta_2&=\pm\sqrt{1-x^2}\end{aligned} \tag{6.10}$$

である．θ_2 の変域は (6.7) であったから，この変域では $\sin\theta_2>0$ であるから

$$\sin\theta_2=\sqrt{1-x^2} \tag{6.11}$$

となる．

いま $\theta_1+\theta_2$ を求めたいから，まず $\sin\,(\theta_1+\theta_2)$ の値を求めよう．

$$\begin{aligned}\sin\,(\theta_1+\theta_2)&=\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2,\\ &=x^2+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2}\\ &=1\end{aligned}$$

したがって,

$$\sin\ (\theta_1 + \theta_2) = 1 \tag{6.12}$$

となる $\theta_1 + \theta_2$ を求めればよい．この三角方程式の一般解は

$$\theta_1 + \theta_2 = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \cdots \tag{6.13}$$

である．逆三角関数は主値をとるので

$$-\frac{\pi}{2} \leq \left[n + (-1)^n \frac{1}{2} \right] \pi \leq \frac{\pi}{2} \tag{6.14}$$

である n の値を求めれば，$\theta_1 + \theta_2$ の値が求められる [9]．そのために (6.14) のすべての辺に $\frac{2}{\pi}$ をかけて得られる不等式

$$-1 \leq 2n + (-1)^n \leq 1 \tag{6.15}$$

をみたす n の値を求めれば,

$$n = 0 \text{ または } n = 1 \tag{6.16}$$

が得られる [10]．$n = 0$ に対しても，$n = 1$ に対しても

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2} \tag{6.17}$$

が得られる．

いま $\sin(\theta_1 + \theta_2)$ の値を求め，三角方程式を解いたが，$\cos(\theta_1 + \theta_2)$ の値を求め，三角方程式を解いてもよい [11]．この場合にも同じ値が得られる．

7　おわりに

さて，標記の積分公式 (1.1) にもどれば，(1.1) は

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C_1, \tag{7.1}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^{-1} x + C_2 \tag{7.2}$$

と積分定数を書いてあるとの了解の下に積分定数が教科書の中で省略されていたのに，それを忘れてしまったために異様に感じたのだろう．

(7.1) と (7.2) の 2 つの積分公式から

$$\sin^{-1} x + C_1 = -\cos^{-1} x + C_2 \tag{7.3}$$

が成り立つ．すなわち,

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = C_2 - C_1 \tag{7.4}$$

であり，$C_2 - C_1 = \pi/2$ を求めればよかった．しかし，突っ込み不足のために，何十年にもわたってなんだか居心地の悪い思いをしてきた．いつもこんな調子で自分の理解の不十分さと突っ込みのなさが恥ずかしい．

(58 回目の広島原爆の日に，2003.8.6)（2015.12.10 改訂)

[9] [2] ではこの不等式の上限が $\pi/2$ ではなく，$3\pi/2$ となっている．$\sin(\theta_1 + \theta_2) = 1$ を解くときには解はたまたま解は同じであるが，黒田の与えた条件で $\cos(\theta_1 + \theta_2) = 0$ を解くと別の解も出てくるので誤りである．

[10] この一つの解法を付録 4 に示す．グラフを用いた別の解法は付録 6 に示す．

[11] 付録 5 にその解法を述べる．

8　付録　1　$x = \sin\theta_1 = \cos\theta_2$,　$\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ の図

図 1 に示したように MP = ON = x であり，これは円の半径 OP の長さを 1 にとっているので，直角三角形 △OPM の角 θ_1 の正弦関数 $x = \sin\theta_1$ に等しく，また直角三角形 △OPN の角 θ_2 の余弦関数 $x = \cos\theta_2$ に等しい．したがって $x = \sin\theta_1 = \cos\theta_2$ が成り立つことがわかる [12].

図に示されたように角 θ_1 と θ_2 とは互いに余角をなしており，$\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ が成り立つ．

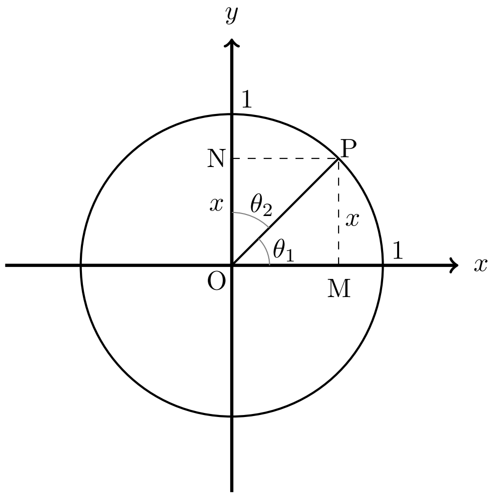


図 1: $x = \sin\theta_1 = \cos\theta_2$ の図

9　付録　2　(5.10), (5.11) の導出

まず

$$x = \sin\theta_1 = \frac{e^{i\theta_1} - e^{-i\theta_1}}{2i} \tag{6.3}$$

$e^{i\theta_1} = t$ とおけば，(6.3) から

$$2ix = t - \frac{1}{t},$$
$$t^2 - 2ixt - 1 = 0,$$
$$t = ix \pm \sqrt{1 - x^2},$$
$$e^{i\theta_1} = ix \pm \sqrt{1 - x^2} \tag{9.1}$$

$\sin^{-1} x$ を主値とすれば，

$$x = \sin\theta_1, \quad -\pi/2 \le \theta_1 \le \pi/2, \quad -1 \le x \le 1 \tag{9.2}$$

であるから，このとき $\cos\theta_1 = \sqrt{1 - x^2} \ge 0$ である．それで $\pm\sqrt{1 - x^2}$ から正の符号の $\sqrt{1 - x^2}$ を選ぶと (9.1) は

