数学・物理通信

5巻5号　　2015年6月

編集　新関章三・矢野　忠

2015 年 6 月 1 日

目次(Contents)

四元数（補遺2）

— 四元数とベクトル空間 —

矢野　忠 [1]

The Quaternions (Appendix 2)

Tadashi YANO[2]

目次

1　はじめに

四元数（補遺 2）として [3]，Pauli 行列の導出について書こうかと思ったのだが，第 2 回目として「四元数とベクトル空間」について書く．

これは私がはじめに感じた大きな困難がここにあったからである．個人的な経験でもあり，一般性があまりないかもしれないが，意外に普遍性があるのかもしれない．

2　なにがわからなかったか

ポントリャ―ギンは『数概念の拡張』 [2] の第 4 章のまえがきに「4 元数の研究に必要なベクトル空間についてのいくつかの事柄について述べておく．それは 4 元数全体が 4 次元のユークリッド・ベクトル空間になっているからである」と述べている．

その後の 1 節と 2 節にベクトル空間とユークリッド・ベクトル空間 [4] の標準的な記述がある．そして，3 節になって 4 元数の説明になるのだが，そのはじめの部分が私には理解できなかった．

> 4 元数は実数に 1 つではなく 3 つの虚数単位をつけ加えることによって得られる．これらの虚数単位は
>
> $$i, j, k \tag{2.1}$$
>
> と表され，おのおのの 4 元数 x は
>
> $$x = x^0 + x^1 i + x^2 j + x^3 k \tag{2.2}$$
>
> という形で書き表される．ここに
>
> $$x^0, x^1, x^2, x^3 \tag{2.3}$$

[1]元愛媛大学工学部
[2]yanotad@earth.ocn.ne.jp
[3]このシリーズは『四元数の発見』 [1] の補遺として書かれている．
[4]線形代数の代表的な書である『行列と行列式』 [3] ではユークリッド・ベクトル空間という語は不適切であり,「計量的ベクトル空間」と呼んでいる．ここではポントリャーギンにしたがったが不適切と思われる方は読み替えをして下さい．

はすべて実数で，4 元数 x の成分を表している．**したがって，4 元数全体の集合 K^4 は**

$$1, i, j, k \tag{2.4}$$

を基底とする 4 次元ベクトル空間になっている *.（強調は引用者による）

* には訳者のつけた注があって，それもそのまま引用しておくと

これは

$$x^0 + x^1 i + x^2 j + x^3 k = 0 \Longleftrightarrow x^0 = x^1 = x^2 = x^3 = 0 \tag{2.5}$$

と決めるということである．

とある．これは $1, i, j, k$ が 1 次独立な基底であることを示している．ちょっとわかり難い気もするが，ここはまだいい．

この基底を正規直交基底とみなせば **，ベクトル空間 K^4 は **4 次元ユークリッド・ベクトル空間となる**.（強調は引用者による）

と述べている．4 元数がベクトル空間になることは理解できるが，この ** にも訳者注もついているのに，強調部分のところがまったく理解できなかった．

** の訳者注の部分もそれをそのまま引用すると

これは，単位の間のスカラー積を

$$\begin{aligned}
(1, i) = (1, j) = (1, k) = 0 \\
(i, j) = (j, k) = (k, i) = 0 \\
(1, 1) = (i, i) = (j.j) = (k, k) = 1
\end{aligned}$$

ときめるということである．

とある．これだけきちんと訳者注がついているのだから，わかるべきだったのだろうが，これが私を大きく迷いこませてしまった．

上の直交関係を四元数の元の間の積と混同してしまったからである．四元数の積では御存知のように

$$\begin{aligned}
1 \cdot i = 1 \cdot j = 1 \cdot k = 1 \\
ij = k, jk = k, ki = j \\
1 \cdot 1 = 1, i^2 = j^2 = k^2 = -1
\end{aligned}$$

である．ただし，**ここで $\cdot$ はスカラー積の意味ではなく単に数のかけ算を意味する**．このように誤解してしまうとポントリャーギンの権威も訳者の良識も疑わしくなってきて，理解不能になってしまった．しかたなくその点を棚上げして，四元数のシリーズを書き続けてきた．

本にまとめる段階でおよその原稿ができあがって，その原稿を読んでもらった閲読者の K さんから四元数の実部部分 R と虚数部分 I とが互いに直交補空間であることの定義がされていないとのコメントをされて，もう逃げることができなくなった．

3　四元数とユークリッド・ベクトル空間

以前から四元数を $w+xi+yj+zk$ と $1,i,j,k$ を用いて表す代わりに (w,x,y,z) と 4 つの実数の組で表されることは知っていた．

そうであれば

$$(w,x,y,z)=w(1,0,0,0)+x(0,1,0,0)+y(0,0,1,0)+z(0,0,0,1) \tag{3.1}$$

と $1,i,j,k$ の代わりに

$$1=(1,0,0,0) \tag{3.2}$$
$$i=(0,1,0,0) \tag{3.3}$$
$$j=(0,0,1,0) \tag{3.4}$$
$$k=(0,0,0,1) \tag{3.5}$$

と 1 行 4 列の行列で $1,i,j,k$ を表すことができる．そうすると四元数の積はこの表示では

$$(d,a,b,c)(w,x,y,z)=(dw-(ax+by+cz),aw+dx-cy+bz,bw+cx+dy-az,cw-bx+ay+dz) \tag{3.6}$$

と表される．ところがこれは四元数の積ではあるが，4 次元ユークリッド・ベクトル空間のスカラー積ではない．

複素数の場合にこれを 2 次元ベクトル空間として考えるときにはどのようにしているのだろうか．それでこのことを知るためには複素数の場合がどうであったかを知る必要があった．それで『複素数の幾何学』 [4] をとりだしてその第 5 章を読んだ．そして，ようやくユークリッド・ベクトル空間におけるスカラー積と複素数の積とは別の演算であることがわかった．

複素数の積は

$$(a+bi)(x+yi)=(ax-by)+(bx+ay) \tag{3.7}$$

で定義される．これはすでに既知である．一方，複素数を 2 次元ユクリッド・ベクトル空間と考えるにはそのスカラー積を定義しなければならない．

いま $a+bi$ を二つの実数の組 (a,b) で表せば，これは

$$(a,b)=a(1,0)+b(0,1) \tag{3.8}$$

と表すことができる．したがって 2 次元のベクトル空間の基底である $1,i$ を

$$1=(1,0),\quad i=(0,1) \tag{3.9}$$

と表せる．

いまスカラー積を

$$(a,b)\cdot(x,y)=ax+by \tag{3.10}$$

と定義すれば，

$$(1,0)\cdot(0,1)=0 \tag{3.11}$$
$$(0,1)\cdot(1,0)=0 \tag{3.12}$$
$$(1,0)\cdot(1,0)=1 \tag{3.13}$$
$$(0,1)\cdot(0,1)=1 \tag{3.14}$$

となることは直ちにわかる．これから複素数は 2 次元ユクリッド・ベクトル空間とみなせることがわかった．

注意をするまでもないだろうが，上の式は特殊な複素数の積

$$
\begin{aligned}
1i &= i \\
i1 &= i \\
1^2 &= 1 \\
i^2 &= -1
\end{aligned}
$$

とはちがう．3 番目の式は複素数の積とスカラー積の結果がたまたま一致しているが，それ以外は一致していないことからもわかる．

[4] にはスカラー積を定義してはいないけれども，このように 1 と i との直交性が定義されるのは明らかであるから，四元数の場合も同じように考えればよいことがわかった．すなわち，

$$(d, a, b, c) \cdot (w, x, y, z) = dw + ax + by + dz \tag{3.15}$$

とスカラー積を定義すればよいとわかった．

スカラー積がこのように定義されれば，四元数の全体が四次元のユークリッド・ベクトル空間であることはすぐにわかる．

前に挙げたスカラ—積

$$
\begin{aligned}
(1, i) = (1, j) = (1, k) &= 0 \\
(i, j) = (j, k) = (k, i) &= 0 \\
(1, 1) = (i, i) = (j, j) = (k, k) &= 1
\end{aligned}
$$

