数学・物理通信

5巻3号　　2015年4月

編集　新関章三・矢野　忠

2015 年 4 月 8 日

目次(Contents)

虚数とカルダノの公式

矢野　忠 [1]

The Imaginary Numbers and Cardano Formula

Tadashi YANO [2]

目次

1　はじめに

遠山啓の『数学入門』上，下（岩波新書） [1] は名著との誉れが高い．ところが上巻 (1959), 下巻 (1960) の初版にはミスプリントが少なからずあった．

私のもっている最新版 (2000) を見てみたら，さすがに長年読みつがれているだけあって，ミスプリントはなくなっていた．

ところが下巻の p.124 の上から 7 行目に

> すでに三次方程式を解くときに，実数の世界は狭すぎ，どうしても数を複素数まで拡大しなくてはつじつまが合わない事態が起こった（第 VII 章）.（後略）

とあった．私はこの三次方程式が二次方程式のミスプリントではないかと思っていた．さすがに多くの読者もここまでは目が届かなかったのか.

なぜなら，すでに二次方程式において虚数を導入しなければ，解がない場合が生じるからである．しかし，これは私の理解が不十分であることがわかった.

『数学入門』上の p.216 には

> 2 次方程式では虚数をみとめないという立場をとってもつじつまは合う．しかし，3 次方程式では虚数をみとめないと，実数の根さえ計算できないという矛盾にぶつかる. (3 次方程式 $x^3-6x+4=0$ を解く）この例は虚数なしでは代数がどのくらい不完全であるかをよく物語っている [3].

とある.

つまり，虚数の存在が 3 次方程式の解の公式によって動かしがたくなった．このことを以下の節で示すことにしよう [4].

---

[1] 元愛媛大学工学部
[2] yanotad@earth.ocn.ne.jp
[3] （ ）は引用者が補足挿入した.
[4] ポントリャーギン [2] はつぎのように述べている.

2　3次方程式の簡約化

3 次方程式の解の公式，いわゆるカルダノの公式を付録 1 で導くのだが，その 3 次方程式は一般的に

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{2.1}$$

と表すことができる [5]．いま，この 3 次方程式の解の公式を求めるために

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x + \omega y + \omega^2 z)(x + \omega^2 y + \omega z) \tag{2.2}$$

というよく知られた因数分解の公式を利用する [6]．いま未知数を x で表し，y, z は定数であるとすれば，

$$x^3 - 3yzx + y^3 + z^3 = 0 \tag{2.3}$$

と表すことができる．この形の式は

$$p = -3yz \tag{2.4}$$

$$q = y^3 + z^3 \tag{2.5}$$

とおけば

$$x^3 + px + q = 0 \tag{2.6}$$

と表せる．ここで (2.1) が (2.6) と表せるためには (2.1) の形の 3 次方程式において x^2 の項を消去するような変数変換があるだろうか．そのことを考えてみよう．

いま

$$x = t + e, \quad (e : \text{未定定数}) \tag{2.7}$$

とおいてみよう．これを (2.1) に代入すれば

$$(t + e)^3 + a(t + e)^2 + b(t + e) + c = 0 \tag{2.8}$$

となる．したがって

$$t^3 + (a + 3e)t^2 + (b + 2ae + 3e^2)t + (c + be + ae^2 + e^3) = 0 \tag{2.9}$$

が得られる．

a, b, c は与えられた定数であるが，e は未定の定数であるから

$$a + 3e = 0 \tag{2.10}$$

ととれば，t^2 の項を消すことができる．すなわち

$$e = -\frac{a}{3} \tag{2.11}$$

もし実数だけを考えているならば，平方をとる計算の逆演算である開平計算は，つねに可能であるとは限らない．負の数の平方根はとれないからである．しかしながら，そのことだけでは数学に新しい数を導入する理由としては十分ではない．負の数の平方根を含んだ式にふつうの規則による計算を施した場合，負の数の平方根を含まない結果に到達することがあることがわかってきた．

16 世紀にカルダノ (Cardano) は 3 次方程式の根の公式を発見した．3 次方程式の 3 根がすべて実根であるというまさにその場合に，カルダノの公式では，負の数の平方根が出てくるのである．このようにして，負の数の平方根を含んだ式についての計算を行うと，完全に意味のある結果が得られることがあるのが発見された．このような理由で，負の数の平方根が使われはじめたのである．(後略)

[5] 一般的な 3 次方程式として (2.1) ではなく，$px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ と表すべきだろうか．その必要はない．なぜなら，x^3 の前の係数 p で式全体をわれば，(2.1) が得られる．

[6] この因数分解の公式は付録 4 で示す．

ととればよい．このとき一般に

$$t^3 + Pt + Q = 0 \tag{2.12}$$

と表すことができる．このとき

$$P = b + 2ae + 3e^2$$
$$Q = c + be + ae^2 + e^3$$

とおいた．新しい未知数 t を再度 x と表し，さらに P, Q も p, q と表すことにすれば，

$$x^3 + px + q = 0 \tag{2.6}$$

が得られることになる．今後この形の簡約された 3 次方程式を解くことにする．

3 $x^3 - 6x + 4 = 0$ を解く

ちょっと前おきの注意をしておこう．この節のタイトルを $x^3 - 6x + 4 = 0$ を解くとしたが，ここではもちろんカルダノの公式を用いて解く[7]．因数定理によって解くのではない[8]．

$x^3 + px + q = 0$ の解の公式は

$$r = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \tag{3.1}$$

とおけば，

$$x = -\sqrt[3]{\frac{q}{2} + r} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} - r} \tag{3.2}$$

$$x = -\omega\sqrt[3]{\frac{q}{2} + r} - \omega^2\sqrt[3]{\frac{q}{2} - r} \tag{3.3}$$

$$x = -\omega^2\sqrt[3]{\frac{q}{2} + r} - \omega\sqrt[3]{\frac{q}{2} - r} \tag{3.4}$$

と表される．ここで

$$\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \tag{3.5}$$

であり，これは $\omega^3 = 1$ を満たす解の一つである．

これから

$$x^3 - 6x + 4 = 0 \tag{3.6}$$

をこのカルダノの公式によって解いてみよう．このとき $p = -6, q = 4$ である．したがって

$$r^2 = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = -4 \tag{3.7}$$

したがって

$$r = \pm 2i \tag{3.8}$$

[7]このカルダノの公式の導出は付録 1 に述べる．

[8]因数定理による解法は付録 3 で述べる．

となる．いま $r=2i$ ととれば[9],

$$\frac{q}{2}+r=2+2i \tag{3.11}$$
$$\frac{q}{2}-r=2-2i \tag{3.12}$$

したがって，

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2}+r}=\sqrt[3]{2+2i}=-1+i \tag{3.13}$$
$$\sqrt[3]{\frac{q}{2}-r}=\sqrt[3]{2-2i}=-1-i \tag{3.14}$$

であるから[10]

$$x=-(-1+i)-(-1-i)=2 \tag{3.15}$$
$$x=-(-1+i)\omega-(-1-i)\omega^2=-1+\sqrt{3} \tag{3.16}$$
$$x=-(-1+i)\omega^2-(-1-i)\omega=-1-\sqrt{3} \tag{3.17}$$

となるから解は

$$2,\quad -1+\sqrt{3},\quad -1-\sqrt{3} \tag{3.18}$$

これからわかるように $x^3-6x+4=0$ の解はすべて実数である．ところが解の公式での計算では途中で虚数 i が出てきた．i という数をみとめないと上に求めた実数の解は見つからないことになる．

4 おわりに

2 次方程式でも虚数を認めないと解が存在しないことが起こるが，それでも 2 次方程式の解としては実数の解だけしか認めないという立場をとることもできる．

しかし，3 次方程式の場合には実数の解となる場合においても虚数の存在を認めないと解の公式によって解を求められないことがある．すなわち虚数は数として厳然としてその存在の意義がある．このことは 1 節で述べたことであった．3 次方程式のカルダノの公式によって虚数はようやくその存在が動かせないものとなった．

歴史的にはそれでもなお虚数の存在は市民権を得ることがなかなか難しかったらしい．そしてようやくガウスによって虚数に市民権を与えられたのは 18 世紀の終わりごろだという．しかし，その存在の根拠はもうすでに 3 次方程式の解の公式，カルダノの公式，によって与えられていたのである．

1 節の脚注に引用したポントリャーギンの説明が私にはなにがなんだかわからなかったが，このエッセイで述べたことを了解した後で，ようやくその意味がわかってくる．

もっとも $x^3-6x+4=0$ の解は因数定理を用いて，$x-2$ という因数を見つけ出せば，後の 2 つの解は 2 次方程式の解の公式を用いて求めることができる．これを付録 3 で述べる．

[9] $r=-2i$ ととれば，

$$\frac{q}{2}+r=2-2i \tag{3.9}$$
$$\frac{q}{2}-r=2+2i \tag{3.10}$$

となる．したがって，$r=2i$ ととろうと $r=-2i$ ととろうと解の集合としてちがいはない．

[10] $\sqrt[3]{2+2i}=-1+i$, $\sqrt[3]{2-2i}=-1-i$ となることは付録 2 で示す．

5　付録　1　カルダノの公式の導出

$$x^3+y^3+z^3-3yzx=(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z) \tag{A1.1}$$

を用いて，カルダノの公式を導き出そう [11]．上の式の左辺を 0 とおけば

$$x^3+px+q=0 \tag{A1.2}$$

という形となる．ここで，

$$p=-3yz \tag{A1.3}$$
$$q=y^3+z^3 \tag{A1.4}$$

である．この式から，y, z を求める．(A1.3) から

$$z=-\frac{p}{3y} \tag{A1.5}$$

となるので，これを (A1.4) へ代入すれば

$$y^6-qy^3-\left(\frac{p}{3}\right)^3=0 \tag{A1.6}$$

が得られる．これは y^3 の 2 次方程式であるから

$$y^3=\frac{q}{2}\pm r, \text{ここで}\ \ r=\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3} \tag{A1.7}$$

y^3 の解として

$$y^3=\frac{q}{2}-r \tag{A1.8}$$

をとれば，y^3 の 3 乗根の一つの y の値は

$$y=\sqrt[3]{\frac{q}{2}-r} \tag{A1.9}$$

と表すことができる．

　また z^3 は (A1.4) から

$$z^3=\frac{q}{2}+r \tag{A1.10}$$

となる．すなわち，z^3 の 3 乗根の一つの z の値は

$$z=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+r} \tag{A1.11}$$

と表すことができる．

　ところで

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z) \tag{A1.12}$$

と因数分解できるから，3 次方程式

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=0 \tag{A1.13}$$

から，

$$x+y+z=0 \tag{A.1.14}$$
$$x+\omega y+\omega^2 z=0 \tag{A.1.15}$$
$$x+\omega^2 y+\omega z=0 \tag{A.1.16}$$

[11] (A1.1) の導出は付録 4 で述べる．

が得られる．これから3次方程式 $x^3+px+q=0$ の解 x は

$$x=-y-z=-\sqrt[3]{\frac{q}{2}-r}-\sqrt[3]{\frac{q}{2}+r} \tag{A.1.17}$$

$$x=-\omega y-\omega^2 z=-\omega\sqrt[3]{\frac{q}{2}-r}-\omega^2\sqrt[3]{\frac{q}{2}+r} \tag{A.1.18}$$

$$x=-\omega^2 y-\omega z=-\omega^2\sqrt[3]{\frac{q}{2}-r}-\omega\sqrt[3]{\frac{q}{2}+r} \tag{A.1.19}$$

となる．

『数学入門』上では最後の式が少しだけ違った表現がされているが，同じものである．このとき $(-1)^3=-1$ から $-1=(-1)^{1/3}$ を使えば二つが同等の式であることがわかる．

6　付録　2　$\sqrt[3]{2+2i}$，$\sqrt[3]{2-2i}$ の計算

この付録2では $\sqrt[3]{2+2i}=-1+i$，$\sqrt[3]{2-2i}=-1-i$ であることを示す.