$$e^{i\theta_1} = ix + \sqrt{1 - x^2} \tag{9.3}$$

この両辺の対数をとれば，

$$i\theta_1 = \log(ix + \sqrt{1 - x^2}) \tag{9.4}$$

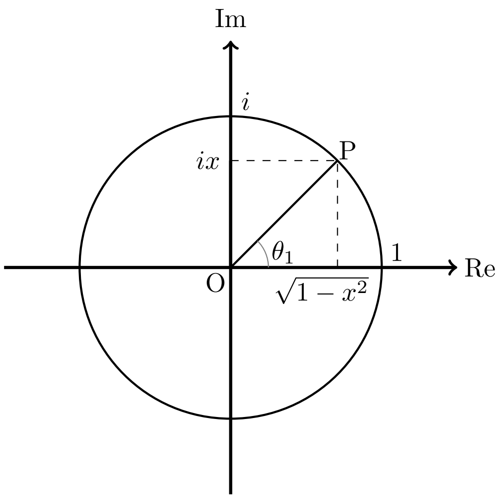


図 2: $\mathrm{e}^{i\theta_1}$ の図

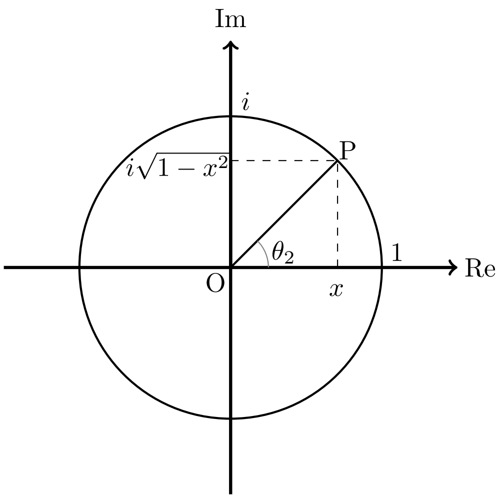


図 3: $\mathrm{e}^{i\theta_2}$ の図

が得られる．すなわち，(9.4) から（5.10）は直ちに導かれる．(9.3) を図 2 に示す．

同様に

$$x = \cos\theta_2 = \frac{\mathrm{e}^{i\theta_2} + \mathrm{e}^{-i\theta_2}}{2} \tag{6.4}$$

$\mathrm{e}^{i\theta_2} = t$ とおけば，(6.4) から

$$\begin{aligned} 2x &= t + \frac{1}{t}, \\ t^2 - 2xt + 1 = 0&, \\ t &= x \pm i\sqrt{1-x^2}, \\ \mathrm{e}^{i\theta_2} &= x \pm i\sqrt{1-x^2} \end{aligned} \tag{9.5}$$

$\cos^{-1} x$ を主値とすれば

$$x = \cos\theta_2, \quad 0 \le \theta_2 \le \pi, \quad 1 \ge x \ge -1 \tag{9.6}$$

このとき $\sin\theta_2 = \sqrt{1-x^2} \ge 0$ である．それで $\pm\sqrt{1-x^2}$ から正の符号の $\sqrt{1-x^2}$ を選ぶと (9.5) は

$$\mathrm{e}^{i\theta_2} = x + i\sqrt{1-x^2} \tag{9.7}$$

この両辺の対数をとれば，

$$i\theta_2 = \log(x + i\sqrt{1-x^2}) \tag{9.8}$$

が得られる．すなわち，(9.8) から（5.11）は直ちに導かれる．(9.7) を図 3 に示す．

10　付録　3　対数関数の主値

この付録の説明は [7] の p. 196 によっている．

対数関数の主値はつぎのように定めている．まず対数関数 log の定義を実数 x から複素数 z にまで拡張する．$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，$|z| = r$，$\arg z = \theta$ とおけば，

$$\log z = u + vi \tag{10.1}$$

[12]図 1，図 2 と図 3 を説明のために描くことを大槻俊明氏に示唆された．ここに同氏に感謝する．

は

$$z = \mathrm{e}^{u+vi} = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{10.2}$$

を意味する．Euler の公式を用いれば

$$\mathrm{e}^{u+vi} = \mathrm{e}^{u}(\cos v + i\sin v) \tag{10.3}$$

であるから，上の２つの式 (10.2) と (10.3) を比べて

$$\mathrm{e}^{u} = r, \quad v = \theta + 2n\pi, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{10.4}$$

が成り立つ． $u = \log r$ は一義的に定まるが，n が任意の整数であるから v は一義的には定まらない．したがって

$$\log z = u + vi = \log r + i(\theta + 2n\pi) = \log|z| + i\arg z \tag{10.5}$$

の虚数部は一義的には定まらず，$2\pi i$ の整数倍だけ異なる無数の値がある．そこで $-\pi < \arg z \leq \pi$ と制限すれば，$\log z$ の虚数部は $-i\pi$ と $i\pi$ との間の値をとり，一義的に定めることができる．これを log の主値といい，Log z と表す.

11　付録　4　$-1 \leq 2n + (-1)^n \leq 1$ の解

$$-1 \leq 2n + (-1)^n \leq 1 \tag{6.15}$$

を解くのはどうしたらいいか．一つの考えは $n =$ 偶数 と $n =$ 奇数 とに分けて解くことであろう．

まず,

$$(-1)^n = \begin{cases} 1, & n = \text{偶数} \\ -1, & n = \text{奇数} \end{cases} \tag{11.1}$$

であるから

１） $n =$ 偶数 のとき

$$\begin{aligned} -1 \leq 2n + 1 \leq 1 \\ -2 \leq 2n \leq 0 \\ -1 \leq n \leq 0 \end{aligned} \tag{11.2}$$

この不等式をみたす整数 n は $n = -1,\ n = 0$ であるが，n は偶数であるので，解は

$$n = 0 \tag{11.3}$$

となる．

２） $n =$ 奇数 のとき

$$\begin{aligned} -1 \leq 2n - 1 \leq 1 \\ 0 \leq 2n \leq 2 \\ 0 \leq n \leq 1 \end{aligned} \tag{11.4}$$

この不等式をみたす整数 n は $n=0,\ n=1$ であるが，n は奇数であるので，解は

$$n = 1 \tag{11.5}$$

となる．

１），２）の２つの場合をあわせれば，

$$n = 0 \ \ \text{または} \ \ n = 1 \tag{11.6}$$

グラフを用いた別の解法も考えることができる．蛇足ではあろうが，この解法を付録 6 に示した．

12 付録 5 $\cos\,(\theta_1+\theta_2)=0$ を解く

6 節では $\sin\,(\theta_1+\theta_2)=1$ を解いて，$\theta_1+\theta_2$ を求めたが，この代わりに $\cos\,(\theta_1+\theta_2)$ を求めて，$\theta_1+\theta_2$ を求めてもよい．

(6.3),(6.4) と (6.9),(6.11) とを用いれば

$$\begin{aligned}\cos\,(\theta_1+\theta_2) &= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 \\ &= x\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-x^2} \\ &= 0\end{aligned} \tag{12.1}$$

したがって

$$\cos\,(\theta_1+\theta_2) = 0 \tag{12.2}$$

となる $\theta_1+\theta_2$ を求めればよい．この三角方程式の一般解は

$$\theta_1+\theta_2 = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2},\ \ n = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \cdots \tag{12.3}$$

である．ところが $\cos^{-1} x$ の主値から

$$0 \le 2n\pi \pm \frac{\pi}{2} \le \pi \tag{12.4}$$

でなければならない．

１） $0 \le 2n\pi + \frac{\pi}{2} \le \pi$ のとき

$$0 \le \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi \le \pi \tag{12.5}$$

に $\frac{2}{\pi}$ をかければ

$$\begin{aligned} 0 \le 4n+1 &\le 2, \\ -1 \le 4n &\le 1, \\ -\frac{1}{4} \le n &\le \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる．この不等式をみたす整数 n の値は

$$n = 0 \tag{12.6}$$

である．

２） $0 \le 2n\pi - \frac{\pi}{2} \le \pi$ のとき

$$0 \le \left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi \le \pi \tag{12.7}$$