はすぐに確かめることができる．

$$(1, i) = (1, 0, 0, 0) \cdot (0, 1, 0, 0) = 0 \tag{3.16}$$
$$(1, j) = (1, 0, 0, 0) \cdot (0, 0, 1, 0) = 0 \tag{3.17}$$
$$(1, k) = (1, 0, 0, 0) \cdot (0, 0, 0, 1) = 0 \tag{3.18}$$
$$(i, j) = (0, 1, 0, 0) \cdot (0, 0, 1, 0) = 0 \tag{3.19}$$
$$(j, k) = (0, 0, 1, 0) \cdot (0, 0, 0, 1) = 0 \tag{3.20}$$
$$(k, i) = (0, 0, 0, 1) \cdot (0, 1, 0, 0) = 0 \tag{3.21}$$
$$(1, 1) = (1, 0, 0, 0) \cdot (1, 0, 0, 0) = 1 \tag{3.22}$$
$$(i, i) = (0, 1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0, 0) = 1 \tag{3.23}$$
$$(j, j) = (0, 0, 1, 0) \cdot (0, 0, 1, 0) = 1 \tag{3.24}$$
$$(k, k) = (0, 0, 0, 1) \cdot (0, 0, 0, 1) = 1 \tag{3.25}$$

私があまり好きでなかった，四元数の 4 つの実数の組による表示がこの場合には方向を明示してくれた．

ポンリャーギンにしてもその書の訳者にとってもこのことは当然のこととしてご承知であったが，ちょっとした説明の手間が省かれてあったために私には半年間の空白ができ，四元数の積の四次元のユクリーッド・ベクトル空間のスカラー積との混同が 1 年近くわたって続いた．

4　ベクトル空間

話の筋としてはベクトル空間の議論の後でようやくスカラ—積が定義されてユークリッド・ベクトル空間の話となるはずだが，話の都合で先にユークリッド・ベクトル空間の話が出てきた．そこでちょっと後戻りになるが，ベクトル空間についても触れておきたい．

ベクトル空間ではベクトルの和とベクトルへのスカラーの積が定義されればよい．

$$x = x^0 + x^1 i + x^2 j + x^3 k \tag{4.1}$$
$$y = y^0 + y^1 i + y^2 j + y^3 k \tag{4.2}$$

ならば

$$x + y = (x^0 + y^0) + (x^1 + y^1)i + (x^2 + y^2)j + (x^3 + y^3)k \tag{4.3}$$
$$ax = ax^0 + ax^1 i + ax^2 j + ax^3 k \tag{4.4}$$

が成り立つ．これらの演算はベクトル空間の公理としての条件はすべて満たしている．これは複素数の場合も同様である．

四元数が 4 次元のユクリッド・ベクトル空間であるためにはスカラー積が定義されればよい．不勉強な私は四元数のユクリッド・ベクトル空間としてのスカラー積の定義を文献上で見かけたことがない．私のもっている書籍だけでもよく探せば，その定義を見つけることができるのであろうが，いままでのところはそれもできていない．

もっとも四元数を 4 つの実数の組で表せば，4 次元ベクトルのスカラー積を定義することは自明のことであろう．ポントリャーギンとその著書の訳者がスカラー積の定義について触れていないとしても私の不明を恥ずべきであって，彼らには何の咎があるはずもない．ましてや，長々と私にこのような弁明の機会を与えてくれたことにむしろ感謝すべきであろう．

5　おわりに

四元数のシリーズの補遺の第 2 回はこれで終わりである．

ポントリャーギンの『数概念の拡張』にはきちんとかかれていることであるが，他の書には四元数がまたベクトル空間をなすことやそれにスカラー積を導入すれば，ユークリッド・ベクトル空間になることなどは四元数のことを取り扱った書でもポントリャーギンの書を除いてあまり書いてないような気がする．気がするとしか言えないのは私があまり文献を調べていないからである．

(2015.3.23)

参考文献

[1] 矢野　忠,『四元数の発見』（海鳴社，2014）

[2] ポントリャーギン（宮本敏雄，保坂秀正　訳）,『数概念の拡張』（森北出版，1995）32-66

[3] 佐武一郎,『行列と行列式』（掌華房，1958）117

[4] 片山孝次,『複素数の幾何学』（岩波書店，1982）217-226

Legendre 陪関数の直交性とその応用

世戸 憲治 [*1]

Orthogonality Relations of Associated Legendre Functions and Thier Applications

Kenji SETO[*2]

1 はじめに

現著者の「Legendre 関数と量子力学のポテンシャル問題 (1)」(「数学・物理通信」第 4 巻 8 号) で Legendre 陪関数に関するデルタ関数を用いた直交式,

$$\int_{-1}^{1} \frac{P_\nu{}^{-ik}(x) P_\nu{}^{ik'}(x)}{1-x^2} dx = \frac{2\left[\sin^2(\pi\nu) + \sinh^2(\pi k)\right]}{k\sinh(\pi k)} \delta(k-k') \tag{1.1}$$

および,

$$\int_{-1}^{1} \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\sigma}^{-ik}(x) P_{-\frac{1}{2}+i\sigma}^{ik'}(x)}{1-x^2} dx = \frac{2\left[\cosh^2(\pi\sigma) + \sinh^2(\pi k)\right]}{k\sinh(\pi k)} \delta(k-k') \tag{1.2}$$

を導いた．ここに，ν, σ は実数で，k, $k' > 0$ とする．

今回は，これとは別の Legendre 陪関数に関する直交性の式,

$$\int_{1}^{\infty} P_{-\frac{1}{2}+i\sigma}^{\ \mu}(z) P_{-\frac{1}{2}+i\sigma'}^{\ \mu}(z) dz = \frac{\Gamma(-i\sigma)\Gamma(i\sigma)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu-i\sigma)\Gamma(\frac{1}{2}-\mu+i\sigma)} \delta(\sigma-\sigma'), \qquad \Re(\mu) < 1 \tag{1.3}$$

および,

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_{-\frac{1}{2}+i\sigma}^{\ \mu}(-iz) P_{-\frac{1}{2}+i\sigma'}^{\ \mu}(iz) dz = \frac{2\cosh(\pi\sigma)\Gamma(-i\sigma)\Gamma(i\sigma)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu-i\sigma)\Gamma(\frac{1}{2}-\mu+i\sigma)} \delta(\sigma-\sigma') \tag{1.4}$$

を導く．ここに，第 1 種 Legendre 陪関数 $P_\nu{}^\mu(z)$ は Legendre 陪微分方程式

$$\left[\frac{d}{dz}(1-z^2)\frac{d}{dz} + \nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{1-z^2}\right] P_\nu{}^\mu(z) = 0 \tag{1.5}$$

を満たし，超幾何関数を用いて,

$$P_\nu{}^\mu(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\mu/2} F\left(-\nu,\, \nu+1,\, 1-\mu;\, \tfrac{1}{2}(1-z)\right) \tag{1.6}$$

