数学・物理通信

6巻1号　　2016年3月

編集　新関章三・矢野　忠

2016 年 3 月 7 日

目次(Contents)

正方行列の結合則についてのコメント
Comment on the Associative Law of Square Matrices

森田克貞 [1)]

Katsusada Morita[2)]

要約

結合則を満たすと言う要求だけでは，正方行列の積には 1 つの任意パラメーター α^2 が含まれる．普通は $\alpha^2=1$ だが，$\alpha^2=0$ も許されるのである．このノートでは，最も簡単な 2×2 行列の時に，α^2 を含む積法則・行列式の定義に基ずく種々の性質をまとめる．さらに，四元数の Pauli 表現を用いれば，$\alpha^2=1\to 0$ は四元数の複素数への退化に導くこと，並びに，普通のケース $\alpha^2=1$ でも，2 通り $\alpha=\pm 1$ あるが，この符号の違いを Pauli 行列についてみると，それぞれは，通常の $\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$ と，それに同値な $\{-\sigma_1,-\sigma_2,\sigma_3\}$ に対応する．なお，任意次元の正方行列の場合は，偶数次元と奇数次元に分けて，議論する．

1 はじめに

簡単のため，始めに，2 次の行列の積について考える．$a,b,c,d;a',b',c',d'$ を任意の複素数として，2×2 行列の積 (以下ドット積と呼ぶ)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa'+\alpha^2 bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & \alpha^2 cb'+dd' \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

を考える．ただし，α^2 は任意の実数とする．ドット積が結合則を満たすことは，以前，証明を与えずに指摘したことがあるが，以下，他の性質も含めて，その代数的側面を改めてノートにまとめることにした．特に，このような任意性を考慮して，行列式 Det も α^2 を含む形で定義する (普通は，$\alpha^2=1$ で，行列式 $\det A=|A|$ を用いる Cramer の公式も成り立つ [3)])．

2 ドット積の性質

今，A,B,C を 2×2 複素行列とした時，

(i) $\mathrm{Tr}(A\cdot B)=\mathrm{Tr}(B\cdot A)$

(ii) $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$

(iii) $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C,\quad (B+C)\cdot A=B\cdot A+C\cdot A$

(iv) $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$

(v) $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$

---

1) 元名古屋大学理学部物理教室

2) kmorita@cello.ocn.ne.jp

3) α^2 がゼロでないなら，$\alpha^2\to\alpha^2/|\alpha^2|$ と置き代えて，$\alpha^2=\pm 1$ とできる．従って，ゼロでない α^2 はいつでも，$\alpha^2=1$ と置ける (必要なら，非対角要素を虚数倍する)．しかし，$\alpha^2=0$ の可能性は残る．なお，計算は α^2 をそのまま残しておく方が見通しが良い．

(vi) $\mathrm{Det}\,(A\cdot B)=(\mathrm{Det}\,A)\,(\mathrm{Det}\,B)$

が成り立つ．(i) のトレースの性質は定義から明らか．(iii) も自明．

1) 結合則

まず，ドット積 (1.1) が結合則 (ii)

$$\left[\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}a'' & b''\\ c'' & d''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a'' & b''\\ c'' & d''\end{pmatrix}\right] \tag{2.1}$$

に従うことを証明する．なぜなら，左辺は

$$\begin{aligned}&\left[\begin{pmatrix}aa'+\alpha^2bc' & ab'+bd'\\ ca'+dc' & \alpha^2cb'+dd'\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}a'' & b''\\ c'' & d''\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}(aa'+\alpha^2bc')a''+\alpha^2(ab'+bd')c'' & (aa'+\alpha^2bc')b''+(ab'+bd')d''\\ (ca'+dc')a''+(\alpha^2cb'+dd')c'' & \alpha^2(ca'+dc')b''+(\alpha^2cb'+dd')d''\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{2.2a}$$

一方，右辺は

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}a'a''+\alpha^2b'c'' & a'b''+b'd''\\ c'a''+d'c'' & \alpha^2c'b''+d'd''\end{pmatrix}\right]\\ &=\begin{pmatrix}a(a'a''+\alpha^2b'c'')+\alpha^2b(c'a''+d'c'') & a(a'b''+b'd'')+b(\alpha^2c'b''+d'd'')\\ c(a'a''+\alpha^2b'c'')+d(c'a''+d'c'') & \alpha^2c(a'b''+b'd'')+d(\alpha^2c'b''+d'd'')\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{2.2b}$$