に $\frac{2}{\pi}$ をかければ

$$\begin{aligned}0 \leq 4n-1 &\leq 2,\\ 1 \leq 4n &\leq 3,\\ \frac{1}{4} \leq n &\leq \frac{3}{4}\end{aligned}$$

となる．この不等式をみたす整数 n の値は存在しない．

1），2）から $n=0$ であるから

$$2n\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \tag{12.8}$$

すなわち

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2} \tag{12.9}$$

と求められる．

13 付録 6 グラフによる $-1 \leq 2n+(-1)^n \leq 1$ の解

この付録 6 では $-1 \leq 2n+(-1)^n \leq 1$ のグラフによる解を示そう．これは整数 n の値 $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ をとってそれらの値に対する $2n+(-1)^n$ をグラフ上にプロットして $-1 \leq 2n+(-1)^n \leq 1$ の不等式の条件をみたすものをグラフ上から求めればよい．

図 4 に $m=2n+(-1)^n$ を n の値に対して入れた黒丸で示された格子点が計算された (n,m) の点である．$-1 \leq m \leq 1$（二つの点線の間に挟まれた領域）をみたす n の値はグラフから $n=0$ と $n=1$ のときだけである．それ以外の n の値は条件をみたさない．

(2015. 12. 24)

参考文献

[1] 矢野　忠，研究と実践（愛数協），No.84 (2003.12) 1-5，『数学散歩』（国土社，2005）87-92 に再録

[2] 黒田　孝郎，三角法,『新初等数学講座』（ダイアモンド社，1962）66-67

[3] 矢野健太郎,『微分積分学』（裳華房, 1956）84

[4] 西村鷹明,『物理数学道具箱』(講談社サイエンティフィック, 2002）142, 172

[5] 吉田　武,『オイラーの贈物』（海鳴社, 1993）192-193

[6] 辻　正次，平野智治,『新三角法』（共立出版，1959）32-33

[7] 高木貞治,『解析概論』改訂第 3 版　軽装版（岩波書店, 1983 年）196-198

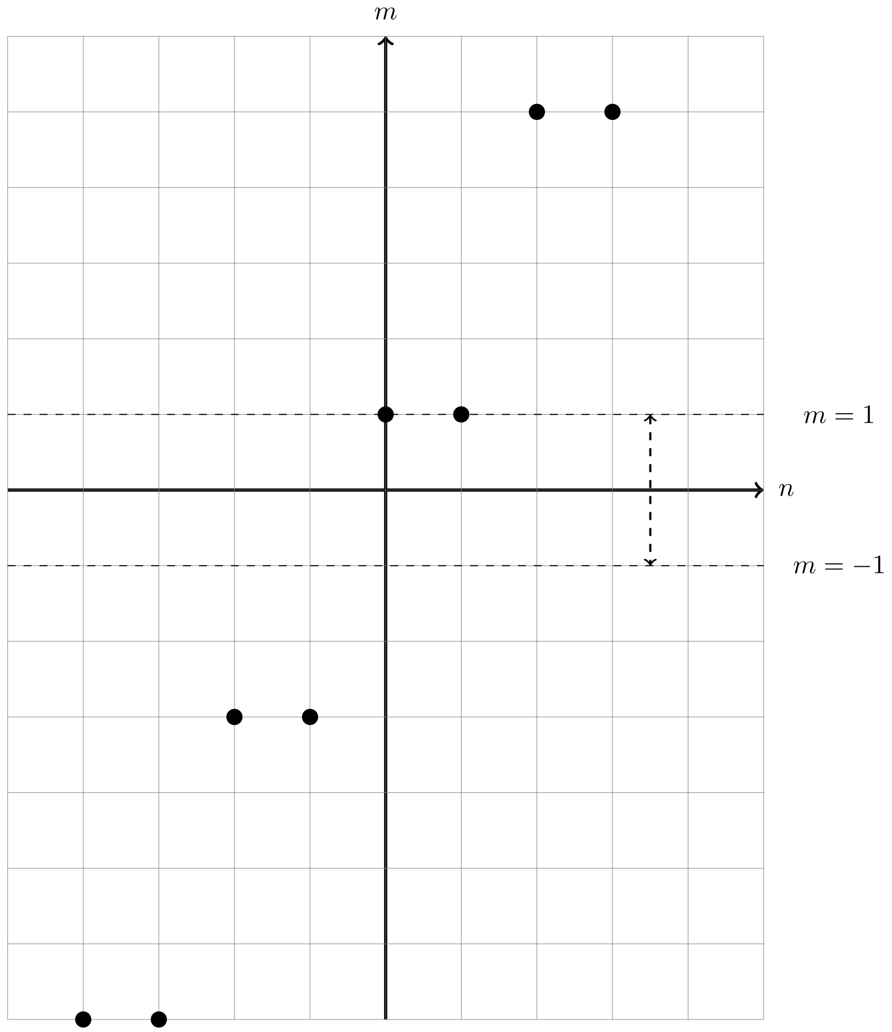


図 4: グラフによる解

$\cos x$ と $\sin x$ を $\tan\frac{x}{2}$ で表す

矢野　忠 [1]

Expressing $\cos x$ and $\sin x$ in terms of $\tan\frac{x}{2}$

Tadashi Yano [2]

1　はじめに

このエッセイは前に愛数協の機関誌『研究と実践』に掲載されたものである [1]．この『研究と実践』の読者は多くは小学校の先生方であり，その読者数も多くない．それでより広くの読者が期待できる『数学・物理通信』に投稿することとした．5 節のグラフによる説明で $\cos x$ と $\sin x$ を $\tan\frac{x}{2}$ で表すわけが直観的にわかればいいと思う．また 6 節と付録 2, 3 を今回新たに追加した．

$\tan\frac{x}{2} = t$ とおけば, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ と表されることはよく知られている．$\cos x$ と $\sin x$ の有理関数 $R(\cos x, \sin x)$ を積分するときに, この置き換えと $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$ を用いて

$$\int R(\cos x, \sin x)dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt \tag{1.1}$$

とすれば, 計算は面倒になるかもしれないが, 必ず積分できると微積分の本に出ている [3]．

ところで, この $\cos x$ と $\sin x$ の置き換え

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \tag{1.2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \tag{1.3}$$

をどうやって導くのだろうか．いつか自分でもその導出はやってみたことがあり, そのノートも保存しているのでファイルの中を探せば, 私の導出法はわかるであろう [4]．その導出をしたときに他にどんな導出があるのかなと思ったのが, このエッセイを書くそもそもの動機である．しかし, インターネットで最近購入した矢野健太郎氏の著書『図形と式』 [2] にこの関係のエレガントな導出をみたのが, 直接の動機となっている．

2　矢野健太郎の導出法

このエッセイを書く直接の動機となった矢野健太郎先生の著書 [2] の導出法から見てみよう．この方法はなかなかエレガントでこの導出法を覚えたら,

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

の式を一生忘れないだろう．まずよく知られた恒等式

$$\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} = 1 \tag{2.1}$$

[1]元愛媛大学

[2]yanotad@earth.ocn.ne.jp

[3]$dx = \frac{2}{1+t^2}dt$ の導出は付録 1 で行う．

[4]このエッセイの前回の再訂にとき私の導出法はあまりにも冗長だったから削除した．

を思い出し, また倍角の公式を用いれば,

$$
\begin{aligned}
\cos x &= \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} \\
&= \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} \\
&= \frac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} \\
&= \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin x &= 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} \\
&= \frac{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} \\
&= \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} \\
&= \frac{2t}{1 + t^2} \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

が得られる [5]．$\cos x$ と $\sin x$ の倍角公式の右辺を分母 1 の分数式とみなすところが難しいが, それさえ思いつけばこんなに自然な導出法はない [6].