まず

$$\sqrt[3]{2+2i}=-1+i$$

であることを示す．それには

$$\sqrt[3]{2+2i}=a+bi$$

とおく．ここで，a,b は実数である．これから

$$2+2i=(a+bi)^3$$

となる．

$$(a+bi)^3=a^3-3ab^2+(3a^2b-b^3)i$$

であるから

$$a^3-3ab^2=2 \tag{B2.1}$$

$$3a^2b-b^3=2 \tag{B2.2}$$

が得られる．(B2.1)−(B2.2) を計算すると

$$a^3+b^3-3ab^2-3a^2b=0$$

$$(a+b)(a^2-4ab+b^2)=0$$

a,b は実数であるから

$$a+b=0$$

したがって

$$b=-a \tag{B2.3}$$

これを (B2.1) に代入すれば

$$a^3+1=0$$

から

$$(a+1)(a^2-a+1)=0$$

が得られ，したがって

$$a=-1,b=1 \tag{B2.4}$$

が求められる．

つぎに

$$\sqrt[3]{2-2i} = -1-i$$

であることを示す．それには

$$\sqrt[3]{2-2i} = a+bi$$

とおく．a,b は実数である．同様な手順で a,b を求めることができる．

この場合には

$$b = a \tag{B2.5}$$

となる．最終的な結果は

$$a = -1, b = -1 \tag{B2.6}$$

となる．

7　付録　3　因数分解による解法

3 次方程式 $x^3-6x+4=0$ の場合には実は因数定理によって一つの因数を見つけることができる．いま

$$P(x) = x^3-6x+4 \tag{C3.1}$$

とおけば，$P(2)=0$ となるので $P(x)$ は因数定理によって $x-2$ という因数がある．

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3-6x+4 \\ &= (x-2)(x^2+2x-2) \end{aligned}$$

となる．$x^2+2x-2=0$ は 2 次方程式であるから，解の公式によって解くことができる．この 2 次方程式の解は

$$x = -1 \pm \sqrt{3}$$

であるから，$x^3-6x+4=0$ の求める解は

$$2,\quad -1+\sqrt{3},\quad -1-\sqrt{3} \tag{C3.2}$$

である．これはもちろんカルダノの公式で求めた (3.18) と一致する．

8　付録　4　$x^3+y^3+z^3-3xyz$ の因数分解

$$P(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \tag{D4.1}$$

とおけば，有名な因数分解の公式によって

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)P(x,y,z)$$

と表される．したがって以下では $P(x,y,z)$ の因数分解を考えればよい．

この $P(x,y,z)$ は $x \leftrightarrow y, y \leftrightarrow z, z \leftrightarrow x$ の入れ替えに対して対称である．すなわち，

$$P(x,y,z) = P(y,x,z) = P(z,y,x) = P(x,z,y)$$

が成り立つ．いま $P(x,y,z)=P(x,z,y)$ であることに注目すれば

$$P(x,y,z)=(x+uy+vz)(x+vy+uz) \tag{D4.2}$$

とおくことができる．このとき u,v は複素数である [12]．この右辺を展開すれば

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=x^2+uvy^2+uvz^2+(u+v)xy+(u^2+v^2)yz+(u+v)zx \tag{D4.3}$$

となるが，この式が成り立つように u,v を決めればよい．そうするとこの式から

$$uv=1 \tag{D4.4}$$

$$u+v=-1 \tag{D4.5}$$

$$u^2+v^2=-1 \tag{D4.6}$$

から u,v を決めることができる．まず (D4.4) を v について解けば

$$v=\frac{1}{u} \tag{D4.7}$$

(D4.7) を (D4.5) へ代入すれば

$$u^2+u+1=0 \tag{D4.8}$$

が得られる．これから

$$u=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2} \tag{D4.9}$$

と求められる．いま u として

$$u=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \tag{D4.10}$$

をとれば

$$v=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \tag{D4.11}$$

となる．

(D4.4) と (D4.5) から u,v の値が求まったが，条件として (D4.6) がもう一つある．この式を上に求めた u,v の値は満たしているだろうか．(D4.10) と (D4.11) の u,v の値を (D4.6) に代入すれば，

$$u^2+v^2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2+\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2=-1$$

となるから，(D4.6) を満たしている．

もちろん，u と v は (D4.10) と (D4.11) で求まったが，これの値を入れ替えた

$$u=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$v=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

としてもよい．なぜなら，(D4.4)-(D4.6) は $u\leftrightarrow v$ の入れかえに対して対称的な方程式だからである．

$$\omega=u=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

とおくことにすれば，

$$\omega^2=v=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

[12] u,v を実数に限ると (D4.1) は因数分解できない．

となることがすぐにわかる．

したがって

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z) \tag{D4.12}$$

と因数分解できる．

いま $P(x,y,z)$ を (D4.12) のように因数分解するために

$$P(x,y,z)=P(x,z,y)$$

という対称性を用いたが，(D4.12) の右辺は

$$P(x,y,z)=P(y,x,z)=P(z,y,x) \tag{D4.13}$$

の対称性を満たさないように思われるかもしれない．しかし，(D4.12) の右辺は左辺に等しいから，当然この (D4.13) の対称性を満たしている．

しかし，そのことに疑念をもたれる方もおられるかもしれないので，例として (D4.12) で $x \leftrightarrow y$ の入れかえをした計算を示しておく．

$$\begin{aligned}
P(y,x,z) &= (y+\omega x+\omega^2 z)(y+\omega^2 x+\omega z)\\
&= y^2+(\omega+\omega^2)xy+(\omega+\omega^2)yz+\omega^3 x^2+(\omega+\omega^2)zx+\omega^3 z^2\\
&= x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx
\end{aligned}$$

となるので，確かに

$$P(x,y,z)=P(y,x,z)$$

が成り立つ．

$x \leftrightarrow z$ の入れかえに対しても同様であるが，この検算は省略する．上の計算において $\omega^2+\omega+1=0$ と $\omega^3=1$ であることを用いている [13]．

9 付録 5 Feynman のエピソード

これはカルダノの公式のもつ意義を伝える Feynman のエピソードで，私のブログ「物理と数学：老人のつぶやき（旧名ブログ：physicomath）」の 2010.11.22 の記事に書いたことの一部である．

（引用はじめ）昨日は日曜で，自宅にいた．それで，以前に買っていた本を久しぶりに取り出してきた．Dyson の本 [3] である．この日本語訳が今は出ているのだが，私はもっていないので，原本である．(中略)

その手紙の一部に家族に宛てた手紙があるが，その中の一つがおもしろかった．これは Feynman がアテネに行ったときの彼のギリシアでの観察を伝えた手紙である．

ギリシアでは，古代のギリシアが優れた科学業績を挙げたということを学校教育で徹底しているので，子どもたちはその偉大さに打ちひしがれて現代でもその偉大さをなかなか精神的に克服することができない．

---

[13] $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \omega^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ であるから

$$\omega+\omega^2=-1 \tag{D4.14}$$

であることはすぐに導かれる．また

$$\omega^3=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)=1 \tag{D4.15}$$

であるから，$\omega^3=1$ もすぐにわかる．

Feynman はいう．ヨーロッパで一番重要な数学上の業績はタルタリアによる，3 次方程式の解法だという [14]．これはあまり使われないが，これは心理的にはすばらしいもので，これによって近代人は古代ギリシア人のできなかったことをやっと乗り越えられた．そして，人間を自由にする，ルネッサンスに役立ったという．

この Feynman の話を聞いたギリシアの子どもたちは大変驚いたという．しかし，古代のギリシア人が人間の理性の成果である，科学においては偉大なことを成し遂げたことは事実としても，それに押しつぶされるような雰囲気が現在の学校教育で支配的であるのなら，それは行き過ぎた教育であろう．だから，Feynman のいうことは正しい．

もっとも私はタルタリアの 3 次方程式の解法が古代ギリシアを乗り越えた，最大の業績かどうかはわからない．それにしても Feynman の書簡集は英語の原本もその日本語の翻訳もいずれも，まだ私はもっていない．あわてて購入するべきだろうか.（後略）（引用おわり）

今振り返ってみれば，Feynman は虚数 i の存在を確実としたタルタリアの 3 次方程式の解の意義を知っていて，こういう話をギリシアの子どもたちの前で話したのであろう．その理解が私にはできていなかったから，「私はタルタリアの 3 次方程式の解法が古代ギリシアを乗り越えた，ヨーロッパの最大の業績かどうかはわからない」などととんまなことを書いたのであろう．

(2015. 2. 28)

10 補遺

上の原稿を書いた後で，いくつかの文献を読む機会があった．一つは [4] である．この書では未知数 x を $x=y+z$ とおいて，$y+z$ を求めることによって

$$x^3+px+q=0 \tag{A.1.2}$$

を解く．著者（小島）は一つしかなかった未知数 x を，二つの未知数 y と z との和で表すという奇抜なアイディアであり,「フォンタナが考えつかなければ，あと数百年は誰も気がつかなかったかもしれません」と述べている．

それはともかく

$$x=y+z \tag{E1.1}$$

とおいて，これを (A.1.2) に代入すれば，

$$(y+z)^3+p(y+z)+q=0$$

となり，

$$(y^3+z^3+q)+(3yz+p)(y+z)=0$$

が得られるので，

$$y^3+z^3=-q \tag{E1.2}$$

$$yz=-\frac{p}{3} \tag{E1.3}$$

が成り立たなければならない．

ところが，これをすでに求めた (A1.3),(A1.4) と比べれば，(A1.3) と (E1.3) とは一致するが，(A1.4) と (E1.2) とは負号だけ一致しない．

[14] 3 次方程式の解の公式はカルダノではなく，本当はタルタリアによるものだということはよく知られている．タルタリアは異名であり，フォンタナというのが本名らしい.『数学入門』上 [1] の p.214 にはカルダノはフォンタナから一切口外しないという誓約をした上で解の公式を教わったが，その後その誓いを破って解の公式を公開したという．そして後世にはカルダノの公式と名前で知られている．ここではその慣習にしたがっている．そういうことはあるが，カルダノはとても興味深い人物であって，その自叙伝はとても有名であるという．

これは，私たちの方法では $x+y+z=0$ から $x=-(y+z)$ を仮定したのに対し，フォンタナは $x=y+z$ と仮定したので異なるのは当然であろう．

それで

$$x=-(y+z) \tag{E1.4}$$

とおけば，

$$(y+z)^3+p(y+z)-q=0$$

が得られるので，(E1.2) で $q \to -q$ とおきかえればよい．したがって

$$y^3+z^3=q \tag{A1.4}$$

$$yz=-\frac{p}{3} \tag{A1.3}$$

が得られる．

付録 1 で述べた方法では $x^3+y^3+z^3-3xyz$ を因数分解するという方針で解の公式を求めた．

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

と因数分解できるから，$x+y+z$ という因数があることは高校生でも知っている．すなわち，

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=0$$

という x についての 3 次方程式を解けば $x=-(y+z)$ という解がある．フォンタナが $x=y+z$ とおいたということは 3 次方程式が $x^3+px+q=0$ が $x-(y+z)$ という因数をもつことを仮定したことになる．フォンタナの奇抜なアイディアは実は今なら高校生でも思いつくようなアイディアであったと言えるだろう．