または,

$$\begin{aligned} P_\nu{}^\mu(z) = \frac{(z^2-1)^{\mu/2}}{\sqrt{\pi}} \Bigg[&\frac{2^\nu \Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu-\mu+1)} z^{\nu-\mu} F\left(\tfrac{1}{2}(\mu-\nu+1),\, \tfrac{1}{2}(\mu-\nu),\, \tfrac{1}{2}-\nu;\, 1/z^2\right) \\ &+ \frac{\Gamma(-\nu-\frac{1}{2})}{2^{\nu+1}\Gamma(-\nu-\mu)} z^{-(\nu+\mu+1)} F\left(\tfrac{1}{2}(\nu+\mu)+1,\, \tfrac{1}{2}(\nu+\mu+1),\, \nu+\tfrac{3}{2};\, 1/z^2\right) \Bigg] \end{aligned} \tag{1.7}$$

[*1] 北海学園大学名誉教授
[*2] seto@pony.ocn.ne.jp

で定義される．なお，ここで扱う $P^{\ \mu}_{-\frac{1}{2}+i\sigma}(z)$ の形の Legendre 陪関数は特に《円錐関数》とも呼ばれるが，(1.6) 式からわかるように，常に $P_\nu{}^\mu(z) = P^{\ \mu}_{-\nu-1}(z)$ となるので，$P^{\ \mu}_{-\frac{1}{2}+i\sigma}(z) = P^{\ \mu}_{-\frac{1}{2}-i\sigma}(z)$ が成立する．したがって，以下ではこの σ を正として扱う．

次節では，この (1.3) (1.4) 式の証明を行い，第 3 節で，その応用として，O(2,1) 不変な運動エネルギーをもつ Schrödinger 方程式を解いてみる．

2　直交式の証明

2.1　(1.3) 式の証明

一般に異なる 2 個の ν，ν' に対する Legendre 陪関数 $P_\nu{}^\mu(z)$，$P_{\nu'}{}^\mu(z)$ が満たす微分方程式

$$
\begin{aligned}
&\Big[\frac{d}{dz}(1-z^2)\frac{d}{dz} + \nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{1-z^2}\Big]P_\nu{}^\mu(z) = 0 \\
&\Big[\frac{d}{dz}(1-z^2)\frac{d}{dz} + \nu'(\nu'+1) - \frac{\mu^2}{1-z^2}\Big]P_{\nu'}{}^\mu(z) = 0
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

を用意し，この第 1 式に $P_{\nu'}{}^\mu(z)$ を，第 2 式に $P_\nu{}^\mu(z)$ を掛けて辺々を引き算すると，

$$
\frac{d}{dz}\Big[P_{\nu'}{}^\mu(z)(1-z^2)\frac{dP_\nu{}^\mu(z)}{dz} - P_\nu{}^\mu(z)(1-z^2)\frac{dP_{\nu'}{}^\mu(z)}{dz}\Big] + (\nu-\nu')(\nu+\nu'+1)P_\nu{}^\mu(z)P_{\nu'}{}^\mu(z) = 0 \tag{2.2}
$$

となる．この式を z で 1 から ∞ まで積分すると

$$
\int_1^\infty P_\nu{}^\mu(z)P_{\nu'}{}^\mu(z)dz = \frac{1}{(\nu-\nu')(\nu+\nu'+1)}\Big[P_\nu{}^\mu(z)(1-z^2)\frac{dP_{\nu'}{}^\mu(z)}{dz} - P_{\nu'}{}^\mu(z)(1-z^2)\frac{dP_\nu{}^\mu(z)}{dz}\Big]\Big|_1^\infty \tag{2.3}
$$

となる．ここで，Legendre 陪関数の微分公式

$$
(1-z^2)\frac{dP_\nu{}^\mu(z)}{dz} = (\nu+1)zP_\nu{}^\mu(z) - (\nu-\mu+1)P^{\ \mu}_{\nu+1}(z) \tag{2.4}
$$

を使うと，

$$
\int_1^\infty P_\nu{}^\mu(z)P_{\nu'}{}^\mu(z)dz = \frac{1}{(\nu-\nu')(\nu+\nu'+1)}\Big[F(z)+G(z)\Big]\Big|_1^\infty \tag{2.5}
$$

となる．ここに，

$$
\begin{aligned}
&F(z) = -(\nu-\nu')zP_\nu{}^\mu(z)P_{\nu'}{}^\mu(z), \\
&G(z) = (\nu-\mu+1)P^{\ \mu}_{\nu+1}(z)P_{\nu'}{}^\mu(z) - (\nu'-\mu+1)P_\nu{}^\mu(z)P^{\ \mu}_{\nu'+1}(z)
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

と定義する．ここで，Legendre 陪関数の $z \to 1$ および，$z \to \infty$ の漸近形は，(1.6) (1.7) 式から，

$$
\begin{aligned}
&z \to 1, \quad P_\nu{}^\mu(z) \sim \frac{1}{\mathit{\Gamma}(1-\mu)}\Big(\frac{z-1}{2}\Big)^{-\mu/2}, \\
&z \to \infty, \quad P_\nu{}^\mu(z) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big[\frac{\mathit{\Gamma}(\nu+\frac{1}{2})}{\mathit{\Gamma}(\nu-\mu+1)}(2z)^\nu + \frac{\mathit{\Gamma}(-\nu-\frac{1}{2})}{\mathit{\Gamma}(-\nu-\mu)}(2z)^{-\nu-1}\Big]
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

となる．これらの式を用いて，初めに，$F(z)+G(z)$ の $z \to 1$ での漸近形を見積もると，

$$
F(z)+G(z) \sim -\frac{(\nu-\nu')2^\mu}{[\mathit{\Gamma}(1-\mu)]^2}(z-1)^{1-\mu} \tag{2.8}
$$

となる．これは，Legendre 陪関数の $z \to 1$ での漸近形が ν に依存しないことから，容易に導かれる．これが，$z \to 1$ でゼロとなるように，条件

$$\Re(\mu) < 1 \tag{2.9}$$

を設定すると，

$$F(z) + G(z) \xrightarrow{z\to 1} 0 \tag{2.10}$$

となる．つぎに，$z \to \infty$ での値を見積もるが，$P_\nu{}^\mu(z)$ が $z \to \infty$ を含む範囲で 2 乗可積分であるためには，ν の実部は $-1/2$ でなければならず，ここから先は，正なる σ, σ' を用いて，

$$\nu = -\tfrac{1}{2} + i\sigma, \qquad \nu' = -\tfrac{1}{2} + i\sigma' \tag{2.11}$$

とおくことにする．このとき，(2.6) 式の $F(z)$ は，$z \to \infty$ で，

$$\begin{aligned} F(z) \sim -\frac{i(\sigma-\sigma')}{2\pi}\Big[&\frac{\Gamma(i\sigma)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu+i\sigma)}(2z)^{i\sigma} + \frac{\Gamma(-i\sigma)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu-i\sigma)}(2z)^{-i\sigma}\Big] \\ &\times \Big[\frac{\Gamma(i\sigma')}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu+i\sigma')}(2z)^{i\sigma'} + \frac{\Gamma(-i\sigma')}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu-i\sigma')}(2z)^{-i\sigma'}\Big] \end{aligned} \tag{2.12}$$

となるが，この式の全体に付く，$i(\sigma - \sigma')$ は (2.5) 式に代入したときは消えてしまうこと，および，この大括弧をはずしたときの $(2z)^{\pm i(\sigma\pm\sigma')}$ は $z \to \infty$ で，超関数的にゼロとみなされるので，

$$F(z) \xrightarrow{z\to\infty} 0 \tag{2.13}$$

となることがわかる．一方，$G(z)$ の方は，$z \to \infty$ で，

$$\begin{aligned} G(z) \sim &\frac{\Gamma(1+i\sigma)}{\pi\Gamma(\frac{1}{2}-\mu+i\sigma)}(2z)^{i\sigma}\Big[\frac{\Gamma(i\sigma')}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu+i\sigma')}(2z)^{i\sigma'} + \frac{\Gamma(-i\sigma')}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu-i\sigma')}(2z)^{-i\sigma'}\Big] \\ &- \frac{\Gamma(1+i\sigma')}{\pi\Gamma(\frac{1}{2}-\mu+i\sigma')}(2z)^{i\sigma'}\Big[\frac{\Gamma(i\sigma)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu+i\sigma)}(2z)^{i\sigma} + \frac{\Gamma(-i\sigma)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu-i\sigma)}(2z)^{-i\sigma}\Big] \end{aligned} \tag{2.14}$$