3　藤森良夫の導出法

昔, 受験数学で一世を風靡した「考え方」で有名な藤森良夫先生はどのように問題にしている式を導いているのだろうか．そう思って『解析の基礎』(続編) [3] を取り出して調べてみたら,

$$
\begin{aligned}
\cos x &= \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} \\
&= \cos^2\frac{x}{2}\left(1 - \tan^2\frac{x}{2}\right) \\
&= \frac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} \\
&= \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad (3.1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin x &= 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} \\
&= 2\cos^2\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2} \\
&= \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} \\
&= \frac{2t}{1 + t^2} \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

と導かれている [7]．ここで，もちろろん

$$
\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{1 + t^2} \qquad (3.3)
$$

[5] このエッセイでは角 $x/2$ が基本の角となっている．だから角 x は $x/2$ の倍角である．
[6] 標題のテーマとは直接に関係がないが，(2.2) との関連で半角の公式の導出法を付録 3 に述べる．
[7] [4] も [3] と同じ導出法である．

を用いている．ここで求めた方法は $\cos x, \sin x$ の倍角の公式の右辺で $\cos^2\frac{x}{2}$ の因子をくくり出せば, これが求める関係の分母になっており, 残りの因子が分子になっている．これはさすがに「考え方」を主導していた人にふさわしい導出法であって，これなら誰にでも考えつくことができそうである．

4　黒須康之介の導出法

岩波全書の中にある黒須康之介先生の『三角法』 [5] によれば,

$$\begin{aligned}
\cos x &= \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} \\
&= \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} \\
&= \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \\
&= \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin x &= 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} \\
&= 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} \\
&= \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \\
&= \frac{2t}{1+t^2} \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

と導かれている [8]．第 2, 3 節の 2 つの導出法の折衷した導出法である．ちなみに, 黒須先生は矢野健太郎先生が旧制東京高校生であった当時の数学の先生の一人である．

5　安藤・山野の導出法

現代数学社発行の『大道を行く高校数学』解析編 [7] によれば，藤森の導出法と同じ導出法に加えて，別の観点からの導出法が出ている．もっともこれは安藤さんたちの独創ではなくて，もっと古い起源があるらしい [8] [9]．また，これらの文献は直接的に $\sin\theta, \cos\theta$ と $\tan(\theta/2)$ の関係を述べたものではない．

図 1 からわかるように $\angle\mathrm{AOP} = \theta$ とすれば，$\angle\mathrm{OBP} = \theta/2$ である．点 P の座標を (x, y) として，点 B の座標は $(-1, 0)$ ととる．また直線 BP と y 軸との交点を T とし，$\mathrm{OT} = t$ とする．

半径 1 の円であるから，円の方程式は

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad (5.1)$$

であり，直線 BP の方程式は

$$y = t(x+1) \qquad (5.2)$$

中心角 θ を用いれば，点 $\mathrm{P}(x, y)$ の x, y は

$$x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta \qquad (5.3)$$

と表される．また t は

$$t = \tan\frac{\theta}{2} \qquad (5.4)$$

[8] [6] も [5] と同じ導出法である．

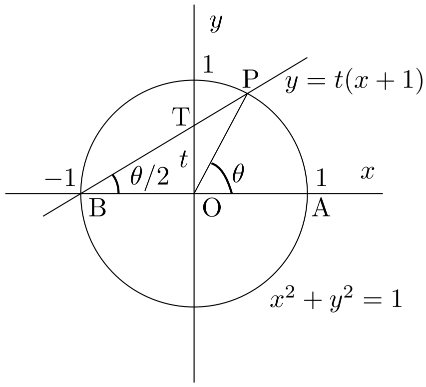


図 1: $\cos\theta, \sin\theta$ と $\tan(\theta/2)$ との関係

と表される [9].

(5.1),(5.2) の $x=-1, y=0$ でない解を求めれば x, y が t で表される．(5.2) を (5.1) に代入すれば

$$x^2+t^2(x+1)^2=1$$

この方程式は $x+1$ という因子をもつから

$$(x+1)[(1+t^2)x-(1-t^2)]=0$$

と因数分解できる．いま $x \neq -1$ とすれば

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{5.5}$$

と求められる．したがって

$$\begin{aligned} y &= t(x+1) \\ &= \frac{2t}{1+t^2} \end{aligned} \tag{5.6}$$

が得られる．

(5.5),(5.6) が求めるべき式 (1.2),(1.3) である．

一松先生の説明 [11] も，この導出法と同一と考えてもいいだろう．ただ，図が $-\pi/2$ だけ回転された図がそこには描かれているが，文章による説明はあたえられていない．

6 秋山 仁の導出法

最後に秋山　仁先生の導出を述べておこう [12].

秋山先生は tan の倍角の公式から出発する．$\tan\frac{\theta}{2}=t$ とおけば

$$\tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2t}{1-t^2} \tag{6.1}$$

である．この関係から図 2 のように直角三角形の底辺と高さがわかる．角 θ は図の角である．このときに三角形の斜辺の長さがわかれば，$\cos\theta$,　$\sin\theta$ が求められる。

[9] [10] も [7] と同じ導出法である．ただ細かな計算のしかたは異なる．付録 2 を参照せよ．

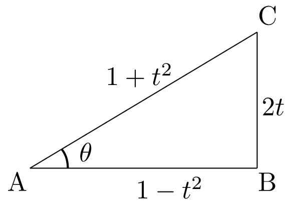


図 2: 直角三角形の辺の長さ

斜辺の長さ AC はピタゴラスの定理によって

$$\begin{aligned} \mathrm{AC} &= \sqrt{(1-t^2)^2+(2t)^2} \\ &= \sqrt{t^4+2t^2+1} \\ &= \sqrt{(t^2+1)^2} \\ &= 1+t^2 \end{aligned} \tag{6.2}$$