私たちの方法なら，現代の学生でも解法を見つけられるであろう．しかし，$x^3+y^3+z^3-3xyz$ が複素数の範囲で因数分解できることはフォンタナは知らなかっただろうから，現代の学生とフォンタナとはまったく違った立場にある．さらに言えばフォンタナの時代には負数さえも普通には認められていなかったという．だから，もちろんここで述べた方法は歴史的な後知恵である．

もう一つ読んだ文献は [5] である．ここには 3 次方程式の解に複素数が現れる不思議の追求をした人としてボンベリの名が挙がっている．そして複素数の 3 乗根が解の公式に現れることが例外的なことではないことが述べられている．ボンベリは，たとえば，

$$x^3-15x-4=0$$

を解いて，実数解 4，$-2+\sqrt{3}$，$-2-\sqrt{3}$ を得たが，途中で虚数の平方根が出てくるという不思議に出会ったという．

この文献には 4 次の方程式の解の公式の求め方もその話の筋は述べられており，興味深い．是非一読をお勧めする．

（2015.3.27 付記）

カルダノ変換の用語の説明があるかと思って『数学入門辞典』 [6] を探してみたら，カルダノ変換という語は載っていなかったが，3 次方程式の解の公式の求め方の説明があった．この辞典では $x^3-y^3-z^3-3xyz=0$ の因数分解として，x の 3 次方程式の解の公式を導いている．これは付録 1 で述べた方法と同じである．付録 1 と因数分解する式の見かけがちがっているのは，3 次方程式の解法としてどのテキストにも $x=y+z$ として y,z を求めると書いてあるのに引きずられたためであろう． [6] を著した方々は日本を代表するような数学者であるから，ちょっとした変更は本質を理解する支障にはならない．だが，かつての私のような，劣等生の高校生でも理解できるように，$x^3+y^3+z^3-3xyz=0$ を使ったほうが数学教育的にはいいのではないかと思う．

（2015.3.31 付記）

参考文献

[1] 遠山　啓,『数学入門』上，下（岩波新書，1959, 1960）

[2] ポントリャーギン（宮本敏雄，保坂秀正）,『数概念の拡張』（森北出版，2002）1 - 2

[3] F. J. Dyson, *The Scientist as rebel* (New York Review Books, 2006) 279-280（柴田裕之　訳『反逆としての科学』（みすず書房, 2008）にはこの箇所は訳出されていない）

[4] 小島寛之,『天才ガロアの発想力』（技術評論社，2010）140-148

[5] 木村俊一，代数方程式の天才たち，数理科学,（サイエンス社，2015.4）15-21

[6] 青木和彦　他,『数学入門辞典』（岩波書店，2005）233

体内時計と同調現象

世戸 憲治 [1]

Internal Body Clock and Synchronization Phenomenon

Kenji Seto [2]

目次

1　はじめに

私は，超が付くほどの遅寝遅起きである．これは私が持っている体内時計が，1 日の長さ 24 時間をはるかに超えているためらしい．この体内時計は，生物時計 (biological clock)，あるいは，生理時計 (physiological clock) などとも言われるが，これは個人差があって生活リズムとしての 1 日の長さが 24 時間に満たない人もいれば，私のように長すぎる人もいる．旅行などに出かけ普通の生活時間を余儀なくされることもあるが，家に帰るとまたすぐに遅寝遅起きに戻ってしまう．地球の自転速度がもっと遅くなって 1 日の長さが 30 時間位になるとちょうど良いのにと思うこともしばしばである．いっそのこと，夜勤の仕事をしている人のように，寝る回数を 2 日に 1 回とまでは言わないにしても，3 日に 2 回とかにしたらどうかとも思うが，どうしても曜日に縛られてしまいそれもままならない．

通常の人間は地球の自転に合わせた生活をしなければならないので，体内時計が 24 時間を超える人は，遅まきながらそれに合わせて遅寝遅起きになり，逆に，24 時間に満たない人は早寝早起きになってしまうと考えられる．つまり，通常の人間は，生活時間を地球の自転速度に同調させて生きているわけである．ここでは，このような同調現象の最も単純な数学モデルについて考えてみる．モデルの設定にあたっては，

(1) 体内時計の 1 日が，地球自転の 1 日にある程度近ければ，地球自転に同調し，通常の生活ができること．

(2) 体内時計の 1 日が，地球自転の 1 日と比べ，あまりに短かすぎたり，長すぎたりした場合は，同調することなく，通常の生活とは外れたものになってしまうこと．

(3) 各個人には体内時計の周期の他に，適応力があって，同調するか，しないかは，適応力の強さにも依存すること．これが強い人は，体内時計の 1 日が地球自転の 1 日とかなり離れていても同調した通常の生活が送れ，逆にこれが弱い人は，すぐに同調しなくなり，通常の生活と外れてしまうこと．

---

[1] 北海学園大学名誉教授
[2] seto@pony.ocn.ne.jp

以上の 3 点のことが満たされるようなモデルを作ることを目標とするが，この種の議論に対しては，確かなデータがあるわけでもなく，理論的な根拠があるわけでもない．したがって，これから述べることは，まったくの 1 つの仮説，否，仮説にもなり得ないただの数式遊びとして受け止めていただきたい．

2　方程式の導入

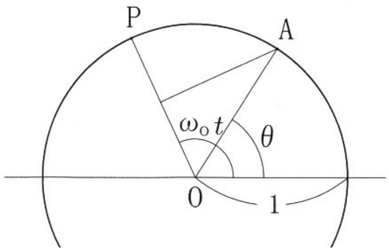

図 1　　体内時計のモデル

図 1 のように，中心 O, 半径 1 の円を考え，この円周上を 1 回転することが，1 日の生活時間と考える．この図にある P 点は，地球の自転を模したもので，この円周上を一定角速度 ω_0 で回転するものとする．1 日の長さを時間の単位 day とすると，この P 点が 1 回転する時間は 1day, したがって，$\omega_0 = 2\pi/\,\mathrm{day}$ となる．つまり，この P 点は ペースメーカーの役をはたすものと考える．それに対し，A 点は，ある特定の個人に対応するもので，その人が持つ固有の角速度 ω_a が存在し，遅寝遅起きの人は，ゆっくり回転するので，$\omega_a < \omega_0$ となり，早寝早起きの人は，$\omega_a > \omega_0$ となる．ただし，これだけでは，地球の自転に同調させることはできないので，時刻 t における A 点の回転角を θ としたとき，その角速度は一定ではなく，ω_a のほかに，

$$d\theta/dt = \omega_a + F(t)$$

と同調させるための項 $F(t)$ を入れることにする．以後，これを同調項と呼ぶことにするが，これをどう選ぶかが問題である．時刻 t における地球の自転による回転角 $\omega_0 t$ に対し，個人の回転角 θ が小さいときは加速し，大きいときは減速しなければならないので，この同調項には，これら 2 つの角度差 $\omega_0 t - \theta$ のようなものを含ませなければならない．そこで考えられるのが，

(A) 同調項を AP 間の円弧の長さ $\omega_0 t - \theta$ に比例するものとし，方程式を

$$d\theta/dt = \omega_a[1 + e(\omega_0 t - \theta)]$$

とた場合を考える．この方程式には自明な解 $\theta = \omega_0 t + c$ が存在する．これを代入してわかるように，$c = (\omega_a - \omega_0)/e\omega_a$ である．これから，比例定数 e を正としたとき，$\omega_a > \omega_0$ の人は，c 正となり，早寝早起きになり，逆に，$\omega_a < \omega_0$ の人は c 負で，遅寝遅起きになることがわかる．しかし，このときは，ω_a の値がどんなときでも必ず同調することになり，先に挙げた目的に沿わない．

(B) 同調項を AP 間の直線距離 $2\sin\big((\omega_0 t - \theta)/2\big)$ に比例するとし，方程式を

$$d\theta/dt = \omega_a[1 + e\sin\big((\omega_0 t - \theta)/2\big)]$$

とした場合．このときも自明な解 $\theta = \omega_0 t + c$ が存在し，代入してみると，$\sin(c/2) = (\omega_a - \omega_0)/e\omega_a$ となる．sin の値は絶対値が 1 以下なので，ω_a の値，すなわち，同調が起こる範囲は自ずと限定される．し

かし，ここで 1 つ気に入らないのは，いま，$\omega_0 t > \theta$ として，P 点と A 点の差が 1 回転になるまで，加速され続けてしまうことである．実際は，P 点と A 点の差が半回転以上になってしまったとき，つまり，夜と昼が逆転してしまったときは，むしろ減速させて，次の日を待つ方が，正しいやり方と考えられる．

(C) そこで，(B) で考えた方法の sin の中の 1/2 を取ってしまい方程式を

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_a\big[1 + e\sin(\omega_0 t - \theta)\big] \tag{2.1}$$

とする．これは，同調項として，A 点から線分 OP に下ろした垂線の長さ $\sin(\omega_0 t - \theta)$ に比例させたことになる．これで，A 点と P 点の角度差が半回転以内のとき，θ が $\omega_0 t$ より小さいときは加速させ，逆に，θ が $\omega_0 t$ より大きいときは減速させる．また，角度差が半回転を超えるときは，加速と減速を逆にするということである．

その他に，P 点と A 点の回転半径を変えたものも考えてみたが，どうもしっくりしない．以下では，この (2.1) 式に基づいた解析をしていくことにする．このときの比例定数 e は，逆走しないように $0 < e < 1$ とするが，これは，以下で示すように，個人が持つ適応力の強さを表すもので，e がゼロに近いほど適応力がない人，1 に近いほど適応力がある人であることを意味する．

3 方程式の解

方程式 (2.1) の一般解を求める前に，仮に，$\omega_a = \omega_0$ としたときは，$\theta = \omega_0 t$ という解が存在することはすぐにわかる．これは，地球の自転とその人の体内時計がぴたりと一致するまったく順調な人の場合である．この解をもう少し拡張すると，ω_a が ω_0 と異なる場合でも，c を定数として，

$$\theta = \omega_0 t + c \tag{3.1}$$

という形の解が存在する．これを方程式 (2.1) に代入し，$\sin(c)$ を求めると，

$$\sin(c) = \frac{1}{e}\Big(1 - \frac{\omega_0}{\omega_a}\Big) \tag{3.2}$$

となり，$\sin(c)$ の絶対値は 1 以下なので，不等式

$$\frac{\omega_0}{1+e} \le \omega_a \le \frac{\omega_0}{1-e} \tag{3.3}$$

を得る．これは，特定の個人が通常の日常生活を送るために必要な固有角速度 ω_a の範囲を示すものである．言い換えると個人が地球の自転に同調した生活を送れる範囲である．適応力 e がゼロに近いほどその範囲は狭くなり，1 に近いほどその範囲は大きくなることを示す．また，この (3.2) 式から $\omega_a < \omega_0$ の人は，$c < 0$ となり，遅ればせながら地球の自転についていくことになり，逆に，$\omega_a > \omega_0$ の人は，$c > 0$ となるので，地球の自転より早めの生活をすることになる．

つぎに，方程式 (2.1) の一般解を求めるために，

$$\theta - \omega_0 t = \phi \tag{3.4}$$

と，θ から ϕ に変数変換すると，

$$\frac{d\phi}{dt} + \omega_0 = \omega_a\big[1 - e\sin(\phi)\big] \tag{3.5}$$

となる．これを変数分離し，積分形にすると，

$$\int \frac{d\phi}{\omega_a\big[1 - e\sin(\phi)\big] - \omega_0} = \int dt \tag{3.6}$$