となり，これを (2.5) 式に代入し，超関数公式

$$\lim_{M\to\infty} \frac{e^{\pm iMx}}{\pi x} = \pm i\delta(x) \tag{2.15}$$

を用いる．このとき，$\delta(\sigma + \sigma')$ に比例する項もでてくるが，ここでは，σ, $\sigma' > 0$ とするので効力がなくなり，結果として，(2.5) 式の積分は，

$$\int_1^\infty P^{\ \mu}_{-\frac{1}{2}+i\sigma}(z)P^{\ \mu}_{-\frac{1}{2}+i\sigma'}(z)dz = {N_1}^2(\mu,\sigma)\delta(\sigma-\sigma') \tag{2.16}$$

となる．ここに，規格化定数 ${N_1}^2(\mu,\sigma)$ は

$${N_1}^2(\mu,\sigma) = \frac{\Gamma(-i\sigma)\Gamma(i\sigma)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu-i\sigma)\Gamma(\frac{1}{2}-\mu+i\sigma)} \tag{2.17}$$

と定義される．これは，もちろん，正定値である．したがって，$P^{\ \mu}_{-\frac{1}{2}+i\sigma}(z)/N_1(\mu,\sigma)$ がデルタ関数の意味で規格化された固有関数ということになる．

2.2　(1.4) 式の証明

(2.1) 式で，変数 z を改めて，iz と置き直すと，

$$\begin{aligned}&\Big[-\frac{d}{dz}(1+z^2)\frac{d}{dz}+\nu(\nu+1)-\frac{\mu^2}{1+z^2}\Big]P_\nu{}^\mu(-iz)=0\\&\Big[-\frac{d}{dz}(1+z^2)\frac{d}{dz}+\nu'(\nu'+1)-\frac{\mu^2}{1+z^2}\Big]P_{\nu'}{}^\mu(iz)=0\end{aligned}\tag{2.18}$$

となる．ただし，この第 1 式では $P_\nu{}^\mu(iz)$ の複素共役をとった $P_\nu{}^\mu(-iz)$ にしておく．前と同じく，この第 1 式に $P_{\nu'}{}^\mu(iz)$ を，また，第 2 式に $P_\nu{}^\mu(-iz)$ を掛けて辺々を引き算すると，

$$\frac{d}{dz}\Big[P_\nu{}^\mu(-iz)(1+z^2)\frac{dP_{\nu'}{}^\mu(iz)}{dz}-P_{\nu'}{}^\mu(iz)(1+z^2)\frac{dP_\nu{}^\mu(-iz)}{dz}\Big]+(\nu-\nu')(\nu+\nu'+1)P_\nu{}^\mu(-iz)P_{\nu'}{}^\mu(iz)=0\tag{2.19}$$

となり，これを z で $-\infty$ から ∞ まで積分すると，

$$\int_{-\infty}^{\infty}P_\nu{}^\mu(-iz)P_{\nu'}{}^\mu(iz)dz=\frac{1}{(\nu-\nu')(\nu+\nu'+1)}\Big[P_{\nu'}{}^\mu(iz)(1+z^2)\frac{dP_\nu{}^\mu(-iz)}{dz}-P_\nu{}^\mu(-iz)(1+z^2)\frac{dP_{\nu'}{}^\mu(iz)}{dz}\Big]\Big|_{-\infty}^{\infty}\tag{2.20}$$

となる．ここで，(2.4) 式で z を iz とした，

$$-i(1+z^2)\frac{dP_\nu{}^\mu(iz)}{dz}=i(\nu+1)zP_\nu{}^\mu(iz)-(\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^\mu(iz)\tag{2.21}$$

を使うと，

$$\int_{-\infty}^{\infty}P_\nu{}^\mu(-iz)P_{\nu'}{}^\mu(iz)dz=\frac{1}{(\nu-\nu')(\nu+\nu'+1)}\Big[F(z)+G(z)\Big]\Big|_{-\infty}^{\infty}\tag{2.22}$$

ここに，

$$\begin{aligned}&F(z)=-(\nu-\nu')zP_\nu{}^\mu(-iz)P_{\nu'}{}^\mu(iz)\\&G(z)=i(\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^\mu(-iz)P_{\nu'}{}^\mu(iz)+i(\nu'-\mu+1)P_\nu{}^\mu(-iz)P_{\nu'+1}^\mu(iz)\end{aligned}\tag{2.23}$$

と定義する．これらの式で $z\to\pm\infty$ での値を見積もるために，(2.7) の第 2 式で，z を iz とした

$$P_\nu{}^\mu(iz)\sim\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big[\frac{\Gamma(\nu+\frac12)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}(2iz)^\nu+\frac{\Gamma(-\nu-\frac12)}{\Gamma(-\nu-\mu)}(2iz)^{-\nu-1}\Big]\tag{2.24}$$

を使い，前と同じく，ν, ν' を正の σ, σ' を用いて，

$$\nu=-\tfrac12+i\sigma,\qquad\nu'=-\tfrac12+i\sigma'\tag{2.25}$$

とおく．このとき，$F(z)$ の $z\to\pm\infty$ での漸近形は，

$$\begin{aligned}F(z)\sim-\frac{i(\sigma-\sigma')}{2\pi}&\Big[\frac{\Gamma(i\sigma)(-i)^{-\frac12+i\sigma}}{\Gamma(\frac12-\mu+i\sigma)}(2z)^{i\sigma}+\frac{\Gamma(-i\sigma)(-i)^{-\frac12-i\sigma}}{\Gamma(\frac12-\mu-i\sigma)}(2z)^{-i\sigma}\Big]\\&\times\Big[\frac{\Gamma(i\sigma')i^{-\frac12+i\sigma'}}{\Gamma(\frac12-\mu+i\sigma')}(2z)^{i\sigma'}+\frac{\Gamma(-i\sigma')i^{-\frac12-i\sigma'}}{\Gamma(\frac12-\mu-i\sigma')}(2z)^{-i\sigma'}\Big]\end{aligned}\tag{2.26}$$

となるが，この全体にかかる $\sigma-\sigma'$ は (2.22) 式に代入したときは消えてしまうこと，および，このときも，この式の大括弧をはずしたときの $(2z)^{\pm i(\sigma\pm\sigma')}$ は，$z\to\pm\infty$ のとき超関数的にゼロとみなされるので，

$$F(z) \xrightarrow{z\to\pm\infty} 0 \tag{2.27}$$

となる．一方，$G(z)$ の $z\to\pm\infty$ での漸近形は，

$$\begin{aligned}G(z) \sim & \frac{i\Gamma(1+i\sigma)}{\pi\Gamma(\frac{1}{2}-\mu+i\sigma)}(-2iz)^{\frac{1}{2}+i\sigma}\Big[\frac{\Gamma(i\sigma')}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu+i\sigma')}(2iz)^{-\frac{1}{2}+i\sigma'}+\frac{\Gamma(-i\sigma')}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu-i\sigma')}(2iz)^{-\frac{1}{2}-i\sigma'}\Big] \\ & +\frac{i\Gamma(1+i\sigma')}{\pi\Gamma(\frac{1}{2}-\mu+i\sigma')}(2iz)^{\frac{1}{2}+i\sigma'}\Big[\frac{\Gamma(i\sigma)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu+i\sigma)}(-2iz)^{-\frac{1}{2}+i\sigma}+\frac{\Gamma(-i\sigma)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu-i\sigma)}(-2iz)^{-\frac{1}{2}-i\sigma}\Big]\end{aligned} \tag{2.28}$$