である．したがって，図 2 から

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{6.3}$$

$$\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2} \tag{6.4}$$

が得られる．

7　おわりに

このエッセイでは $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ および $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ のいくつかの導出法を説明した．これぐらい簡単なことについてわざわざエッセイを書くことはないのかもしれないが, 微積分を現在学んでいる学生にとって導き方の良し悪しを考える余裕などないであろう．だからそれについてエッセイを書くこともそれなりに意義があるかもしれない．

そもそも $\cos x$, $\sin x$ を $\tan(x/2)$ で表すことをどのようにして考えついたのだろうという根本的な疑問は 5 節のグラフによる説明ではっきりしたと思う．

8　付録 1　$dx = \frac{2}{1+t^2}dt$ の導出

蛇足であろうが, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$ を導出しておこう．$\tan\frac{x}{2} = t$ とおけば,

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}\tan\frac{x}{2} \tag{8.1}$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right) \tag{8.2}$$

ここで, 商の導関数

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2} \tag{8.3}$$

を用いれば,

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{1}{2}\cos^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} \tag{8.4}$$

$$= \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} \tag{8.5}$$

$$= \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{2} \tag{8.6}$$

したがって,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dx}} = \frac{2}{1+t^2} \tag{8.7}$$

となり,

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt \tag{8.8}$$

が導かれた.

9　付録 2　ラングの計算

ラング [10] の計算を見ておこう．5 節に示した図 1 と同じ図を用いているが，計算は少しだけちがっている．図 1 で $x \neq -1$ のとき，直線 BP の傾きを t とすれば

$$t = \frac{y}{x+1} \tag{9.1}$$

である．この傾き t は図 1 からすぐわかるように $t = \tan(\theta/2)$ である．(9.1) から

$$y = t(x+1) \tag{9.2}$$

$$y^2 = t^2(x+1)^2 \tag{9.3}$$

が成り立つ．半径 1 の円の方程式は

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{9.4}$$

であるから

$$y^2 = 1 - x^2 = (1+x)(1-x) \tag{9.5}$$

となる．

したがって，(9.3) と (9.5) の y^2 の式を等しいとおいて共通な因数 $1+x$ でわれば,

$$1 - x = t^2(1+x) \tag{9.6}$$

が得られる．これを x について解けば,

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{9.7}$$

が得られ，さらにこれを (9.2) に代入すれば

$$y = \frac{2t}{1+t^2} \tag{9.8}$$

が得られる.

10　付録 3　半角公式の導出法

この付録 3 では三角関数の半角公式の一つの導出法を述べる．

加法定理

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y \tag{10.1}$$

で $x=y$ とおけば，$\cos 0=1$ であるから

$$1=\cos^2 x+\sin^2 x \tag{10.2}$$

が得られる．これはよく知られた恒等式である．加法定理

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y, \tag{10.3}$$

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y \tag{10.4}$$

で $x=y$ とおけば,

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x, \tag{10.5}$$

$$\sin 2x=2\sin x\cos x \tag{10.6}$$

が得られる。(10.5),(10.6) から正接関数 tan についての倍角公式

$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \tag{10.7}$$

が直ちに得られる．(10.5),(10.6),(10.7) は三角関数の倍角公式である．

(10.2)+(10.5) から

$$1+\cos 2x=2\cos^2 x \tag{10.8}$$

が得られ，また (10.2)−(10.5) から

$$1-\cos 2x=2\sin^2 x \tag{10.9}$$

が得られる．また (10.8),(10.9) から

$$\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}=\tan^2 x \tag{10.10}$$

も得られる．(10.8),(10.9),(10.10) で

$$x\to\frac{x}{2}$$

とおきかえれば，半角公式

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}, \tag{10.11}$$

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}, \tag{10.12}$$

$$\tan^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x} \tag{10.13}$$

が得られる [10]．

大多数の文献では

$$\cos 2x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x \tag{10.14}$$

を $\cos^2 x$ または $\sin^2 x$ について解いて半角公式が得られる．

(2005.12.15)(2014.10.17 改訂)(2015.12.29 三訂)

[10] この半角公式の導出法は [13], [14] に述べられている．

参考文献

[1] 矢野　忠，研究と実践（愛数協），第 94 号 (2007.6) 16-21，第 116 号 (2011.11) 9-13

[2] 矢野健太郎,『図形と式』（講談社, 1979）84

[3] 藤森良夫, 『解析の基礎』続編（考え方研究社, 1954）759

[4] 辻　正次，平野智治,『新三角法』（共立全書，1959）47

[5] 黒須康之助,『三角法』（岩波全書, 1955）69

[6] 中村芳彦,『三角法』（培風館, 1957）65-66

[7] 安藤洋美，山野　熙,『大道を行く高校数学』解析編（現代数学社，2001）107-108

[8] 松坂和夫,『数学読本』2（岩波書店，1989）285-291

[9] F. Klein, *Elementary Mathmatics from an Advanced Standpoint: Arithmetic, Algebra, Analysis* (Dover, 2004) 44-46

[10] S. ラング（松坂和夫，片山孝次 訳）『解析入門』（原書第 3 版）（岩波書店，1978）156-157

[11] 一松信,『解析学序説』上（新版）（裳華房, 1981）93

[12] 秋山　仁,『数学の計算回避のしかた』（森北出版，2914）64

[13] 藤森良夫, 『解析の基礎』続編（考え方研究社, 1954）667

[14] S. ラング（松坂和夫，片山孝次 訳）『解析入門』（原書第 3 版）（岩波書店，1978）268

三角形の数

矢野　忠 [1]

Number of Regular Triangles

Tadashi YANO [2]

1　はじめに

このエッセイはすでに愛数協の機関誌『研究と実践』に投稿したものである．その後いくつかのミスプリントを見つけたので，それらを修正して『数学・物理通信』に掲載する．

『研究と実践』に私が数学エッセイ「家中でクイズを $\cdots$」を書いたのは第 16 号 (1984.10) であり，そのテーマは三角形の数を数えることであった [1].

2013 年 4 月に学習会に出たら，H. Y. 先生が定年後に週 3 回小学校に勤務している状況の話の中で，三角形の数を数えたり，正方形の数を数えたりした算数の授業をされたという．

三角形の数の総和を数えることに関しては，すでに『研究と実践』にエッセイを書いたことを話して，そのときの経験の一部をそのときに述べた．三角形の数を数えることに関しては，このおよそ 30 年前のエッセイにつけ加えることはほとんどない．

しかし，三角形が n 段に積み重ねられたとき三角形の総数を表す式を故矢野　寛先生が親切にも

$$\frac{1}{8}n(n+2)(2n+1)+\frac{1}{16}[(-1)^n-1] \tag{1.1}$$

と表されることをコメントして下さったが，それがどうやって導かれたか考えたことがなかった．

ところが 2 年前にインターネットを調べたところ，この三角形の総数を与える式の導出を述べたサイトがあった [2][3]．それを参考にしながら，約 30 年前の矢野先生の推論を追ってみたい [4].