(2.2a) と (2.2b) が等しいことは直ぐ分かる．

例として，Pauli 行列をあげる．

$$\sigma_1\cdot\sigma_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^2 & 0\\ 0 & \alpha^2\end{pmatrix}=\alpha^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\equiv\alpha^2\Sigma_0$$

$$\sigma_2\cdot\sigma_2=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^2 & 0\\ 0 & \alpha^2\end{pmatrix}=\alpha^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\equiv\alpha^2\Sigma_0$$

$$\sigma_3\cdot\sigma_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\equiv\Sigma_0$$

$$\sigma_1\cdot\sigma_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^2i & 0\\ 0 & -\alpha^2i\end{pmatrix}=\alpha^2i\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\alpha^2i\sigma_3$$

$$\sigma_2\cdot\sigma_3=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}=i\sigma_1$$

$$\sigma_3\cdot\sigma_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=i\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}=i\sigma_2$$

故に，$\alpha\neq 0$ として，

$$\Sigma_1=\sigma_1/\alpha,\qquad \Sigma_2=\sigma_2/\alpha,\qquad \Sigma_3=\sigma_3 \tag{2.3a}$$

と置けば，$\{\Sigma_i\}$ はドット積のもとで，通常の Pauli 行列と同じ代数関係を満たす．

$$\Sigma_i\cdot\Sigma_j=\delta_{ij}\Sigma_0+i\epsilon_{ijk}\Sigma_k \tag{2.3b}$$

ところが，$\alpha^2 = 1$ の時は，$\alpha = \pm 1$ となるので，$\{-\sigma_1, -\sigma_2, \sigma_3\}$ が，行列の普通の積 ($\alpha^2 = 1$ 故) のもとで，$\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ と同じ代数を満たすことを意味する．実際，$\{-\sigma_1, -\sigma_2, \sigma_3\} = \sigma_3\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}\sigma_3^{-1}$ である．

2) 行列式について

もし，行列式を

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - \alpha^2 bc \tag{2.4}$$

と定義すれば，組成法則 (vi)

$$\mathrm{Det}\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right] = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} aa' + \alpha^2 bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & \alpha^2 cb' + dd' \end{pmatrix} = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

は成り立つ．実際

$$\begin{aligned}
(2.5)\ \text{の真ん中の式} &= (aa' + \alpha^2 bc')(\alpha^2 cb' + dd') - \alpha^2\big[(ab' + bd')(ca' + dc')\big] \\
&= (aa')(dd') + \alpha^2\big[(bc'dd' + aa'cb') - (ab' + bd')(ca' + dc')\big] + \alpha^4(bc')(cb') \\
&= (ad)(a'd') - \alpha^2\big[(ab')(dc') + (bd')(ca')\big] + \alpha^4(bc')(cb') \\
&= (ad - \alpha^2 bc)(a'd' - \alpha^2 b'c') = (2.5)\ \text{の右辺}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

3) 逆行列は次のようにして求める．

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + \alpha^2 bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & \alpha^2 cb' + dd' \end{pmatrix} = \Delta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.7a}$$

従って，

$$\begin{gathered}
aa' + \alpha^2 bc' = \Delta = \alpha^2 cb' + dd' \\
ab' + bd' = 0 \to b' = -b, \quad d' = a \\
ca' + dc' = 0 \to a' = d, \quad c' = -c \\
\Delta = ad - \alpha^2 bc = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}
\end{gathered} \tag{2.7b}$$

故に，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{2.7c}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = (\mathrm{Det}\,A)^{-1}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{2.7d}$$

$$B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = (\mathrm{Det}\,B)^{-1}\begin{pmatrix} d' & -b' \\ -c' & a' \end{pmatrix} \tag{2.7e}$$

となる．$\mathrm{Det}\,(A \cdot B)$=$(\mathrm{Det}\,A)\,(\mathrm{Det}\,B)$ であることを使って，(v), (iv) は次のようにして，証明される．

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} aa' + \alpha^2 bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & \alpha^2 cb' + dd' \end{pmatrix} \tag{2.8a}$$

$$(A \cdot B)^{-1} = (\mathrm{Det}\,(A \cdot B))^{-1}\begin{pmatrix} \alpha^2 cb' + dd' & -(ab' + bd') \\ -(ca' + dc') & aa' + \alpha^2 bc' \end{pmatrix} \tag{2.8b}$$

$$B^{-1}\cdot A^{-1} = (\mathrm{Det}\,B)^{-1}\begin{pmatrix} d' & -b' \\ -c' & a' \end{pmatrix}\cdot(\mathrm{Det}\,A)^{-1}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$= (\mathrm{Det}\,(A\cdot B))^{-1}\begin{pmatrix} d'd+\alpha^2 b'c & -d'b-b'a \\ -c'd-a'c & \alpha^2 c'b+a'a \end{pmatrix} = (A\cdot B)^{-1} \tag{2.8c}$$

$$B^T\cdot A^T = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'a+\alpha^2 c'b & a'c+c'd \\ b'a+d'b & \alpha^2 b'c+d'd \end{pmatrix} = (A\cdot B)^T \tag{2.8d}$$