となる．これは積分公式，

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b} = \begin{cases} \dfrac{-2}{\sqrt{a^2-b^2}}\mathrm{arctanh}\Big[\dfrac{b\tan(x/2)+a}{\sqrt{a^2-b^2}}\Big], & a^2 > b^2 \\ \dfrac{2}{\sqrt{b^2-a^2}}\arctan\Big[\dfrac{b\tan(x/2)+a}{\sqrt{b^2-a^2}}\Big], & a^2 < b^2 \end{cases} \tag{3.7}$$

を使ってなされる [3]．この公式において，

$$a = -\omega_a e, \qquad b = \omega_a - \omega_0 \tag{3.8}$$

とおいたとき，この公式における条件式は，

$$a^2 > b^2 \quad \Rightarrow \quad \Big(\frac{\omega_0}{1+e} < \omega_a < \frac{\omega_0}{1-e}\Big), \qquad a^2 < b^2 \quad \Rightarrow \quad \Big(\omega_a > \frac{\omega_0}{1-e} \;\text{ or }\; \omega_a < \frac{\omega_0}{1+e}\Big) \tag{3.9}$$

となる．この前者は，等式部分を除いて (3.3) 式と同じものになることに注意する．

初めに，$a^2 > b^2$ の場合， (3.6) 式の積分は，

$$-\frac{2}{D}\mathrm{arctanh}\Big[\frac{(\omega_a-\omega_0)\tan(\phi/2) - \omega_a e}{D}\Big] = t + t_0 \tag{3.10}$$

となる．ここに，t_0 は積分定数，D は，

$$D = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{[\omega_0 - (1-e)\omega_a][(1+e)\omega_a - \omega_0]} \tag{3.11}$$

と定義する．以下，$\omega_a \neq \omega_0$ として，これから ϕ を求めると，

$$\phi = 2\arctan\Big[\frac{\omega_a e - D\tanh\big(D(t+t_0)/2\big)}{\omega_a - \omega_0}\Big] \tag{3.12}$$

となり，最終的な解は，(3.4) 式を用いて θ に戻すと，

$$\theta = \omega_0 t + 2\arctan\Big[\frac{\omega_a e - D\tanh\big(D(t+t_0)/2\big)}{\omega_a - \omega_0}\Big] \tag{3.13}$$

と得られる．この右辺の 2 項目，すなわち，ϕ は，$t\to\infty$ のとき，

$$\phi \xrightarrow{t\to\infty} 2\arctan\Big(\frac{\omega_a e - D}{\omega_a - \omega_0}\Big) \equiv c \tag{3.14}$$

となるが，これを c と定義すると，$\tan(c/2) = (\omega_a e - D)/(\omega_a - \omega_0)$ となり，これから $\sin(c) = 2\tan(c/2)/\big(1+\tan^2(c/2)\big)$ を求めると，(3.2) 式とまったく同じものになる．つまり，(3.1) 式の解は t_0 が十分に大きいときの特解だったことがわかる．ここまでは，遅かれ，早かれ，地球の自転についていき同調現象が起きる場合である．

つぎに，$a^2 < b^2$ の場合の解を求めてみよう．この場合は，特定の個人にとって，地球の自転が早すぎるか，遅すぎるかで，もはや地球の自転についていけなくなった場合である．このとき (3.6) 式の積分は，

$$\frac{2}{E}\arctan\Big[\frac{(\omega_a-\omega_0)\tan(\phi/2) - \omega_a e}{E}\Big] = t + t_0 \tag{3.15}$$

[3]「数学公式 1」(岩波全書) p.188 の一番下の式．この公式集にある変数 c をここでは b とした．

となる．ここに，

$$E = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{[(1-e)\omega_a - \omega_0][(1+e)\omega_a - \omega_0]} \tag{3.16}$$

と定義する．これから，ϕ を求めると，

$$\phi = 2\arctan\Big[\frac{\omega_a e + E\tan\big(E(t+t_0)/2\big)}{\omega_a - \omega_0}\Big] \tag{3.17}$$

となり，さらに，(3.4) 式を用いて θ に戻すと，解

$$\theta = \omega_0 t + 2\arctan\Big[\frac{\omega_a e + E\tan\big(E(t+t_0)/2\big)}{\omega_a - \omega_0}\Big] \tag{3.18}$$

を得る．しかし，この式を見ても，どのように地球の自転についていけなくなるのか簡単にはイメージがわいてこない．次節では，ここでの結果をグラフ化して示すことにする．

積分公式 (3.7) 式で，$a = \pm b$ の場合が，まだ，残っている．このときは，積分公式

$$\int \frac{1}{\sin x \pm 1} dx = \pm\tan\left(\frac{x}{2} \mp \frac{\pi}{4}\right) \tag{3.19}$$

を用いてなされる．このときの積分 (3.6) 式は，$-\omega_a e = \pm(\omega_a - \omega_0)$ に対応して，それぞれ，

$$\mp\frac{1}{\omega_a e}\tan\left(\frac{\phi}{2} \mp \frac{\pi}{4}\right) = t + t_0 \tag{3.20}$$

となり，これから ϕ を求めると，

$$\phi = \pm\frac{\pi}{2} \mp 2\arctan\big(\omega_a e(t+t_0)\big) \tag{3.21}$$

となる．ここで，$t \to \infty$ とすると，

$$\phi \xrightarrow{t\to\infty} \mp\frac{\pi}{2} \tag{3.22}$$

となる．これは同調は起こるが，角度にして 90 度，時間にして 1/4 日，前後に《ずれ》た生活を送ることになる．これは地球の自転に同調した生活を送るための最大の《ずれ》であり，これ以上《ずれ》ると最早通常の生活を送ることは不可能になる．また，この場合は，不等式 (3.3) で，等号が成立する場合に相当し，個人の適応力 e が小さい人は，適応範囲が狭いので，この状態になりやすいということである．

4　数値計算によるグラフ表示

ここでは，これまでに求めた解 (3.13) および (3.18) 式について，数値計算によるグラフ化を試みる．ただし，このままグラフ化してしまうと，角度 θ の値は，時間 t の増加とともに，ほぼリニアーに増加し，グラフとして 1 日の区切りが分かり難くなる．それを避けるため，ここでは，1 回転する毎に，角度 θ をゼロに戻すことにする．すなわち，2π を法とした角度に変換して描くことにする．この方法は，n を整数として，arctan に含まれる不定性 $n\pi$，したがって，(3.13) (3.18) 式の θ に含まれる不定性 $2n\pi$ を同時に取り除くことでもある．

数値計算をするにあたって，もう 1 つ断わっておくことがある．それはこれらの式に含まれる積分定数としての t_0 であるが，通常ならば，これは初期条件で決めるべき量である．例えば，$t = 0$ のとき $\theta = 0$ という条件を付けて t_0 を決める．ところが，(3.13) 式でそれをしようとすると，

$$\tanh\left(\frac{D}{2}t_0\right) = \frac{\omega_a e}{D}, \qquad D = \sqrt{(\omega_a e)^2 - (\omega_a - \omega_0)^2} \tag{4.1}$$

となり，左辺は 1 以下なのに，右辺は 1 より大となって，t_0 を求めることは不可能になる．このことに関しては,「付録 : 初期条件について」のところでも述べることにするが，ここでは，初期条件に合わせることはあきらめて，以下，すべての場合で $t_0 = 0$ とおくことにする．残るパラメータは個人が持つ e と ω_a であるが，ここでは，すべてのグラフについて，$e = 1/2$ に固定し，固有角速度 ω_a の値だけを変化させることにする．

初めに，(3.13) 式による同調現象が起こる場合のグラフを，図 2，図 3 に示す．ここで，横軸 t の単位は day である．このうち，図 2 は $\omega_a = 3\pi/\mathrm{day}$ と，地球の自転より早すぎる人，また，図 3 は $\omega_a = 1.4\pi/\mathrm{day}$ と遅すぎる人の場合である．以下の図では，各個人の日周運動と地球の自転を比較できるように，地球の自転による角度 $\omega_0 t$, $(\omega_0 = 2\pi/\mathrm{day})$ を点線で描くことにした．見てわかるとおり，図 2 では，地球の自転より早めに回転し，図 3 では遅めに回転していくのがわかる．

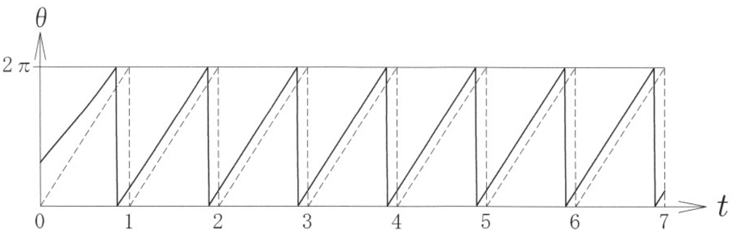

図 2 $\omega_a = 3\pi/\mathrm{day}$

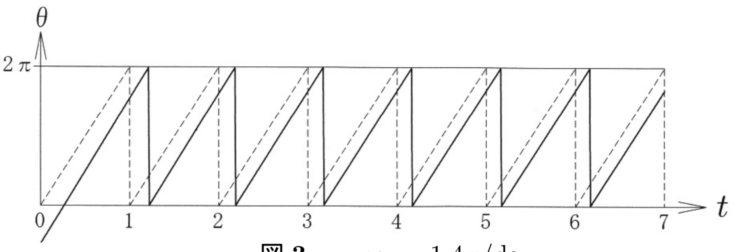

図 3 $\omega_a = 1.4\pi/\mathrm{day}$

つぎの図 4，図 5 は (3.18) 式に基づくもので，ω_a が大きすぎるか，あるいは，小さすぎるかで，もはや，地球の自転に付いて行けなくなった場合である．このうち，図 4 は，$\omega_a = 4.5\pi/\mathrm{day}$ と回転が早すぎて，1 週間 7 日のうち，11 回も寝ることになる．昼寝の回数も含めるとちょうどよいのかもしれない．また，図 5 は，$\omega_a = 1\pi/\mathrm{day}$ と超遅い場合で，これは，1 週間に 4 回しか寝ないことになる．

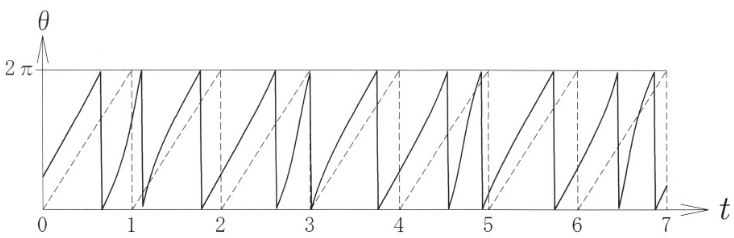

図 4 $\omega_a = 4.5\pi/\mathrm{day}$

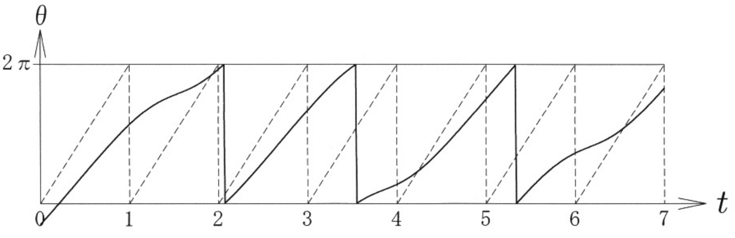

図 5 $\omega_a = 1\pi/\mathrm{day}$

5　おわりに

今回取り上げた生活リズムと地球の自転に関する同調現象は，まったくの思いつきでやったもので，実際はこんな単純なものではないのだろう．しかし，日常生活のちょっとしたことでも，すぐに数式にしたがる私としては，今回のものは，ある程度本質を衝いたものになっていると思われる．

ここで述べたことを，自分のことに当てはめてみる.「はじめに」のところで,『1 日の長さが，30 時間くらいあったら』というのは，かなり誇張で，実際は，26 時間くらいがちょうどよいと思っている．これは，今もそうだが，子供のころからそうであった．その証拠に，休みの日は，いつも昼まで寝ていた．しかし，子供のときは適応力があったので，小学校から大学まで普通に通うことができた．したがって，私の固有角速度は $\omega_a = 2\pi \times (24/26)/\mathrm{day}$ ということになる．隠居の身となったいまは，適応力がなくなったせいもあるが，時間に縛られないことをよいことにして，普通の人より，1/4 日ほど遅れた生活をしている．これはほとんど限界値に近く，$\omega_a \approx \omega_0/(1+e)$ で，これから適応力 e を求めると，$e \approx 1/12$ となる．なんと情けなや.