2　５段の正三角形の総数を数える

小手調べとしてつぎのような問題を考えよう．

（問題）図 1 のように，１辺 1 の正三角形が 5 段に並べられている [5]．この図 1 の中に正三角形は大小合わせていくつあるか.

（解答）その数え方を見てみよう．１辺 1 の正三角形の面積を S とおく．いま記号として N_{pS} を面積 pS の三角形の数と定義すると

$$\begin{aligned} N_S &= 25 \\ N_{4S} &= 13 \\ N_{9S} &= \ 6 \\ N_{16S} &= \ 3 \\ N_{25S} &= \ 1 \end{aligned}$$

[1] yanotad@earth.ocn.ne.jp

[2] yanotad@earth.ocn.ne.jp

[3] このサイトの表示には多くのミスプリントがある．しかし，根本的には正しい．式の入力の段階で省力のために前の部分をコピーをしたためにミスプリントが出たのであろう．

[4] 本文ではできるだけ本質が明らかになるように述べた．具体的な計算はすべて付録に述べている．

[5] 図 1, 2 は自著 [1] からとった．

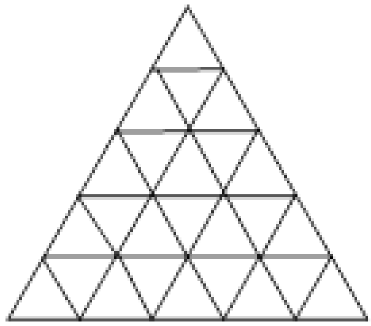


図 1: 5 段積の三角形

したがって，求める正三角形の個数は

$$25 + 13 + 6 + 3 + 1 = 48 \text{　個}$$

ここで大小さまざまな三角形の総数を 5 段の三角形では数えることができたが，それを n 段の三角形に一般化することは難しい．もうちょっと立ち入って数え方を考えてみよう．

3　倒置の正三角形の数

図 2 を見てほしい [6]．正三角形の底辺が下にあるものを**正置の三角形**，底辺が上にある三角形を**倒置の三角形**ということにしよう．この正置の三角形の数と倒置の三角形の数は明らかに規則性があることは図 2 の表の中の式を考えたら明白に見てとれる．ただ正置の三角形の総数は段数 n が奇数であっても，偶数であってもその規則性に差はまったくない．しかし，倒置の三角形の方はその規則性が段数 n が奇数か偶数かで少し異なっている．

それは図 2 の表の右の 3 つの欄を見れば，三角形の段数 n が偶数のときは一番最後の欄に数 1 があるが，n が奇数のときには数 1 がない．これが大小とりまぜて可能な大きさの正三角形を数を数えるときの注意点である．

倒置三角形の数の規則性を見つけるために段数 n が $n = 1$ からその数が表からどうなっているかを見て行こう．このとき表の中に 1 から n までの整数の和が出てくるので，それを記号として導入しておこう．すなわち

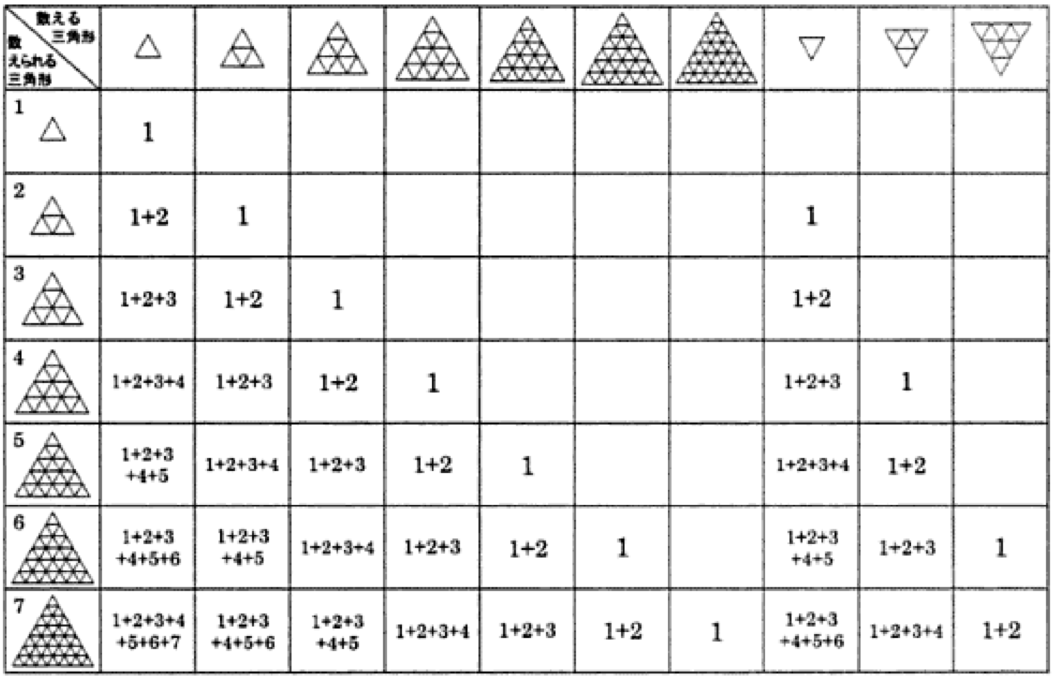
$$A(0) := 0 \tag{3.1}$$

$$A(n) := 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n \tag{3.2}$$

とする [7]．ここで n は自然数である．また例外的に $n = 0$ のときの $A(0) := 0$ を定義している．

[6] 図 1, 2 は自著 [1] からとった．

[7] := はあまり見慣れない記号だが，最近よく使われる記号で右辺の式で $A(n)$ を定義するという記号である．いまでも幾何学における合同という意味ではなく，数式の定義というつもりで ≡ を使うこともあるが，だんだん := を使う人が増えて来ている．これは数式処理ソフト Mathmatica の影響もあるのであろう．



数える三角形 / 数えられる三角形										
1	1									
2	1+2	1						1		
3	1+2+3	1+2	1					1+2		
4	1+2+3+4	1+2+3	1+2	1				1+2+3	1	
5	1+2+3 +4+5	1+2+3+4	1+2+3	1+2	1			1+2+3+4	1+2	
6	1+2+3 +4+5+6	1+2+3 +4+5	1+2+3+4	1+2+3	1+2	1		1+2+3 +4+5	1+2+3	1
7	1+2+3+4 +5+6+7	1+2+3 +4+5+6	1+2+3 +4+5	1+2+3+4	1+2+3	1+2	1	1+2+3 +4+5+6	1+2+3+4	1+2

図 2: 三角形の数の表

図 2 の表からわかるように倒置三角形の数は

$$
\begin{aligned}
n &= 1 : A(0) \\
n &= 2 : A(1) \\
n &= 3 : A(2) \\
n &= 4 : A(1) + A(3) \\
n &= 5 : A(2) + A(4) \\
n &= 6 : A(1) + A(3) + A(5) \\
n &= 7 : A(2) + A(4) + A(6)
\end{aligned}
$$