さらに

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c+xa & d+xb \end{pmatrix} = a(d+xb)-\alpha^2 b(c+xa) \quad \neq \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad-\alpha^2 bc \tag{2.8e}$$

となる．従って，2×2 行列の積に関して，結合則やトレースの性質を要求するが，行列式 $\det A = |A|$ を使わない理論では，任意パラメーター α^2 が残ることが分かった．普通の行列式 det では，$\alpha^2 = 1$ となって，(2.8e) の等号否定は, Det→ det として，等号になる．

3　ドット積と四元数の組成法則

四元数に対する Hamilton の基底を $\{e_0, e_i\}_{i=1,2,3} \equiv \{e_\mu\}_{\mu=0,1,2,3}$ とすれば，四元数 $q = q_\mu e_\mu$ の Pauli 表現は

$$\rho_{\mathrm{P}}(q) = \begin{pmatrix} q_0-iq_3 & -iq_1-q_2 \\ -iq_1+q_2 & q_0+iq_3 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

で与えられるが，結合則を満たすだけなら，2 次行列の積には，任意性があることを前節で見た．

四元数のノルムの自乗は

$$|q|^2 = q\bar{q} = (q_0+q_ie_i)(q_0-q_ie_i) = q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2 = \det\rho_{\mathrm{P}}(q) \tag{3.2}$$

で与えられ，組成法則 $|qp|^2 = |q|^2|p|^2$ を満たす．それに対して，

$$\mathrm{Det}\,\rho_{\mathrm{P}}(q) = q_0^2+\alpha^2(q_1^2+q_2^2)+q_3^2 \equiv |q|_\alpha^2 \tag{3.3}$$

も，組成法則

$$\mathrm{Det}\,\rho_{\mathrm{P}}(q)\times\mathrm{Det}\,\rho_{\mathrm{P}}(p) = \mathrm{Det}\,[\rho_{\mathrm{P}}(q)\cdot\rho_{\mathrm{P}}(p)] = \mathrm{Det}\,\rho_{\mathrm{P}}(qp) \tag{3.4}$$

は満たす:

$$|qp|_\alpha^2 = |q|_\alpha^2|p|_\alpha^2 \tag{3.5}$$

これは，(3.3) の $|q|_\alpha^2$ に対する定義を用いても，直接証明出来る．その際，四元数の積 $qp = (qp)_\mu e_\mu$ は (3.4) のように Pauli 表現を通して定義されるが，各成分は

$$(qp)_0 = q_0p_0-q_3p_3-\alpha^2(q_1p_1+q_2p_2)$$

$$(qp)_1 = q_0p_1+q_1p_0+q_2p_3-q_3p_2$$

$$(qp)_2 = q_0p_2+q_2p_0+q_3p_1-q_1p_3$$

$$(qp)_3 = q_0p_3+q_3p_0+\alpha^2(q_1p_2-q_2p_1) \tag{3.6}$$

となること，及び，$|qp|_\alpha^2 = (qp)_0^2+(qp)_3^2+\alpha^2[(qp)_1^2+(qp)_2^2]$ に注意する．勿論，(3.5) において，$\alpha^2 = 1$ とおけば，普通の組成法則 $|qp|^2 = |q|^2|p|^2$ に移行する．しかし，$\alpha^2 = 0$ の場合はどうなるのであろうか.