となる．ここまでは，$z\to\infty$，$-\infty$ 共通であるが，この先は，$z\to\infty$ の場合と $z\to-\infty$ の場合に分け，また，$\pm i=e^{\pm(\pi/2)i}$ とおくことにして，

$$\begin{aligned}G(z) \sim & \pm\frac{\Gamma(1+i\sigma)e^{\pm\pi\sigma/2}}{\pi\Gamma(\frac{1}{2}-\mu+i\sigma)}(2|z|)^{i\sigma}\Big[\frac{\Gamma(i\sigma')e^{\mp\pi\sigma'/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu+i\sigma')}(2|z|)^{i\sigma'}+\frac{\Gamma(-i\sigma')e^{\pm\pi\sigma'/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu-i\sigma')}(2|z|)^{-i\sigma'}\Big] \\ & \mp\frac{\Gamma(1+i\sigma')e^{\mp\pi\sigma'/2}}{\pi\Gamma(\frac{1}{2}-\mu+i\sigma')}(2|z|)^{i\sigma'}\Big[\frac{\Gamma(i\sigma)e^{\pm\pi\sigma/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu+i\sigma)}(2|z|)^{i\sigma}+\frac{\Gamma(-i\sigma)e^{\mp\pi\sigma/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu-i\sigma)}(2|z|)^{-i\sigma}\Big]\end{aligned} \tag{2.29}$$

となる．ただし，この式において，上符号は $z\to\infty$ に，また，下符号は $z\to-\infty$ に対応する．これを (2.22) 式に代入し，(2.15) の超関数公式を用いると，

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_{-\frac{1}{2}+i\sigma}^{\ \mu}(-iz)P_{-\frac{1}{2}+i\sigma'}^{\ \mu}(iz)dz = {N_2}^2(\mu,\sigma)\delta(\sigma-\sigma') \tag{2.30}$$

と，この場合の直交式を得る．ここに，規格化定数 ${N_2}^2(\mu,\sigma)$ は

$${N_2}^2(\mu,\sigma)=\frac{2\cosh(\pi\sigma)\Gamma(-i\sigma)\Gamma(i\sigma)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu-i\sigma)\Gamma(\frac{1}{2}-\mu+i\sigma)} \tag{2.31}$$

と定義される．このときの規格化定数は，(2.17) 式のものと比較すると，${N_2}^2(\mu,\sigma)=2\cosh(\pi\sigma){N_1}^2(\mu,\sigma)$ となっている．

3 直交式の応用

良く知られているように，3 次元空間内の点 (x,y,z) を極座標 (r,θ,ϕ) で表すと

$$x=r\sin(\theta)\cos(\phi),\qquad y=r\sin(\theta)\sin(\phi),\qquad z=r\cos(\theta) \tag{3.1}$$

となり，このときの Laplacian は

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\frac{1}{r^2}\Big[\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial\zeta}(1-\zeta^2)\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{1-\zeta^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Big],\qquad \zeta=\cos(\theta) \tag{3.2}$$

となる．また，このとき，r が一定であれば，$x^2+y^2+z^2=r^2$ は空間内のすべての回転に対し不変となる．

ここで，3 次元空間 (x,y,z) が群 O(2,1) 不変となるような極座標 (r,θ,ϕ) を，

$$\begin{aligned} & x=r\sinh(\theta)\cos(\phi),\qquad y=r\sinh(\theta)\sin(\phi),\qquad z=r\cosh(\theta) \\ \text{or}\quad & x=r\cosh(\theta)\cos(\phi),\qquad y=r\cosh(\theta)\sin(\phi),\qquad z=r\sinh(\theta)\end{aligned} \tag{3.3}$$

と導入しよう．r を一定としたとき, この第 1 式では, $z^2-(x^2+y^2)=r^2$ が, また, 第 2 式では $(x^2+y^2)-z^2=r^2$ が O(2,1) 不変量となる．ここでは, この第 1 式を z-型極座標, 第 2 式を xy-型極座標と呼ぶことにする．このときの d'Alembertian は, 点 (x,y,z) が z-型のときは, (3.1) (3.2) 式において, 置き換え $x\to ix$, $y\to iy$, $\theta\to i\theta$ をすることで得られ,

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)=\frac{1}{r^2}\Big[\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial\zeta}(1-\zeta^2)\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{1-\zeta^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Big],\qquad \zeta=\cosh(\theta) \tag{3.4}$$

となり，また，xy-型のときは，置き換え $z\to iz$, $\theta\to\frac{1}{2}\pi-i\theta$ をすることで,

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)-\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\frac{1}{r^2}\Big[\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial\zeta}(1-\zeta^2)\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{1-\zeta^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Big],\qquad \zeta=i\sinh(\theta) \tag{3.5}$$

となる．

ここで，これらの式を用い O(2,1) 不変な運動エネルギーを持つ Schrödinger 方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Big[\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)\Big]\Psi=E\Psi \tag{3.6}$$

を解くことを試みる．以下，数式簡略化のため,

$$\frac{2mE}{\hbar^2}=k^2 \tag{3.7}$$

とおき，方程式を

$$\Big[\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)+k^2\Big]\Psi=0 \tag{3.8}$$

としておく.

3.1 (3.4) 式を用いた場合

初めに，点 (x,y,z) が z-型として，(3.4) 式を用いると方程式は

$$\Big[\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial\zeta}(1-\zeta^2)\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{1-\zeta^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+(kr)^2\Big]\Psi=0,\qquad \zeta=\cosh(\theta) \tag{3.9}$$

となる．ここで，波動関数 Ψ を変数分離型の

$$\Psi(r,\theta,\phi)=R(r)Z(\zeta)\Phi(\phi) \tag{3.10}$$

とおくと，分離定数を $\nu(\nu+1)$, μ^2 として,

$$\Big[\frac{d}{dr}r^2\frac{d}{dr}+(kr)^2-\nu(\nu+1)\Big]R=0,\qquad \Big[\frac{d}{d\zeta}(1-\zeta^2)\frac{d}{d\zeta}+\nu(\nu+1)-\frac{\mu^2}{1-\zeta^2}\Big]Z=0,\qquad \Big[\frac{d^2}{d\phi^2}+\mu^2\Big]\Phi=0 \tag{3.11}$$

と 3 本の方程式に分離される．初めに簡単な第 3 式から，定数係数を除いて，$\Phi=e^{i\mu\phi}$ となるが，波動関数の 1 価性から，μ は整数でなければならない．そこで，整数 m を用いて $\mu=m$ とおくことにして,

$$\Phi=e^{im\phi},\qquad m=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{3.12}$$

となる．第 2 式では，前述したように，$\zeta \to \infty$ を含む範囲で 2 乗可積分であるためには，ν の実部は $-\frac{1}{2}$ でなければならず，以後，$\nu = -\frac{1}{2} + i\sigma$ と置くことにし，また，この方程式に含まれる μ は μ^2 の形で入っているので，$P^{\ \mu}_{-\frac{1}{2}+i\sigma}(\zeta)$，$P^{\ -\mu}_{-\frac{1}{2}+i\sigma}(\zeta)$ の両方が解になり得るので，条件式 (2.9) を考慮すると，

$$Z = P^{\ -|m|}_{-\frac{1}{2}+i\sigma}(\zeta) \tag{3.13}$$

となる．第 1 式からは，Bessel 関数を用いて

$$R = \frac{1}{\sqrt{kr}} J_{i\sigma}(kr) \tag{3.14}$$

となる．以上をまとめると波動関数 Ψ は，$\Psi_{k,\sigma,m}(r,\theta,\phi)$ と書くことにして，

$$\Psi_{k.\sigma,m}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{kr}} J_{i\sigma}(kr) P^{\ -|m|}_{-\frac{1}{2}+i\sigma}(\cosh\theta) e^{im\phi} \tag{3.15}$$