これくらい n が小さい値の例を調べてみれば，後はこれを一般化することはそれほど難しくない．また，この図 2 の表には載っていないけれども

$$
\begin{aligned}
n &= 8 : A(1) + A(3) + A(5) + A(7) \\
n &= 9 : A(2) + A(4) + A(6) + A(8)
\end{aligned}
$$

となるであろう．以下同様である．これらの結果をよく見れば段数 n が偶数か奇数かにしたがって和を表す式は変わってくることがわかる．

このことから，2 段積（すなわち $n \geq 2$）以上の一般の n 段積の三角形について倒置の正三角形の個数を考えるときには段数 n が偶数か奇数かに分けて考える必要がある．

まず段数 n が偶数 $(n = 2m, m:$ 自然数$)$ のときを考えよう．図 2 の表から $n = 2, 4, 6, 8$ について

$$
\begin{aligned}
n &= 2 : A(1) \\
n &= 4 : A(1) + A(3) \\
n &= 6 : A(1) + A(3) + A(5) \\
n &= 8 : A(1) + A(3) + A(5) + A(7)
\end{aligned}
$$

であるから，一般の偶数 n 段の倒置の三角形の数を N_i^e と表せば，

$$
\begin{aligned}
N_i^e &= A(1) + A(3) + A(5) + \cdots + A(n-1) \\
&= \sum_{k=1}^{m} A(2k-1) \\
&= \sum_{k=1}^{m} k(2k-1) \\
&= \frac{m(m+1)(4m-1)}{6} \\
&= \frac{n(n+2)(2n-1)}{24}
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

と求められる[8]．ここで，m は $\frac{n}{2}$ を越えない自然数である．

つぎに段数 n が奇数 $(n = 2m+1, m:$ 自然数$)$ のときを考えよう．やはり図 2 の表から $n = 1, 3, 5, 7$ について

$$
\begin{aligned}
n &= 1 : A(0) \\
n &= 3 : A(2) \\
n &= 5 : A(2) + A(4) \\
n &= 7 : A(2) + A(4) + A(6) \\
n &= 9 : A(2) + A(4) + A(6) + A(8)
\end{aligned}
$$

であるから，一般の奇数 n 段の倒置の三角形の数を N_i^o と表せば，

$$
\begin{aligned}
N_i^o &= A(2) + A(4) + A(6) + \cdots A(n-1) \\
&= \sum_{k=1}^{m} A(2k) \\
&= \sum_{k=1}^{m} k(2k+1) \\
&= \frac{m(m+1)(4m+5)}{6} \\
&= \frac{(n-1)(n+1)(2n+3)}{24}
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

と求められる[9]．ここで，m は $\frac{n-1}{2}$ を越えない自然数である．

以上で n が偶数と奇数のときの大小とりまぜた倒置の三角形の数は式に表された．

---

[8] この和を求める計算は難しいものではないが，付録 1 に少し詳細に述べる．

[9] この和を求める計算も付録 2 に述べる．

4　正置の正三角形の数

前節であまり数式に表すのに問題がないと述べた正置の三角形の数がどのように数式で表されるだろうか．

この場合も図 2 の表にしたがって $n=1$ から $n=7$ までの数をまず調べてみよう．図 2 の表からわかるように正置三角形の数は

$$\begin{aligned}
&n=1: A(1) \\
&n=2: A(1)+A(2) \\
&n=3: A(1)+A(2)+A(3) \\
&n=4: A(1)+A(2)+A(3)+A(4) \\
&n=5: A(1)+A(2)+A(3)+A(4)+A(5) \\
&n=6: A(1)+A(2)+A(3)+A(4)+A(5)+A(6) \\
&n=7: A(1)+A(2)+A(3)+A(4)+A(5)+A(6)+A(7)
\end{aligned}$$

以上から，一般の n 段の三角形において，正置の正三角形の個数は段数 n が偶数か奇数かにはよらず同じ形の式で表される．求める正置の三角形の総数を N_r と表せば

$$\begin{aligned}
N_r &= A(1)+A(2)+\cdots+A(n-1)+A(n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} A(k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

と求められる [10].

5　正三角形の総数

さて，これから大小とりまぜた正置と倒置の正三角形の数の和を表す式を求めよう．

n が偶数と奇数の場合の三角形の数の和を別々に求めておいて，最後にこの二つをまとめて表すことを考えよう．

まず n が偶数のとき，正三角形の数の和を N は

$$\begin{aligned}
N &= N_r + N_i^e \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) + \frac{1}{24}n(n+2)(2n-1) \\
&= \frac{1}{8}[2n^3+5n^2+2n] \qquad (5.1) \\
&= \frac{1}{8}n(n+2)(2n+1) \qquad (5.2)
\end{aligned}$$

と求められる．

[10] この和の計算も付録 3 に示しておく．

つぎに n が奇数のとき，正三角形の和を N は

$$\begin{aligned}
N &= N_r + N_i^o \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) + \frac{1}{24}(n-1)(n+1)(2n+3) \\
&= \frac{1}{8}(n+1)(2n^2+3n-1) \qquad (5.3) \\
&= \frac{1}{8}(2n^3+5n^2+2n-1) \qquad (5.4) \\
&= \frac{1}{8}n(n+2)(2n+1) - \frac{1}{8} \qquad (5.5)
\end{aligned}$$

となる．

奇数の場合の正三角形の数の和は偶数の場合と比べて $-\frac{1}{8}$ という項が付加されることだけが違っている．

すなわち，付加項は n が偶数なら 0 となり，奇数ならば $-\frac{1}{8}$ となるように一般的な付加項を決めればよい．そのような付加項は

$$\frac{1}{16}[(-1)^n - 1] \qquad (5.6)$$

と表せる [11]．

したがって，1 辺 n の正三角形において，大小合わせた正三角形の数の和は

$$\frac{1}{8}n(n+2)(2n+1) + \frac{1}{16}[(-1)^n - 1] \qquad (1.1)$$

と表される．

6 おわりに

約 30 年前に矢野　寛先生が示してくださった，一般的な n 段の正三角形の大小とりまぜた正三角形の数の和を表す式がどのようにして導かれたかが解明された．

私がどうしてこの式を導出しなかったのかはわからない．[1] の『数学散歩』収録のときの付記には「私はどうしたものか式で表すことなど考えもしなかった」と書いた．図 2 の表にすべての手がかりがあったのに．

それで矢野先生も蛇足としてつぎのようなコメントを下さったのであろう．

> **[蛇足]**　このように見事に規則がわかってしまったところに，式などはヤボだとは思うが，この規則にしたがって計算すると，n 段のときの総数は
>
> $$\frac{1}{8}n(n+2)(2n+1) + \frac{1}{16}[(-1)^n - 1]$$
>
> となる．