6　付録： 初期条件について

(4.1) 式のところで，初期条件に合わせることができない一般解が存在することは不思議であり，かつ驚きでもあった．これは元の解くべき方程式が非線形なので，このようなおかしなことが起こるのかもしれない．しかし，方程式 (2.1) を，数値的に初期条件付きで解くことは可能なので，解析的にも初期条件に合わせた解は必ず存在するはずである．(3.7) 式で挙げた公式は「数学公式 1」(岩波全書) p.188 の一番下に書いてある公式で，この公式のうち，$a^2 > b^2$ の場合は，同じページの一番上にある公式から，対数の中の絶対値が付く部分の中身を負として導出することができる．もしこれを正として導出すると，arctanh の部分が arccoth に替わる．それにしたがって，(4.1) 式の左辺の tanh が coth に替わり，t_0 を求めることが可能になる．初め，このことに気付かずに，かなり悩んでしまったが，これで謎は解けた．やはり別解があったのだ．これは，公式集に，何の断わりもなく，2 通りあるうちの片方だけを載せておくのが悪いのではと思ったが [4]，公式集を鵜呑みにする方も悪いのかもしれない．この 2 つの解が存在することは，公式,

$$\frac{d\,\mathrm{arctanh}(x)}{dx} = \frac{d\,\mathrm{arccoth}(x)}{dx} = \frac{1}{1-x^2}$$

に起因する．ここで，これを 1 本の式として書いてしまったが，また 1 つ疑問が湧いてくる．arctanh と arccoth では定義域がまったく異なる．arctanh の定義域は，-1 より大きく，1 より小さい領域，arccoth のそれは，1 より大きいか，または，-1 より小さい領域である．これまで定義域のことは気にかけずにきたが，これで正しかったのかが疑問である．しかし，この定義域が問題になるのは，途中の (3.10) 式のところで，結果の (3.12) 式になるとまったく問題はなくなる．そこで，(3.12) 式で得た解 ϕ を，元の方程式 (3.5) に代入してみるとこれは確かに満たされる．また，(3.12) 式で tanh を coth に替えたものも同じく方程式 (3.5) を満たすことが確かめられる．したがって，2 つの解が存在することは間違いないことであるが，ここでは，ともかく，初期条件に合わせることはあきらめて，(3.7) の積分公式の方を採用したということである．変数の時間 t が十分に大きいときは，tanh も coth も，同じ値 1 に収束するので，もし別解の方を使ったとしても，t の値が小さいときを除いて，結果は同じものになるはずである．

[4] 別の積分公式であるが，同じ公式集の p.82 に $1/(ax^2+bx+c)$ の積分として，arctanh と arccoth の両方の場合が載っている．ここで扱った (3.7) 式の場合もこれら両方の場合を載せておくべきである．

なお，(3.17) 式の解 ϕ も方程式 (3.5) を満たすことはもちろんであるが，この式で tan を $-\cot$ に置き換えたものも方程式 (3.5) を満たすことが確かめられる．しかし，これは，公式 $\tan(x-\frac{\pi}{2}) = -\cot(x)$ によるもので，新しい独立解となるものではない.

[謝辞]

今回もこの原稿を書くにあたって，京都大学名誉教授の中西襄先生にご精読いただきました．初めの原稿段階では，方程式 (2.1) について，ほとんど説明なしに唐突にこの式を導入した書き方になっていたので,『なぜこの式になるのかを，より丁寧に説明すべき』というご指摘をいただきました．確かに，自分では分かっているつもりでも，他人から見ると分かり難くい書き方になっていました．そこで,「はじめに」のところで書いた箇条書き部分 (1) (2) (3) と「方程式の導入」のところの箇条書き部分 (A) (B) (C) を追加することにしました．これで，かなり分かり易いものになったと思います．ここに，謹んで感謝いたします.

分数幂微分に関係した積分変換とその応用

浅田明 [1]

Integral Transform Related with Fractional Calculus and Its Applications

Akira Asada[2]

はじめに

分数幂微分 $\dfrac{d^a}{dx^a} = (\dfrac{d}{dx})^a$ (cf.[6]) は破断現象の数理モデルなどで工学に、記憶のある事象の数理モデルとして金融工学などで使われ　最近では「宇宙の３Ｋ背景放射を記述するプランク分布からのごく僅かなずれ」を説明するのに使おうという試みもある。しかし日本語の数学の本ではあまりとりあげれていないようである。

筆者は「数理の玉手箱 : 藤井一幸編、遊星社　２０１０　に寄稿した「関数を $\frac{1}{2}$ 回微分する」([2]) で分数幂微分の入門的解説を試みライプニッツの公式などを説明したあと　最後に積分変換 $\mathcal{R}$;

$$\mathcal{R}[f(s)](x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^s}{\Gamma(1+s)} f(s)ds$$

を導入し $\dfrac{d^a}{dx^a}\mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{R}[\tau_a f(s)](x); \tau_a f(s) = f(s+a)$ を証明した。

$\mathcal{R}$ は豊富な性質を持っていて分数幂微分方程式 (cf.[7]) への応用もある。　中西先生傘寿記念研究会ではそれについて報告した。その時の講演原稿に少し手を入れたのが本稿である。まとめる機会を与えて頂いた中西先生と研究会関係者に感謝します。

目次

1　分数幂微分

$f(x)$ の n 階の不定積分は $\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt$ だから

$$I^a f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x (x-t)^{a-1} f(t)dt$$

で a 階の不定積分を定義する ($\Re a > 0$)。微分は

$$\frac{d^a}{dx^a} f = \frac{d^n}{dx^n} I^{n-a} f, \quad \frac{d^a}{dx^a} f = I^{n-a}(f^{(n)})$$

[1] 元信州大学
[2] asada-a@poporo.ne.jp

などで定義する（前のほうはリーマン-リュウビル、後のほうはカプトの分数冪微分と言い必ずしも一致しない)。

$I^a x^c = \dfrac{\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+c+a)}x^{c+a}$ だから　(x, c, a について解析接続して)

$$\frac{d^a}{dx^a}x^c = \frac{\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+c-a)}x^{c-a} \tag{1}$$

としこれを線形に拡張しても $f(x) = \sum_n b_n x^{c_n}$ の分数冪微分が定義される。x の範囲は正の実数とするか

$$x^a = |x|^a e^{ia\pi}, \quad x < 0$$

(または $|x|^a e^{-ia\pi}$). とする。また $x \in \mathbb{C}$ とするときの範囲は　$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$; $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 0\}$、あるいは多価を許して $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ などとする。

適当な定義域では $\{\dfrac{d^a}{dx^a} | a \in \mathbb{R}\}$ は 1 経数群になりその生成作用素は

$$\lim_{h \to 0} \frac{\frac{d^h}{dx^h} - I}{h} = \log(\frac{d}{dx})$$

である ([1],[9])。具体的には

$$\log(\frac{d}{dx})f(x) = -(\gamma f(x) + \int_0^x \log(x-t)\frac{df_+(t)}{dt}dt) \tag{2}$$

となる。ただし $f_+(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$　であり

微分は超関数の意味とする。

また $\tau_h f(x) = f(x+h)$ として

$$\frac{d^a}{dx^a}f(x) = \lim_{h \to +0} \frac{(\tau_h - I)^a}{h^a} f(x),$$
$$(\tau_h - I)^a = \tau_h(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a \cdots (a-n+1)}{n!}\tau_{-nh}),$$

でも定義できる (Grunwald-Letkoniv)。この定義から分数冪微分は a が自然数でなければ非局所的なことが解る。

2　積分変換 $\mathcal{R}$

積分変換 $\mathcal{R}$ を

$$\mathcal{R}[f(s)](x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^s}{\Gamma(1+s)} f(s) ds \tag{3}$$

で定義する。$x > 0$ とすれば　両側ラプラース変換 $\mathcal{L}[f(s)](y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ys} f(s) ds$ を使って

$$\mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{L}[\frac{f(s)}{\Gamma(1+s)}](-\log x)$$

と書ける。積分変換 $\mathcal{N}$ を

$$\mathcal{N}[f(s)](x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(s) ds = \mathcal{L}[f(s)](-\log x)$$

で定義すれば　$\mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{N}[\dfrac{f(s)}{\Gamma(1+s)}](x)$ である。

定理。$\dfrac{f(s)}{\Gamma(1+s)}$ が急減少なら

$$\frac{d^a}{dx^a}\mathcal{R}[f(s)](x)=\mathcal{R}[\tau_a f(s)](x)(=\mathcal{R}[f(s+a)](x)) \tag{4}$$

が成立する。

証明。仮定と (1) から

$$\begin{aligned}&\frac{d^a}{dx^a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^s}{\Gamma(1+s)}f(s)ds\\ &=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+s-a)}\frac{x^{s-a}}{\Gamma(1+s)}f(s)ds\\ &=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^t}{\Gamma(1+t)}f(t+a)dt,\quad t=s-a\end{aligned}$$

だから (4) が成立する。

この証明では a は実数としている。複素数 $u+iv$ のときは

$$\frac{d^a}{dx^a}\mathcal{R}[f]=\int_{-\infty-iv}^{\infty-iv}\frac{x^s}{\Gamma(1+s)}f(s+a)ds$$

となるが　$|f(x)|\le Ae^{-B|x|^2}$, $|\Im x|\le|v|$ であれば (4) は成立する。
また (4) から

$$\log(\frac{d}{dx})\mathcal{R}[f(s)](x)=\mathcal{R}[\frac{df(s)}{ds}](x)$$

も成立する。

(4) が成り立つには定理の仮定は必要ではない。しかし関数の範囲での $\mathcal{R}$ の適当な定義域は解っていない。

f が関数でなくても $\mathcal{R}$ が定義され　(4) が成り立つ場合がある。$\delta_c=\delta(s-c)$ とすれば

$$\mathcal{R}[\delta_c]=\frac{x^c}{\Gamma(1+c)} \tag{5}$$

だから c が負の整数でなければ

$$\begin{aligned}\frac{d^a}{dx^a}\mathcal{R}[\delta_c]&=\frac{1}{\Gamma(1+c)}\frac{\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+c-a)}x^{c-a}\\ &=\mathcal{R}[\delta_{c-a}]=\mathcal{R}[\tau_a\delta_c]\end{aligned}$$

となって (4) が成立する。c が負の整数のときは $\mathcal{R}[\delta_{-n}]=0$ なので (4) は成立しない。

なお物理の人には迂遠かもしれないが（5）は次のように計算ができる。超関数の意味で $\lim_{t\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-t(s-a)^2}=\delta_a$ となる。また $x^s=e^{s\log x}$ から

$$x^se^{-t(s-a)^2}=e^{-t(s-a-\frac{\log x}{2t})^2(a\log x-\frac{(\log x)^2}{4t})},$$