と，解かれたことになる．

以下，この波動関数の規格化をしておく．Bessel 関数のデルタ関数を用いた直交性には

$$\int_0^\infty J_\lambda(kr) J_\lambda(k'r) r dr = \frac{1}{k}\delta(k-k'), \qquad k, k' > 0, \qquad \Re\lambda > -1 \tag{3.16}$$

という式がある．しかし，ここでは，Bessel 関数の次数が $i\sigma$ と純虚数になっているので，$J_{i\sigma}(kr)$ の複素共役 $J_{-i\sigma}(kr)$ と $J_{i\sigma}(k'r)$ の積が入った

$$\int_0^\infty J_{-i\sigma}(kr) J_{i\sigma}(k'r) r dr = \frac{\cosh(\pi\sigma)}{k}\delta(k-k'), \qquad k, k' > 0 \tag{3.17}$$

という式を用いることにする． Legendre 陪関数の部分は前節で得た (2.16) 式が使える．また，この場合の体積要素は $r^2 dr\, d\cosh(\theta)\, d\phi$ となることを考慮して，

$$\int_0^\infty r^2 dr \int_1^\infty d\cosh(\theta) \int_0^{2\pi} d\phi\, \overline{\Psi_{k,\sigma,m}}(r,\theta,\phi) \Psi_{k',\sigma',m'}(r,\theta,\phi) = \frac{2\pi\cosh(\pi\sigma)}{k^2} {N_1}^2(-|m|,\sigma)\delta(k-k')\delta(\sigma-\sigma')\delta_{m,m'} \tag{3.18}$$

となる．ただし，ここで，$\overline{\Psi_{k,\sigma,m}}$ は $\Psi_{k,\sigma,m}$ の複素共役をとることを意味する．

3.2 (3.5) 式を用いた場合

点 (x,y,z) が xy-型として，方程式 (3.8) に (3.5) 式の d'Alembertian を使って表すと，

$$\Big[\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial\zeta}(1-\zeta^2)\frac{\partial}{\partial\zeta} + \frac{1}{1-\zeta^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} - (kr)^2\Big]\Psi = 0, \qquad \zeta = i\sinh(\theta) \tag{3.19}$$

となる．前と同じく変数分離

$$\Psi(r,\theta,\phi) = R(r) Z(\zeta) \Phi(\phi) \tag{3.20}$$

を行い，分離定数を $\nu(\nu+1)$，μ^2 とすると，

$$\Big[\frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} - (kr)^2 - \nu(\nu+1)\Big]R = 0, \qquad \Big[\frac{d}{d\zeta}(1-\zeta^2)\frac{d}{d\zeta} + \nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{1-\zeta^2}\Big]Z = 0, \qquad \Big[\frac{d^2}{d\phi^2} + \mu^2\Big]\Phi = 0 \tag{3.21}$$

と 3 本の方程式に分離される．この第 2 式，および，第 3 式は，前節のものと形の上ではまったく同じものなので，そのまま踏襲することにし，

$$\Phi = e^{im\phi}, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{3.22}$$

および，

$$Z = P_{-\frac{1}{2}+i\sigma}^{-|m|}(\zeta) \tag{3.23}$$

となる．ただし，ζ の定義が $\zeta = \cosh(\theta)$ から $\zeta = i\sinh(\theta)$ に変わっている．なお，この場合は (2.9) の条件式は必要なくなるのであるが，これもそのまま踏襲することにする．

第 1 式は，前のものと $(kr)^2$ の前に付く符号が変わっているので，このときの解は，第 2 種変形 Bessel 関数を用いて

$$R = \frac{1}{\sqrt{kr}} K_{i\sigma}(kr) \tag{3.24}$$

となる．この第 2 種変形 Bessel 関数 $K_\nu(z)$ は $z \to \infty$ で，ν の値に関係なく指数関数的にゼロに収束し，また，$z \to 0$ では一般に発散する関数であるが，この場合のように，ν が純虚数のときは超関数的にゼロとみなせる．

以上をまとめると，波動関数 Ψ を $\Psi_{k,\sigma,m}(r,\theta,\phi)$ と書くことにして，

$$\Psi_{k,\sigma,m}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{kr}} K_{i\sigma}(kr) P_{-\frac{1}{2}+i\sigma}^{-|m|}(i\sinh\theta) e^{im\phi} \tag{3.25}$$

と解けたことになる．

この波動関数の規格化積分を実行してみよう．この場合の体積要素は $r^2 dr\, d\sinh(\theta)\, d\phi$ となり，Legendre 陪関数の部分は (2.30) 式でできるが，問題はこの第 2 種変形 Bessel 関数の部分である．この積分に関しては，“Tables of Integral Transforms” Vol.2, Bateman Manuscript Project, p.145, (49) に載っていて，そのまま引用すると，

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty K_\mu(ax) K_\nu(xy) x^{\sigma-1} dx \\
&\quad = \frac{2^{\sigma-3} a^{-\nu-\sigma} y^\nu}{\Gamma(\sigma)} \Gamma\bigl(\tfrac{1}{2}(\sigma+\mu+\nu)\bigr)\Gamma\bigl(\tfrac{1}{2}(\sigma-\mu+\nu)\bigr)\Gamma\bigl(\tfrac{1}{2}(\sigma+\mu-\nu)\bigr)\Gamma\bigl(\tfrac{1}{2}(\sigma-\mu-\nu)\bigr) \\
&\quad \times F\Bigl(\tfrac{1}{2}(\sigma+\mu+\nu),\, \tfrac{1}{2}(\sigma-\mu+\nu),\, \sigma;\, 1-\frac{y^2}{a^2}\Bigr), \qquad \Re\sigma > |\Re\mu| + |\Re\nu|, \quad \Re(y+a) > 0
\end{aligned} \tag{3.26}$$

となっている．ここで，$\sigma = 2$ とし，置き換え $x \to r,\ \mu \to -i\sigma,\ \nu \to i\sigma,\ a \to k,\ y \to k'$ とすると，

$$\int_0^\infty K_{-i\sigma}(kr) K_{i\sigma}(k'r) r dr = \frac{1}{2} k^{-i\sigma-2} k'^{\,i\sigma} \Gamma(1+i\sigma)\Gamma(1-i\sigma) F\Bigl(1,\, 1+i\sigma,\, 2;\, 1-\frac{k'^2}{k^2}\Bigr) \tag{3.27}$$

となるが，さらに，この超幾何関数の部分は，

$$F(1,\, 1+\alpha,\, 2;\, z) = \frac{(1-z)^{-\alpha} - 1}{\alpha z} \tag{3.28}$$

と初等関数で表されるので，これを用いると，

$$\int_0^\infty K_{-i\sigma}(kr) K_{i\sigma}(k'r) r dr = \frac{\Gamma(1+i\sigma)\Gamma(1-i\sigma)}{2i\sigma(k^2-k'^2)} \Bigl[\Bigl(\frac{k}{k'}\Bigr)^{i\sigma} - \Bigl(\frac{k'}{k}\Bigr)^{i\sigma}\Bigr] \tag{3.29}$$

とより対称性が見やすい形となる [*3]．この被積分関数は，k と k' を入れ替え，複素共役をとったとき元に戻るようになっているが，この積分結果でもそうなっていることが確かめられる．また，この結果は，k と k' を入れ替えずに複素共役をとっても元に戻るので，実数である