現象や結果を数式で表すことが難しかったり，または数式が表すものごとの実体を理解することが難しかったりすることは事実である．しかし，式で表すことがヤボなことはない．もっとも数式の中にものごとの実体や本質があるわけではないと考えている．

そのことはともかくとして，先生が式を与えて下さったおかげであれから約 30 年後ではあるが，やっと式の導出の道筋を解明することができた．

泉下で先生は私のものわかりの悪さに苦笑されていることだろう．

[謝辞] 旧著から図 1 と図 2 を取り込むために愛媛大学准教授の和田　武氏（愛媛大学メディアセンター）のご尽力をお願いした．ここに同氏に深く感謝をいたします．

(2015.12.17)

[11] この付加項の求め方を付録 5 に述べる．

7　付録１　倒置三角形の数（偶数段）

付録 1 では n が偶数のときの倒置三角形の数を求める式の計算を示す．$n = 2m$ とおいて n の和を m の和で表せば

$$\begin{aligned} N_i^e &= \sum_{k=1}^{m} k(2k-1) \\ &= 2\sum_{k=1}^{m} k^2 - \sum_{k=1}^{m} k \\ &= 2\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} - \frac{m(m+1)}{2} \\ &= \frac{m(m+1)(4m-1)}{6} \\ &= \frac{n(n+2)(2n-1)}{24} \end{aligned} \tag{3.3}$$

である．ここで $A(n)$ は

$$A(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{7.1}$$

であることを用いている．また和の公式

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m} k^2 &= \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \\ \sum_{k=1}^{m} k &= \frac{m(m+1)}{2} \end{aligned}$$

を用いた．

8　付録２　倒置三角形の数（奇数段）

付録 2 では n が奇数のときの倒置三角形の数を求める式の計算を示す．$n = 2m+1$ とおいて n の和を m の和で表せば

$$\begin{aligned} N_i^o &= \sum_{k=1}^{m} k(2k+1) \\ &= 2\sum_{k=1}^{m} k^2 + \sum_{k=1}^{m} k \\ &= 2\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + \frac{m(m+1)}{2} \\ &= \frac{m(m+1)(4m+5)}{6} \\ &= \frac{(n-1)(n+1)(2n+3)}{24} \end{aligned} \tag{3.4}$$

である．ここでも付録 1 と同じ関係と公式を用いた．

9　付録 3　正置三角形の数

付録 3 では正置の三角形の数を求める式の計算を示す.

$$
\begin{aligned}
N_r &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right] \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

である．この付録 3 でも付録 1, 2 と同じ関係と公式を用いた.

10　付録 4　正三角形の総数

付録 4 では正三角形の総数の最後の式の計算を示す.

一般的には最後の式 (5.2) と (5.5) には一度展開した式 (5.1) と (5.4) を経て到達すると思う.

しかし，ここでは別の可能性を考えてみよう．それには $(n-1)(n+1)(2n+3)$ と $n(n+2)(2n-1)$ との関係を考える必要がある．それぞれの因子の変わり方を見てみると

$$
\begin{aligned}
n &\to n-1, \quad \Delta n = 1 \\
n+2 &\to n+1, \quad \Delta n = 1 \\
2n-1 &\to 2n+3, \quad \Delta n = -4
\end{aligned}
$$

ここで Δn は差分である。それで $n = A,\ \ n+2 = B,\ \ 2n-1 = C$ とおいて $(n-1)(n+1)(2n+3)$ を $A,\ B,\ C$ で表すことを考えよう.

$$
\begin{aligned}
(n-1)(n+1)(2n+3) &= (A-1)(B-1)(C+4) \\
&= [AB - (A+B) + 1](C+4) \\
&= ABC + [1-(A+B)]C + 4[AB + 1 - (A+B)] \\
&= ABC - 3 \qquad (10.1)
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
A + B &= 2n+2, \\
D &:= 1 - (A+B) = -(2n+1), \\
AB &= n^2 + 2n, \\
E &:= AB + 1 - (A+B) = n^2 - 1 \\
CD &= 1 - 4n^2 \\
4E &= 4n^2 - 4 \\
CD + 4E &= -3
\end{aligned}
$$

であることを用いた.

この結果を用いると

$$\begin{aligned}\frac{1}{24}(n-1)(n+1)(2n+3) &= \frac{1}{24}(ABC-3)\\ &= \frac{1}{24}ABC-\frac{1}{8}\\ &= \frac{1}{24}n(n+2)(2n-1)-\frac{1}{8} \qquad (10.2)\end{aligned}$$

したがって n が奇数のとき，正三角形の和を N は

$$\begin{aligned}N &= N_r + N_i^o\\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)+\frac{1}{24}(n-1)(n+1)(2n+3)\\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)+\frac{1}{24}n(n+2)(2n-1)-\frac{1}{8}\\ &= \frac{1}{8}n(n+2)(2n+1)-\frac{1}{8} \qquad (5.5)\end{aligned}$$

となる．

また，n が偶数のとき，正三角形の和 N は (5.1) の形を経由しないですぐに (5.2) が求められる．この (5.5) を上に述べたように直接求める方法を見つけられない場合には (5.1) と (5.4) は必要な式である．

11　付録 5　付加項の一般式

この付録 5 では式の付加項の求め方を示す.

まず n が偶数のときには付加項が 0 となるから，これは

$$0 = (-1)^n - 1$$

とすればよいであろう．そのときに n が奇数であれば,

$$(-1)^n - 1 = -2$$

となる．そこで n が奇数のとき

$$a[(-1)^n - 1] = -\frac{1}{8}$$

となるように係数 a を決めれば，$a = \frac{1}{16}$ と求められる．

したがって，付加項の形を

$$\frac{1}{16}[(-1)^n - 1]$$

と決めることができる．

参考文献

[1] 矢野　忠，家中でクイズを $\cdots$，研究と実践（愛数協）第 16 号 (1984.10) 2-8,
『数学散歩』（国土社，2005）5-10 に再録

[2] http://www004.upp.so-net.ne.jp/s-honma/number/nur

[3] 秋山　仁,『数学の証明のしかた』（森北出版，2014）174-176 に奇数段の三角形の総数を求めた式が載っている．それによると

$$N = \frac{1}{8}(n+1)(2n^2+3n-1)$$

であり，これは (5.3) と一致する．

編集後記

年の瀬も押しつまった．今日は 12 月 30 日である．今年を 5 巻 10 号で終わってもよかったのであるが，5 巻 9 号の編集後記で予告したように 11 号を発行することにした．かなり無理をしたが，読者の方々にはご了解をお願いしたい．

今年のノーベル物理学賞がニュートリノ振動の発見に与えられたので，その解説論文を今年中に発行したかったのだが，著者のご都合で来年回しとなった．ご期待ください．

来年も読者も投稿者の方々のご健勝とご活躍を祈っている．よい新年をお迎えください。

（矢野　忠）