である。よって $\mathcal{N}[\dfrac{e^{-(t-a)^2}}{\sqrt{\pi t}}]=x^{a-\frac{\log x}{4t}}$ である。これと

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^s}{\Gamma(1+s)}\frac{e^{-t(s-a)^2}}{\sqrt{\pi t}}ds=\lim_{t\to\infty}\int_{a=\epsilon}^{a+\epsilon}\frac{x^s}{\Gamma(1+s)}\frac{e^{-t(s-a)^2}}{\sqrt{\pi t}}ds$$

から (5) が従う ([4])。

$\mathcal{R}[\delta_{-n}] = 0$ だが $\mathcal{R}_+[f](x) = \int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x_+^s}{\Gamma(1+s)} f(s)ds$ とすれば

$$\mathcal{R}_+[\delta_{-n}] = \delta^{(n-1)} (= \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \delta)$$

である。$\dfrac{d^a}{dx^a}(\dfrac{d^b}{dx^b}\mathcal{R}[\delta_c]) = \dfrac{d^{a+b}}{dx^{a+b}}\mathcal{R}[\delta_c]$ は必ずしも成立しないが $\dfrac{d^a}{dx^a}(\dfrac{d^b}{dx^b}\mathcal{R}_+[\delta_c]) = \dfrac{d^{a+b}}{dx^{a+b}}\mathcal{R}_+[\delta_c]$ は常に成立する。

$\mathcal{R}_+$ を正の実軸上の二乗可積分関数のヒルベルト空間での線形作用素と見たときは

$$\mathcal{R}_+^\dagger[g(x)](s) = \frac{1}{\Gamma(1+s)} \mathcal{M}[xg(x)](s),$$
$$\mathcal{M}[h(x)](s) = \int_0^\infty x^{s-1} h(x) dx$$

となる。また逆は

$$\mathcal{R}_+^{-1}[g(x)](s) = \frac{\Gamma(1+s)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-its} g(e^{it}) dt$$

で与えられるが　この場合 $g(e^{it})$ は多価関数と見る必要がある。

3　$\mathcal{R}$ と拡張されたボレル変換

$f(z) = \sum_n c_n z^n$ のとき　そのボレル変換 $\mathcal{B}[f]$ は

$$\mathcal{B}[f] = \sum_n \frac{c_n}{n!} z^n = \frac{1}{2\pi i} \oint e^{\frac{z}{\zeta}} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta$$

で定義され

$$\frac{d}{dz}\mathcal{B}[f] = \mathcal{B}[\zeta^{-1} f], \quad \mathcal{B}[fg] = \mathcal{B}[f] \sharp \mathcal{B}[g],$$

$u \sharp v = \frac{d}{dx} \int_0^x u(x-t)v(t)dt$ となる ([1],[8])。

代数的には $\mathcal{B}$ は　正則関数の芽の環 $\mathcal{O}$ から有限指数型 ($|f(z)| \le Me^{C|z|}$ となる $A > 0, B > 0$ がある整関数）の空間に $\sharp$-積をいれた環 $\mathsf{F}_{\exp}$ への環同型である。

$\mathcal{B}$ の逆 $\mathcal{B}^{-1}$ は

$$\mathcal{B}^{-1}[f(t)](x) = \int_0^\infty e^{-t} f(xt) dt$$

で与えられるが　$f \notin \mathsf{F}_{\exp}$ でも $\mathcal{B}^{-1}[f]$ が定義できることがある。たとえば

$$\mathcal{B}^{-1}[x^c] = \Gamma(1+c)x^c, \quad \mathcal{B}^{-1}[\log x] = \log x - \gamma$$

である。これから

$$\mathcal{B}[x^c] = \frac{x^c}{\Gamma(1+c)}, \quad \mathcal{B}[\log x] = \log x + \gamma \tag{6}$$

と定義してボレル変換を拡張する ([1])。公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \overbrace{\log x \sharp \cdots \sharp \log x}^{n} = \frac{e^{-\gamma t}}{\Gamma(1+t)} x^t$$

が成り立つので $f \in \mathsf{F}_{\exp}$ のとき $f(\log x)$ となる関数に対してはボレル変換が拡張でき

$$\frac{d^a}{dx^a}\mathcal{B}[F] = \mathcal{B}[x^{-a} f], \quad \log(\frac{d}{dx})\mathcal{B}[f] = -\mathcal{B}[\log x f] \tag{7}$$

が成り立つ。(5), (6) から $\mathcal{R}[\delta_c] = \mathcal{B}[x^c]$ となるがさらに

命題 ([4])。分解 $\mathcal{R} = \mathcal{B} \circ \mathcal{N}$ が成り立つ。

この命題から　拡張されたボレル変換では $\mathcal{B}[x^{-n}] = 0$ である。このことは定数係数微分方程式の解の構成に使えるが　上の分解を使って変換

$$\mathcal{B}_+ = \mathcal{R}_+ \circ \mathcal{N}^{-1}$$

を導入すれば $\mathcal{B}_+[x^c] = \mathcal{R}_+[\delta_c]$ となり $\mathcal{B}_+[x^{-n}] = \delta^{(n-1)}$ である。

多変数の場合　原点の近傍でのピゾー型展開がかならずしも一意でないという問題がある。たとえば

$$\frac{1}{x^a - y^a} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} x^{-(n+1)a} y^{na}, & |x| > |y|, \\ -\sum_{n=1}^{\infty} x^{na} y^{-(n+1)a}, & |x| < |y|. \end{cases}$$

だから形式的には

$$\begin{aligned} &\mathcal{B}[\frac{1}{x^a - y^a}] \\ &= \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{-(n+1)a} y^{na}}{\Gamma(1-(n+1)a)\Gamma(1+na)}, & |x| > |y|, \\ -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{na} y^{-(n+1)a}}{\Gamma(1+na)\Gamma(1-(n+1)a)}, & |x| < |y|. \end{cases} \end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(1+na)\Gamma(1-(n+1)a)} \\ =&\frac{\Gamma(1+(n+1)a)}{\Gamma(1+na)} \frac{\sin((n+1)a\pi)}{\pi} \end{aligned}$$

だから　この形式的展開は領域

$D_+ = \{(x,y) | |x| < |y|\}$, $D_- = \{(x,y) | |x| > |y|\}$ の原点の近傍で意味がある。$z = (x, e^{i\theta} x)$ では z_n が $D_\pm$ の中から z に近づくときそれぞれ

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{x^a} (\sum_{n=0}^{N} \frac{\Gamma(1+(n+1)a) e^{na\theta}}{\Gamma(1+na)} \frac{\sin((n+1)a\pi)}{\pi}),$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{e^{-a\theta}}{x^a} (\sum_{n=0}^{N} \frac{\Gamma(1+(n+1)a) e^{-na\theta}}{\Gamma(1+na)} \frac{\sin((n+1)a\pi)}{\pi})$$

となるから接続の問題はこれらの極限の問題に帰着される。

4　定数係数分数冪微分方程式

I^a は　ボルテラ型積分作用素だから $\Re a_1 > 0$, $\Re a_1 > \Re a_2 \geq ,,, \geq \Re a_n$ であれば

$$(\frac{d^{a_1}}{dx^{a_1}} + c_2 \frac{d^{a_2}}{dx^{a_2}} + \cdots + c_n \frac{dx^{a_n}}{dx^{a_n}}) y = g(x)$$

は　ボルテラ型積分方程式 $y + Vy = G$, $\dfrac{d^{a_1}}{dx^{a_1}} G = g$;

$$Vy = \int_0^x (\sum_{k=2}^{n} \frac{c_k}{\Gamma(a_1 - a_k)} (x-t)^{a_1 - a_k}) y(t) dt$$

に帰着されるので G が

$$x^{a_1-a_2}G(x) = O(x^{\alpha}), \quad \alpha > -1$$

であれば解ける。$g(x) = 0$ であれば

$$G(x) = x^{a_1-m}, \quad \Re(2a_1 - a_2) - m > -1$$

ととれる。しかしこの計算は

$$\frac{d^a}{dx^a}(\frac{d^b}{dx^b}f(x)) = \frac{d^{a+b}}{dx^{a+b}}f(x)$$

を使っているので解は正の実軸上でしか定義されない。以下では $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ での解を考える。

$L = \sum_n c_n\frac{d^{a_n}}{dx^{a_n}}$, $y = \mathcal{R}[u]$ であれば方程式

$$Ly = \mathcal{R}[\sum_n c_n u(s + a_n)]$$

だから $Ly = \mathcal{R}[v]$ は $\sum_n c_n u(s + a_n) = v$ に帰着されるが指数関数や周期関数に対しては（シュワルツ超関数の範囲では）$\mathcal{R}$ が定義できないのでこの変形は使いにくい。しかし y を離散デルタポテンシャル $\sum_n b_n\delta_{a_n}$, $\{a_n\}$ は離散集合, とすれば $\mathcal{R}$ を定数係数分数冪微分方程式を解くのに利用できる。

以下では $\Re a > 0$ とする。

$y = \mathcal{R}[\sum_n b_n\delta_{a_n}]$ であれば

$$\frac{d^a}{dx^a}\mathcal{R}[\sum_n b_n\delta_{a_n}] = \mathcal{R}[\sum_n b_n\delta_{a_n-a}]$$

だから $E_{a,n,\lambda} = \sum_{m=1}^{\infty}\lambda^m\delta_{am-n}$ とすれば $\mathcal{R}[\delta_{-n}] = 0$ によって

$$\frac{d^a}{dx^a}\mathcal{R}[E_{a,n,\lambda}] = \lambda\mathcal{R}[E_{a,n,\lambda}]$$

である。n は a が無理数なら任意の自然数, $a = \frac{q}{p}, (p, q) = 1$ であれば $1 \le n \le q$, とすればこれらの方程式

$$\frac{d^a}{dx^a}y = \lambda y \tag{8}$$

の解は独立である。

拡張されたボレル変換を使えば

$$\mathcal{R}[E_{a,n,\lambda}] = \mathcal{B}[\sum_m \lambda^m x^{am-n}] = \mathcal{B}[\frac{1}{x^n(1-\lambda x^a)}]$$

となる。また拡張されたミッターハ・レフラー関数 $E_{a,b}(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{\Gamma(ma+b)}$ ([5]) を使えば

$$\mathcal{R}[E_{a,n,\lambda}] = x^{a-n}E_{a,1+a-n}(\lambda x^a)$$

と書ける。

これから (8) に対する適切な境界条件としては

$$y(e^{-\pi i/a}) = y(e^{\pi i/a}) \quad (y(1) = y(e^{2\pi i/a}))$$

が考えられる。また a が正の実数のとき $\frac{d^a}{dx^a}$ を扱うヒルベルト空間としては

$$H_{a,n} = \{\sum_{m\ge1} c_m z^{am-n} | \sum_m |c_m|^2 < \infty\}$$

$$(z^{ap-n}, z^{aq-n}) = \frac{1}{2a\pi}\int_{-\pi/a}^{\pi/a} z^{ap-n}\bar{z^{aq}}^{-n}d\theta, \ z = e^{i\theta}$$

が適切である。この場合 $\dfrac{d^a}{dx^a}$ と掛け算作用素 x^a を変形消滅生成作用素として考えることも出来る (cf.[10])。

なお分数冪発展方程式

$$\frac{\partial^a}{\partial t^a}u(t,x)+D_x u(t,x)=0$$

をフーリエの方法で解く場合には $E_{a,n,\lambda}$ で n をそろえなければいけないので $n=1$ と取ることになる。

この結果は

$$P(\frac{d^a}{dx^a})=\sum_n c_n(\frac{d^a}{dx^a})^n,\quad P(X)=\sum_n c_n X^n$$

の形の方程式に

$$P(\frac{d^a}{dx^a})=\prod_k(\frac{d^a}{dx^a}-\lambda_k)^{m_k},\quad P(X)=\prod_k(X-\lambda_k)^{m_k}$$