特に，$k=k'$ のときは，(3.27) 式から，

$$\int_0^\infty K_{-i\sigma}(kr)K_{i\sigma}(kr)rdr=\frac{1}{2k^2}\Gamma(1+i\sigma)\Gamma(1-i\sigma) \tag{3.30}$$

とより簡単化される．もちろん，この式は (3.29) 式で $k\to k'$ の極限をとることでも得られる．ここで強調しておきたいことは，$k\neq k'$ のときでもこの積分はゼロにはならず，直交していないということである．

以上をまとめると，波動関数 (3.25) 式の《半直交性》の式は，

$$\begin{aligned}\int_0^\infty r^2dr\int_{-\infty}^\infty d\sinh(\theta)\int_0^{2\pi}d\phi\ \overline{\Psi_{k,\sigma,m}}(r,\theta,\phi)\Psi_{k',\sigma',m'}(r,\theta,\phi)\\ =\frac{\pi\Gamma(1+i\sigma)\Gamma(1-i\sigma)}{i\sigma(k^2-k'^2)\sqrt{kk'}}\Big[\Big(\frac{k}{k'}\Big)^{i\sigma}-\Big(\frac{k'}{k}\Big)^{i\sigma}\Big]{N_2}^2(-|m|,\sigma)\delta(\sigma-\sigma')\delta_{m,m'}\end{aligned} \tag{3.31}$$

となる．

4 おわりに

いつものことながら，今回もかなり無茶な計算をしてしまった．O(2,1) 不変な運動エネルギーを持つ Schrödinger 方程式などというものは，これまでに見たこともない．これは，ここで述べた陪 Legendre 関数の直交式を使わんがため無理やり持ち出すことになってしまった．これは，数学が先にあって，それに物理を繋げようと無理を承知でしてしまうからいけないのだが，でも，いつの日かこのような計算が日の目を見ることを微かに願っている．

[謝辞]

今回もこの原稿を書くにあたって，京都大学名誉教授の中西襄先生にご精読いただき，たくさんのコメントをいただき，ようやく形にすることができました．ここに，謹んで感謝いたします．

[*3] この式は，(3.26) 式を経由しなくても，前節で Legendre 陪関数に対して行った方法からでも導出することができる．そのときは，積分したときの上限 $r\to\infty$ からの寄与はなくなり，下限の $r\to 0$ からの寄与だけで決まる．ここでは，(3.26) 式があまりに素晴らしい式だったのでこれを経由する方法をとった．なお，$\Gamma(1+i\sigma)\Gamma(1-i\sigma)=\pi\sigma/\sinh(\pi\sigma)$ であるが，ここでは，$i\sigma$ に対する対称性の見易さからそのままにしておいた．

暗証番号生成アルゴリズム

高木富士夫

An Algorithm for Generating Personal Identification Numbers

Fujio TAKAGI[1]

1　はじめに

情報化社会が進んで、この頃は何をするにも暗証番号やパスワードを設定しろ、時々変更しろなどとやかましく言われる。いろんな所で同じ暗証番号を使うなとか、誕生日や車のナンバーなど他人が推測しやすいものを使うなとか、注意事項の多いこと！１つや２つまではいいだろうが、３つ以上の暗証番号を秘密裡に管理して、正確に使い分けて、時々変更して忘れないためにはどうすればいいのだろう。まして実際にはほとんど使う機会のない暗証番号を設定して、記録を大切に保存しろとはどういうつもりなのだろう。

宮城県では平成２１年から自動車の運転免許証がＩＣ免許証になり、４桁の暗証番号が２組必要となった。他県でも同様の所が多いと思われる。しかしその目的・趣旨については高齢者講習、運転免許証更新連絡書、免許証更新時のいずれにおいてもほとんど説明がなかった。実際、前回の免許証更新から今回の更新までの３年間に一度も暗証番号を使うことはなかった。それなのに今回の免許証更新に際してまた４桁の暗証番号を２つ用意しろという。流石に前回と違う番号にしろとは要求されなかったが、じゃあ同じ番号にするか、それとも変えるかと迷うことさえ煩わしい。そこで４桁の暗証番号を３つでも４つでも、あるいは１０でも簡単に生成できて、しかもそれらを簡単に記憶できる（すぐ再現できる）方法を提案する。４桁でなく、５桁や６桁の暗証番号でも、その桁数と簡単な２桁か３桁の初期値と呼ばれる数を覚えておけばいい。

2　最も簡単な方法

以下では１０進法における０から９までの整数を単に digit と呼ぶ。digit の列 $d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots$ を次の規則によって生成する。

$$d_{n+2} = R(d_n + d_{n+1}) \qquad (n \text{ は正の整数}) \tag{1}$$

ここで $R(d_n + d_{n+1})$ は $d_n + d_{n+1}$ を 10 で割ったときの剰余を表す。例えば $R(1+1) = R(2) = 2, R(5+8) = R(13) = 3, R(9+9) = R(18) = 8, ...$

初期値 d_1, d_2 を与えると、(1) により、digit の列 $d_1, d_2, d_3, d_4, \ldots$ が生成される。ただしここでは digit の列を考えるというより、digit の並びまたは鎖からある桁数の数値を取り出すことを考えているので、隣り合う digit の間のカンマは省略して $d_1 d_2 \ldots d_n \ldots$ と表記する。この時、初期値 $d_1 d_2$ は２桁の数とも見なせる。

例えば初期値を 13 とすると次のような（無限）鎖が得られる。

1347189763921347$\cdots$

この場合 13 で始まる digit の鎖に再び 13 が現れて、以下同じパターンを周期的に繰り返す。digit 鎖が周期的になるのは２桁の数が有限個（１０進法の場合 00 から 99 までの 100 個）しかないから当然である。今の場合 134718976392 という１２桁の数（または１２個の digit の鎖）が１周期分であるから、周期 T は 12 である

[1]ftakagi@jeans.ocn.ne.jp

ということにする。この場合４桁の（暗証）番号として 1347,1897,6392 の３つが生成されたと見なすことができる。６桁の暗証番号 134718 と 976392 が生成されたと見なすこともできる。得られた digit 鎖から暗証番号を取り出す方法はこのアルゴリズムを使う人が自由に設定すればよい。設定された暗証番号の記憶法または再現法としては、その番号を機械的に記憶するより、漸化式 (1)、初期値、桁数など番号の取り出し方を記憶する方がはるかに楽だろう。暗証番号を更新するときは、２桁の初期値を更新するだけでよい。

漸化式 (1) によって生成される 1 周期分の digit 鎖は次に述べるような重要な性質を持つ。
「補題１」
１周期分の digit 鎖を $d_1d_2\ldots d_T$ とする。d_T の右隣の digit は d_1 であると見なす。この時、1 周期分の digit 鎖は閉じた鎖になるので、T 個の初期値 $d_1d_2, d_2d_3, \cdots, d_{T-1}d_T, d_Td_1$ から生成される T 個の閉じた鎖は互いに同値である。逆に、これら以外の初期値から生成される digit 鎖はこれらの digit 鎖と同値でない。

補題１より、１００個の２桁の数 00,01,02,03,. . . ,09,10,11,. . . ,99 を初期値として生成される１００個の digit 鎖は何種類かの互いに同値でない digit 鎖に分類されることが分かる。これより次の補題を得る。

「補題２」
互いに同値でない全ての digit 鎖の周期の和は $10^2 = 100$ である。

補題１、補題２は証明するまでもなく明らかであろう。

漸化式 (1) と初期値 d_1, d_2 によって生成される digit 鎖は 6 種類あり、それらの周期は 60,20,12,4,3,1 であり、確かに

$$60 + 20 + 12 + 4 + 3 + 1 = 10^2 \tag{2}$$

となる。例えば初期値を 11 と取ると、次のような $T = 60$ の digit 鎖が得られる。

11235 83145 94370 77415 61785 38190 99875 27965 16730 33695 49325 72910 1123· · ·