と「因数分解」して使える。$\mathcal{B}[x^{-n}]=0$ を利用すれば解としては　ミッターハ・レフラー関数以外に

$$\mathcal{B}[\frac{1}{x^n(1-\lambda x^a)^k}],\ k>1$$

の形の関数も出てくる。

なおこの場合 $(\dfrac{d^a}{dx^a})^n$ は $\dfrac{d^{na}}{dx^{na}}$ には置き換えられない。例えば

$$(\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}})^2-1=(\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}-1)(\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}+1)$$

であり　$\dfrac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}x^{-1/2}=0$ だから

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}e_{1/2}(x)=e_{1/2}(x),\quad e_{1/2}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n/2-1}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

である。よって $(\dfrac{d^{1/2}}{dx^{1/2}})^2 e_{1/2}(x)=e_{1/2}(x)$ である。しかし $\dfrac{d}{dx}e_{1/2}(x)\neq e_{1/2}(x)$ である。

5　$\mathcal{R}[\delta_c^{(n)}]$ の計算

積分変換 $\mathcal{R}$ は関数を定義域にすると制限が強いうえに $\mathcal{R}[f]$ の計算も難しいし像に有用な関数が現れない。

それに対し定義域を離散な台を持つ超関数や一般化関数にとれば像としては有用な関数があらわれる ([3])。例えば

$$\mathcal{R}[\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n]=e^x$$

など。ただし離散デルタポテンシャル T に対し形式的に $\mathcal{R}[T]$ を計算すればいたるところ発散する級数が現れることもある。

次に $\mathcal{R}[\delta_c^{(n)}]$ を計算する。

$$\mathcal{R}[\delta_c]=\frac{x^c}{\Gamma(1+c)},$$

だから

$$\frac{\partial^n}{\partial c^n}\mathcal{R}[\delta_c]=\mathcal{R}[\frac{\partial^n}{\partial c^n}\delta_c]=\frac{\partial^n}{\partial c^n}(\frac{x^c}{\Gamma(1+c)})$$

である。$\dfrac{\partial}{\partial c}\delta_c = -\dfrac{\partial}{\partial s}\delta_c$ だから

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{R}[\delta_c^{(n)}] \\
=&(-1)^n(\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{d^k}{ds^k}\frac{1}{\Gamma(1+s)}|_{s=c}x^c(\log x)^{n-k})
\end{aligned} \tag{9}
$$

である。特に

$$
\mathcal{R}[\delta^{(n)}] = (-1)^n(\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}\alpha_{n-k}(\log x)^k) \tag{10}
$$

となる。ただし

$$
\frac{1}{\Gamma(1+s)} = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n s^n, \quad \alpha_0 = 1, \alpha_1 = \gamma, \ldots,
$$

とする ($k\alpha_k = \gamma\alpha_{k-1} - \zeta(2)\alpha_{k-2} + \cdots$ である)。また

$$
\mathcal{R}[\delta_{-n}^{(k)}] = 0 \tag{11}
$$

である。

ボレル変換 $\mathcal{B}$ との間には

$$
\mathcal{R}[\delta_c] = \mathcal{B}[x^c]
$$

の関係があったが さらに

$$
\mathcal{R}[\delta_c^{(n)}] = (-1)^n\mathcal{B}[x^c(\log x)^n] \tag{12}
$$

である。これは

$$
(-1)^n(\log(\frac{d}{dx})^n\mathcal{R}[\delta_c] = \mathcal{R}[\frac{\partial^n}{\partial c^n}\delta_c],
$$

と $\log(\dfrac{d}{dx})\mathcal{B}[f(s)] = -\mathcal{B}[\log s f(s)]$ からも解る。

6　離散な台をもつ超関数と分数冪オイラー型方程式

T が離散な台を持つ超関数なら

$$
T = \sum_{k=0}^{n}\sum_{m} a_{m,k}\delta_{c_m}
$$

と書ける。離散な台を持つ超関数全体の空間を $\mathsf{D}_{\mathbb{R}}$（または $\mathsf{D}_{\mathbb{C}}$) とすれば $\mathcal{R}(\mathsf{D}_{\mathbb{R}})$ は $\{x^c|c \in \mathbb{R}\}$ と $(\log x)^n, n = 1, 2, \ldots, \}$ で生成される空間である。$\mathsf{D}_{\mathbb{R}}$ の位相は $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ から誘導されたものとする。$\mathsf{D}_{\mathbb{R}}$ 等には平行移動作用素 τ_a, 微分 $\dfrac{d}{dx}$ が働く。

(9) から形式的に

$$
\mathcal{R}[T] = \sum_{k=0}^{n}\sum_{m} b_{m.k}x^{c_m}(\log x)^k \tag{13}
$$

である。この形式和に一般化関数としての意味を与えるにはたとえば $x^c(\log x)^k$, $c \in \mathbb{C}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ から生成される $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間の双対空間の元とみれば良い。なお (11) から (13) の右辺には x^{-n} を含む項は現れない。

分数冪オイラー型微分方程作用素

$$
Ly = \sum_{n} c_n x^{a_n}\frac{d^{a_n}}{dx^{a_n}}y
$$

は　$Lx^q=\chi_L(q)x^q$;

$$\chi_L(q)=\sum_n \frac{\Gamma(1+q)}{\Gamma(1+q-a_n)}$$

となるから

$$\begin{aligned}&L(x^q(\log x)^k)\\ =&\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}(\frac{d^j}{dx^j}\chi_L(x))|_{x=q}x^q(\log x)^{k-j}\end{aligned}$$

である。よって q が χ_L の p-重根:

$$\chi_L(q)=\chi'_L(q)=\cdots=\chi_L^{(p-1)}(q)=0$$

であれば $L(x^q(\log x)^p)=0$ となる。この解は $\mathcal{R}(\mathsf{D}_{\mathbb{C}})$ に含まれるので分数冪オイラー微分を扱うには $\mathsf{D}_{\mathbb{C}}$ が $\mathcal{R}$ の定義域として適切である。

似た形だが

$$L^r y=\sum_n c_n(\frac{d^{a_n}}{dx^n a}x^{a_n})y$$

は全く違う方程式である。しかし解は

$$\chi_L^r(q)=\sum_n \frac{\Gamma(1+q+a_n)}{\Gamma(1+q)}$$

を用いて同様に求められる。

提案。$\mathcal{R}$ の定義域として $\mathsf{D}_{\mathbb{C}}$ または $\mathsf{D}_{\mathbb{R}}$ が適切である。

$\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ は離散な世界でそこに $\mathbb{C}$ が平行移動として働く。$\mathcal{R}$ はこれを連続（解析的）な世界に移し　そこでは平行移動が分数冪微分に変わる。これをどう解釈するかは問題だろう。

χ_L は有理関数でなければ（a_n に整数でない物があれば）無限遠点に真性特異点をもつ有理型関数である。この場合ピカールの大定理から　方程式 $\chi_L(q)=\lambda$ は高々 2 個の λ を除いて独立な無限個の解をもつ。従って整数階の時と違って、分数冪定数係数微分方程式と分数冪オイラー型微分方程式はかなり様子がちがうようである。

例と注意。これらの無限個の独立な解は　例えば

$$x^a\frac{d^a}{dx^a}u=\lambda u$$

では $a=1-\epsilon$ として解 x^q は

$$\frac{\Gamma(1+q)}{\Gamma(q+\epsilon)}=\lambda \tag{14}$$

となる q であたえられる。以下 λ は実数とし (14) の実根だけを考える。q が負の整数で無ければ

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\Gamma(1+q)}{\Gamma(q+\epsilon)}=q$$

であり $\epsilon>0$ としたとき $\lim_{q\to -n\pm 0}\frac{\Gamma(1+q)}{\Gamma(q+\epsilon)}=\mp\infty$
($\lim_{q\to -n+0}$ は q が $-n$ より大きい方から $-n$ に近づくという意味) だから (14) の解を $q(\epsilon)_1>q(\epsilon)_2>\cdots$ とすれば ϵ が十分小さければ $q(\epsilon)_2<0$,

$$q(\epsilon)_1>0,\ \lambda>0,\ q(\epsilon)_1=-\epsilon,\ \lambda=0,\ q(\epsilon)_1<0,\ \lambda<0$$

である。よってある k があって $\lim_{\epsilon\to 0} q(\epsilon)_k = \lambda$、それ以外の i では $\lim_{\epsilon\to 0} q(\epsilon)_i = -n$ である。この時 $x^{q(\epsilon)_i} \to x^{-n}$ だがこれは $\mathcal{R}(\mathsf{D}_{\mathbb{C}})$ にはふくまれない。

ラプラシアンの極座標表示での動径部分やブラック・ショールス方程式:

$$\frac{\partial C}{\partial t} - rC + \frac{1}{2}\big(\sigma^2 p^2 \frac{\partial^2 C}{\partial p^2} + rp\frac{\partial C}{\partial p}\big)$$

の価格部門はオイラー型だからこれらを分数冪化すれば分数冪オイラー型方程式になる。

7 $x = 0$ に確定特異点を持つ分数冪微分方程式

$\Re a > 0$ とする。

$$\begin{aligned} L =& x^{na} g_0(x)(\frac{d^a}{dx^a})^n + x^{(n-1)a} g_1(x)(\frac{d^a}{dx^a})^{(n-1)} + \cdots + g_n(x), \\ & g_k(x) = f_k(x^a),\ 0 \le k \le n, \\ & f_k(x) \text{ is holomorophic at } x = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

を $x = 0$ に確定特異点を持つ分数冪微分方程式とよぶことにする。

定義。L の特性関数 $\chi_L = \chi_L(q)$ を

$$\chi_L(q) = \sum_{k=0}^{n} f_k(0) \frac{\Gamma(1+q)}{\Gamma(1+q-ka)} \tag{16}$$

で定義する。

(15) から L が通常の確定特異点型を $x = 0$ にもつ常微分方程式なら特性関数は多項式である。

定理。$\chi_L(q) = 0,\ \chi_L(q+na) \ne 0, n \ge 1$ であれば $Ly = 0,\ y = x^q f(x^a),\ f$ は原点の近傍で正則となる解 y が存在する。

q が $\chi_L(q) = 0$ の位数 m の重根で $\chi_L^{(k)}(q+an) \ne 0,\ n \ge 1,\ 1 \le k \le m$ であれば

$$y = \sum_{k=0}^{m-1} x^q (\log x)^k f_k(x^a),$$

$f_k(x)$ は原点で正則　と言う形の $Ly = 0$ の解も存在する。

$\chi_{L+C}(q) = \chi_L(q) + C$ だから $Ly = \lambda y$ となる y については条件は $\chi_L(q) = \lambda,\ \chi_L(q+na) \ne \lambda,\ n \ge 1$ 等となる。

なおこれらの解は

$$x^{na} g_0(x) \frac{d^{na} y}{dx^{na}} + x^{(n-1)a g_1(x)} \frac{d^{(n-1)a} y}{dx^{(n-1)a}} + \cdots + g_n(x) y = 0$$

をみたす。

方程式

$$(\frac{d^{na}}{dx^{na}} x^{na} g_0(x)) y + \cdots + g_n(x) y = 0$$

も同様に扱えるが

$$\frac{d^a}{dx^a}(g(x)f(x)) = g(x)\frac{d^a f(x)}{dx^a} + a\frac{dg(x)}{dx}\frac{d^{a-1} f(x)}{dx^{a-1}} + \cdots$$

と a が整数でなければ無限和になるので方程式としては L と L^r は全く違う。

例。分数冪ベッセル微分方程式

. ベッセル微分方程式 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}+(x^2-\nu^2)y$ の分数冪化として

$$x^{2a}(\frac{d^a}{dx^a})^2+x^a\frac{d^a}{dx^a}+(x^{2a}-\nu^{2a})$$

を考える。この場合

$$\chi_L(q)=\frac{\Gamma(1+q)}{\Gamma(1+q-2a)}+\frac{\Gamma(1+q)}{\Gamma(1+q-a)}-\nu^{2a}$$

である。$\chi_L(q)=0,\ \chi_L(q+ka)\neq 0,\ k\geq 1$ であれば

$$c_{2n}\chi_L(q+2an)+c_{n-2}=0,\quad c_0=1,$$

すなわち

$$c_{2n}=c_{2n}(a)=(-1)^n\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\chi_L(q+2ka)}$$

として $y=y_{a,q}=x^q+\sum_{n=1}^\infty c_{2n}x^{2na+q}$ が $Ly=0$ の解となる。スターリングの公式から

$$|\chi_L(q+2ka)|=O(|2k\Re a|^{2\Re a}),\quad k\to\infty$$

だから $\sum_n c_{2n}x^{2n}$ は全平面で収束する。

a が 1 に近ければ $\lim_{a\to 1}q_a=\nu$ となる q_a が存在して $\lim_{a\to 1}y_{a,q_a}=2^\nu J_\nu(x)$ となるがそれ以外の解がどうなるかは問題である。

8 δ_c のテーラー展開と整関数の空間

$f(z)$ が整関数であれば $\sum_n \dfrac{c^n}{n!}f^{(n)}(0)=f(c)$ だから

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c^n}{n!})\delta^{(n)}f(z)dz=\int_{-\infty}^{\infty}\delta_c f(z)dz$$

とみられる　($\sum_{n=0}^\infty \dfrac{c^n}{n!}\delta^{(n)}$ はシュワルツの意味では超関数でない)。

これを定式化するため $\mathsf{F}_{\rm exp}$, $\mathsf{F}_{\rm ent}$ を有限指数型と整関数の空間とする。

位相は $\mathsf{F}_{\rm ent}$ は全平面での広義一様収束、$\mathsf{F}_{\rm exp}$ では　関数列 $\{f_n(z)\}$ が　すべての n について $|f_n(z)|\leq Me^{R|z|}$ となる $M>0, R>0$ が存在して　全平面で広義一様収束するとき収束と定義して入れる。こう定義すればこれらの空間は位相空間として完備になる。

集合としては $\mathsf{F}_{\rm exp}$ は $\mathsf{F}_{\rm ent}$ の部分集合だが位相空間としては部分空間ではない。いずれの空間でも　部分集合 $\{z^n|n\in\mathbb{N}\}$ で張られる部分空間は稠密になる。

$\{z^n|n\in\mathbb{N}\}$ が稠密だから $T\in\mathsf{F}^\dagger_{\rm exp}$, または $T\in\mathsf{F}^\dagger_{\rm ent}$ であれば T は $T(\,z^{\,n}),\, n\in\mathbb{N}$ で定まる。

$f(z)=\sum_n b_nz^n$ なら $T[f(z)]=\sum_n b_nT(z^n)$ だから

$$T^\natural=\sum_n\frac{T(z^n)}{n!}\delta^{(n)}$$

とおけば $T^\natural[f]=T[f]$ である。これから

$$\mathsf{P}_{\rm exp}=\{\sum_n c_n\delta^{(n)}|\sum_n c_nz^n\in{\rm Exp}(\mathbb{C})\},$$

$$\mathsf{P}_{\rm ent}=\{\sum_n c_n\delta^{(n)}|\sum_n c_nz^n\in{\rm Ent}(\mathbb{C})\}$$

とおけば $T\in\mathsf{P}_{\rm exp}$ 等を $\mathsf{F}_{\rm ent}$ 等の上の一般化関数と解釈して

$$\mathsf{F}_{\rm ent}^{\dagger}\cong\mathsf{P}_{\rm exp},\quad \mathsf{F}_{\rm exp}^{\dagger}\cong\mathsf{P}_{\rm ent}$$

である。$\mathsf{P}_{\rm exp}$ では

$$\frac{d}{dx}(\sum_n c_n\delta^{(n)})=\sum_n c_n\delta^{(n+1)},$$
$$\tau_a(\sum_n c_n\delta^{(n)})=(\sum_n\frac{a^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n})(\sum_n c_n\delta^{(n)})$$

で τ_a と $\dfrac{d}{dx}$ が定義される。これから $\delta_c\in\mathsf{P}_{\rm exp}$, $c\in\mathbb{C}$ だが $\mathsf{D}_{\mathbb{C}}\subset\mathsf{P}_{\rm exp}$ ($\mathsf{D}_{\mathbb{C}}\subset\mathsf{P}_{\rm ent}$) は言えない。

定理。$T\in\mathcal{P}_{\rm exp}$ であれば $\mathcal{R}[T]$ は $\log x$ の有限指数型関数である。

証明。$\sum_n c_n\delta^{(n)}\in\mathsf{P}_{\rm exp}$　とすれば　形式的に

$$\mathcal{R}[\sum_n c_n\delta^{(n)}]=\sum_n c_n(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^n n!}{(n-k)!}\alpha_k(\log x)^{n-k})$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\sum_{n=k}^{\infty}(-1)^n n!c_n\alpha_{n-k})(\log x)^k)$$

である。仮定から $|c_n|\le\dfrac{MR^n}{n!}$ となる $M>0,R>0$ が存在する。よって

$$|\sum_{n=k}^{\infty}(-1)^n n!c_n\alpha_{n-k}|\le MR^k\sum_{n=k}^{\infty}R^{n-k}|\alpha_{n-k}|$$

となる。ここで $\dfrac{1}{\Gamma(1+s)}$ は全平面で正則だから　この右辺の和は存在する。よって $\mathcal{R}[\sum_n c_n\delta^{(n)}]=\sum_k b_k(\log x)^k$ とおけば $|b_k|\le\dfrac{CR^k}{k!}$ となって

$$\mathcal{R}[T]=f(\log x),\quad f(x)\in\mathsf{F}_{\rm exp}$$

である。

$$\mathsf{F}_{\rm exp}^{\log}=\{f(\log x)|f(x)\in\mathsf{F}_{\rm exp}\}$$

とおけば　$\mathcal{R}[\mathsf{P}_{\rm exp}]=\mathcal{B}[\mathsf{F}_{\rm exp}^{\log}]$ だから

$$\mathcal{B}[\mathsf{F}_{\rm exp}^{\log}]=\mathsf{F}_{\rm exp}^{\log}$$

も導かれる。従って有限指数型関数 $f(x)$ によって $f(\log x)$ と書ける関数に対しては拡張されたボレル変換は関数になる。また

$$\frac{d^a}{dx^a}\mathcal{B}[T]=\mathcal{B}[\tau_a T],\quad T\in\mathsf{P}_{\rm exp}$$

も成立する。原点の近傍での正則関数は必ずしも $\mathsf{F}_{\rm exp}^{\log}$ に含まれないので　拡張されたボレル変換の定義域としては

$$\mathsf{B}_{\rm ext}=\mathcal{O}\times_{\sharp}\mathsf{F}_{\rm exp}^{\log}$$

が適切である。ただし $A\times_{\sharp}B$ は A, B から $\sharp$ 積で生成された代数を表す。また $\mathcal{O}\cap\mathsf{F}_{\rm exp}^{\log}\ne\{0\}$ だからこれをどう扱うかも問題になる。

この代数に適当な位相を入れて拡張されたボレル変換の定義域を拡張するのは今後の問題である。またこれに対応して $\mathsf{P}_{\rm exp}$ と $\mathsf{D}_{\mathbb{C}}$ から生成されるベクトル空間 (この場合も $\mathsf{P}_{\rm exp}\cap\mathsf{D}_{\mathbb{C}}\ne\{0\}$) に適当な位相を入れて, それを $\mathcal{R}$ の定義域とするのも今後の問題である。

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ であれば $T[f]=\sum_{n=0}^{\infty} b_n T(z^n)$ だから

$$T^{\natural}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}\delta^{(n)}$$

とおけば $T^{\natural}[f]=T[f]$ である。

参考文献

[1] Asada,A.: Some extension of Borel transformation, J.Fac. Sci. Shinshu Univ 9(1974), 71-89. . Borel Transformation in non-analytic category, J.Fac.Sci. Shinsyu Univ. 12(1977), 1-36.

有利型関数の Borel 変換、森本光生編「フーリェ超関数と偏微分方程式」　数理研講究録４５９、122-138. 京大 数理解析研究所、1982.

[2] 浅田　明.:関数を $\frac{1}{2}$ 回微分する。藤井一幸編「数理の玉手箱」 90-131. 遊星社. 2010.

[3] Asada,A.: Integral transform arose from fractional calculus and discrete delta potential, Contemporary Topics in Mathematics and Statics with Applications, ed. Adhikari, M. R. Chapter 3. Kolkata, 2013.

[4] Asada,A.: Extended Borel transform and fractional calculus, in Fractional Calculus: History, Theory and Applications, eds. Daou, R. Xavier,M. Nova Publishers, 2014.

[5] Erdéli, A. Magnus, W. Oberbettinger,F. Tricomi, F.G.: Higher Transcendental Functions, Chpa.18. New York 1981.

[6] Hermann,R.: Fractional Calculsu - An Introduction for Physicists, World Sci. 2011.

[7] Kilbas, A.A. Srivastra,H.M. Trujillo,J.J.: Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Amsterdam, 2006.

[8] Martineau, A.: Sur les fonctionelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel, J. Ann. Math.11(1963), 1-164.

[9] Naknishi,N.: Logarithmic type functions of the differential operator, Yokohama J. Math. 55(2010), 149-163.

[10] Purishshay, M..S.: Deformed Heisenberg Algebras, Fractional Spin Fields and Supersymmetry without Fermions, Ann. Phys. 245(1996), 339-360.

編集後記

まだ寒いと思っていたら，花見の時期はすぐに過ぎて行きます．これは東北と北海道ではまだ実感できないかもしれませんが，松山などではそういうふうに感じられる今日このごろです．

5巻3号を3月中には出せませんでしたが，ちょっと気力が回復してきたので，5巻3号を思いついて発行することにしました．それで，今号の編集後記は新関さんが書く順番だったのですが，矢野が書きました．新関さん，すみません．急に思いついたことなのです．

今回からpdfのファイルを結合させるという方法で編集を行います．そのために各論文が独立性を保つことができるようになりました．この方法を教えて下さった世戸さんに感謝します．それに伴って詳細な目次のページがなくなりましたので，各論文にそれぞれ目次を入れました．これは浅田先生がされていた方法に倣ったものです．

今回の編集方針の変更は各著者が自分の裁量でもって自由に論文が書けるようになるという点ではいいのですが，統一性をそのために欠くという欠点もあります．また，全体のlatexファイルをつくらないためにいろいろのミスをしばらく続けるだろうと思います．

各投稿者に前もって通信の発行前には原稿の確認をお願い致しますが，編集者も慣れないものですから，思わぬポカをすることが起こるかもしれません．それで著者の方々としては編集者のポカにイライラが募ることでしょうが，過渡期としてご辛抱をお願いします．一番のイライラを起こしているのは編集者の私なのですから．

（矢野　忠）