ただし digit を隙間なく並べると見にくいので、５個の digit 毎に隙間を空けて書いた。この digit の鎖から何桁の（暗証）番号を何個取り出すかは自由であるが、最も簡単には、1123 から始まって 5831,4594,...,2910 まで、４桁の番号が１５個取り出せる。いざというとき最小の手間、最小の努力で思い出せる（再現できる）ことが望ましいので、余計な規則は付けない方がいいだろう。このように簡単な方法で４桁の暗証番号を１５個も作れるならば、大抵の場合に間に合うだろう。
なお周期が短い場合、周期 T を定めるのに少し注意が要る。例えば $T = 1$ の場合とは初期値が 00 の場合である。実際、漸化式 (1) により 1 回発展させると、鎖は 000 となり、以下 0 が続く事が分かる。また例えば初期値 50 から 3 回発展させると 50550 となり、再び 50 が現れるので、この場合は $T = 3$ である。505 あるいは 055 あるいは 550 が 1 周期分であることに注意されたい。
補題１，補題２は、この方法によって生成される digit が 0 から 9 まで等確率で分布することを保証するので、暗証番号生成アルゴリズムとして好ましいと言える。

3 一般化

数桁の暗証番号を生成するだけなら、前節で示した方法で十分かも知れない。しかし数学的構造に興味を持つとすれば、前節の方法を一般化してみたくなる。前節の方法では順序つきの２個の digit を初期条件として、

digit の列（または digit の鎖）を求めた。そこで今度は λ 個の順序付き digit(ただし $\lambda \geq 3$) を初期条件とする場合を考える。漸化式 (1) の最も簡単な一般化は

$$d_{n+\lambda} = R(d_n + d_{n+1} + \cdots + d_{n+\lambda-1}) \qquad (n \text{ は正の整数}) \tag{3}$$

すなわち $d_n + d_{n+1} + \cdots + d_{n+\lambda-1}$ を 10 で割ったときの剰余を $d_{n+\lambda}$ とする。$\lambda = 3$ の場合、初期値に相当する 3 桁の数は 000 から 999 まで 1000 個ある。前節で述べた $\lambda = 2$ の場合、異なる周期の digit 鎖が 1 種類ずつ合計 6 種類あった。所が今度は $T = 124$ の digit 鎖が 4 種類、$T = 62$ の digit 鎖も 4 種類、$T = 31$ の digit 鎖が 8 種類、$T = 4$ と $T = 2$ の digit 鎖は各 1 種類、$T = 1$ の digit 鎖は 2 種類存在して

$$(124 \times 4) + (62 \times 4) + (31 \times 8) + 4 + 2 + (1 \times 2) = 10^3 \tag{4}$$

となる。３つの周期 124,62,31 が共通の約数 31 を持つのは意味ありげであるが、今の所理由は不明である。$T = 1$ の digit 鎖（の初期値）は 000 と 555 の 2 つで、この 2 つは異なる種類に属する。一方 $T = 2$ の digit 鎖は 1 種類で、初期値は 050 と 505 の 2 個、 $T = 4$ の digit 鎖も 1 種類で、初期値は 005,055,500,550 の 4 個である。

例えば初期値 112 によって生成される $T = 124$ の digit 鎖は次のようになる。

11247 34419 44756 89302 57467 70415 06174 23946 99425 18435 20796
27546 55667 92899 64992 01348 57029 12259 60516 29784 91449 70639
80752 41720 91001 12473$\cdots$

ここまでの計算はコンピュータを使わず、紙とボールペンで求めた。$\lambda \geq 4$ の場合は計算量が増えるのでコンピュータを使ってプログラム計算を実行するのが現実的であろう。暗証番号を生成するのが目的の場合はそんなに大きな λ の場合まで計算する必要はないかも知れない。しかし数学的には何か面白いことがあるかも知れない。

4　フィボナッチ数列との関連

漸化式 (1) を見て、おそらく読者はフィボナッチ数列の漸化式 $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ を思い出された事と思う。筆者はこの漸化式を用いて、あまり重要でない？暗証番号の作成に用いたことがある。しかしこの場合例えば 1,1 から出発すると

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,...

というように段々加算が複雑になるので、別紙または卓上計算機を使いたくなる。それでは極めて簡単に再現できる（思い出せる）という条件を損なう。一方、ここで提案している方法によれば、別紙で計算することなく、１枚の紙面が許す限り、任意の長さ（ただし有限周期）の digit 鎖をいくらでも生成できる。なおフィボナッチ数列はよく知られているということも、暗証番号生成法としては不利かも知れない。

5　英字混じりのパスワード生成アルゴリズム

ここまで暗証番号すなわち有限個の数字の並びを生成する方法を議論してきた。それでは同様の方法で英字と数字の混じったパスワードを生成するにはどうすればいいか考えてみる。0 から 9 までの数字の他に a,b,c,... などの英小文字を生成するにはどうすればいいか。それには 0 から 9 までの１０個の digit に加えて英字に対応する幾つかの新しい digit を追加すればよい。すなわち N 進法を考えて、N を１０より適当に大きい整数に

とればよい。ただしこの時、整数 z に対して (1) や (3) における $R(z)$ は z を N で割ったときの剰余を表す。実際に計算してみると１２進法では英字の種類が少なく、発生頻度も低くて役に立たない。１５進法 $(N = 15)$ を考えると、数字と英字が２：１の頻度で混ざった digit 鎖が得られる。

例えば１５進法における１５個の digit を 0 から順に

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,a,b,c,d,e

とする。$\lambda = 2$ の場合、初期値 11 に対して次のような $T = 40$ の digit 鎖が得られる。

11235 8d64a e982a c74b0 bb73a d86e5 49d75 c2e10

ただし実際に手による計算で上のような digit 鎖を求める場合、a,b,c,d,e の代わりに $0', 1', 2', 3', 4'$ を用いて計算した方が楽である。例えば $0'$ は１０進法の 10 に対応すると頭の中で考えながら計算するわけである。つまり上付きのダッシュ（プライム）は１０進法において繰り上がった１の名残だと思いながら計算するわけである。得られた digit 鎖において $0', 1', 2', 3', 4'$ をそれぞれ a,b,c,d,e に書き換えれば、求める英字数字混じりの digit 鎖が得られる。英字の種類を増やし、数字と英字の出現頻度を１：１にしたい時は、２０進法を考えて後半の１０個の digit を英字に対応させればよい。

今回の話に整数論として興味ある問題が隠されているかどうかは今後の課題としたい。

編集後記

5 巻 4 号に続いて 5 巻 5 号を発行できることを喜んでいる．とても投稿が多いからである．こんなに投稿原稿が多いことは編集者冥利に尽きる．

いつもくり返すようだが，こういったサーキュラーは編集者だけの意気込みだけでは維持はできない．投稿下さる方々なしではやっていけない．また読者があっての話でもあり，メールでお送りしても嫌がってもう送って来るなと言われないだけ幸せである．

もちろん，難しい話題のときにはそれを読む気がしないこともあるかも知れない．そのときにはスキップして下さって結構である．そのうちにああそういえば,『数学・物理通信』のどこかの号で誰かが書いていたなと思って引っ張り出して見る，そういう利用法もあるだろう．

もちろん，毎号きちんと読んで今号はおもしろかった．今号はさほどおもしろくなかったと思われる方も世の中にはおられることであろう．それもまたよい．

このサーキュラーは原則として 3 の倍数の月に発行している．例外はときどきあるけれどもそれはあくまで例外である．それはともかく，あまり投稿をされたことがない方にも門戸は開かれている．

（矢野　忠）