4 Hamilton の虚数単位の間の置換対称性を壊すスケール変換

Hamilton の虚数単位 $\{i,j,k\}$ は

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \tag{4.1}$$

と言う有名な関係式を満たし (前節では，$\{i,j,k\}$ の代わりに，$\{e_1,e_2,e_3\}$ と書いた)，任意の四元数は $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$ である．(4.1) は $\{i,j,k\}$ の入れ替え，$(i,j,k) \to (j,k,i) \to (k,i,j)$ のもとで対称である．

しかし，§2 で考えた，(行列表現の) 積法則に α^2 の現れる四元数はこの置換対称性を破るが，勿論，依然として組成法則は成り立つ．その破れは，$i \to \alpha i \equiv I, j \to \alpha j \equiv J, k \to k \equiv K$ によって引き起こされる：

$$I^2 = J^2 = -\alpha^2, K^2 = -1, IJ = \alpha^2 K, JK = I, KI = J, IJK = -\alpha^2 \tag{4.2a}$$

$$IJ + JI = 0, JK + KJ = 0, KI + IK = 0 \tag{4.2b}$$

そして，$\{I,J,K\}$ を '虚数単位' として持つ四元数

$$q = q_0 + Iq_1 + Jq_2 + Kq_3 \tag{4.3}$$

のノルム (の自乗) は

$$|q|_\alpha^2 = q_0^2 + \alpha^2(q_1^2 + q_2^2) + q_3^2 \tag{4.4a}$$

で与えられ，組成法則は

$$|qp|_\alpha^2 = |q|_\alpha^2 |p|_\alpha^2 \tag{4.4b}$$

となることが分かる． ここで，qp は (3.6) で与えられた $(qp)_\mu$ を用いて

$$qp = (qp)_0 + I(qp)_1 + J(qp)_2 + K(qp)_3 \tag{4.4c}$$

のようになることを使った．これから計算される，ノルムの自乗を $|qp|_\alpha^2$ と置いたわけ．

また，$1 = E_0, I = E_1, J = E_2, K = E_3$ とおけば，(4.3) は $q = q_\mu E_\mu$ と書ける．同様に，$p = p_\mu E_\mu$ $r = r_\mu E_\mu$ とおいて結合則

$$(qp)r = q(pr) \tag{4.4d}$$

が成り立つ事も分かる．

このようにして，四元数の組成法則 (4.4b) は Hamilton の虚数単位が満たす置換対称性の破れの一つによって引き起こされていると考える事ができる (ただし，普通はその逆で，Hamilton の虚数単位は適当なスケール変換によって，必ず，その自乗が，すべて，-1 になるように規格化出来るとする)．特別の場合 $\alpha^2 = 0$ は，$i \to 0, j \to 0$ となって，四元数は複素数 $q = q_0 + kq_3, k^2 = -1, q_{1,3} \in \mathbb{R}$ に退化する．

5 任意次元の場合への一般化

ドット積は任意次元の正方行列に対して，容易に一般化出来る．まず，偶数次元の場合を考える．そこで，次のような $2n$ 次の正方行列を考える．

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

ただし，各ブロック行列 $A, A', A'', B, B', B'', C, C', C'', D, D', D''$ はすべて，n 次の正方行列とする．ただし，n は正の整数である．従って，行列 X, Y, Z は $2n$ 次の正方行列である．そして，X, Y のドット積を次のように定義する：

$$X \cdot Y = \begin{pmatrix} AA' + \alpha^2 BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & \alpha^2 CB' + DD' \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

このとき，§2 と同様に，次の結合則が成り立つことが証明出来る．

$$(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z) \tag{5.3}$$

次に奇数次元の場合を考える．任意の奇数次元の正方行列は，

$$\Lambda = \begin{pmatrix} A & \mathbf{x} \\ \mathbf{y}^T & d \end{pmatrix}, \quad \Xi = \begin{pmatrix} A' & \mathbf{x}' \\ \mathbf{y}'^T & d' \end{pmatrix}, \quad \Pi = \begin{pmatrix} A'' & \mathbf{x}'' \\ \mathbf{y}''^T & d'' \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

と書ける．ただし，A, A', A'' は偶数 $(2n)$ 次元の正方行列，$\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}''$ は $2n$ 成分の縦ベクトル，$\mathbf{y}^T, \mathbf{y}'^T, \mathbf{y}''^T$ は $2n$ 成分の横ベクトル，d, d', d'' は単なる数，従って，Λ, Ξ, Π はすべて，奇数 $(2n+1)$ 次元の正方行列である．このとき，Λ, Ξ のドット積を次のように定義する：

$$\Lambda \cdot \Xi = \begin{pmatrix} AA' + \alpha^2 \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}'^T & A\mathbf{x}' + \mathbf{x}d' \\ \mathbf{y}^T A' + d\mathbf{y}'^T & \alpha^2 \mathbf{y}^T \mathbf{x}' + dd' \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

すると，やはり，次の結合則が成り立つことが証明出来る．

$$(\Lambda \cdot \Xi) \cdot \Pi = \Lambda \cdot (\Xi \cdot \Pi) \tag{5.6}$$

6　おわりに代えて

結合則を満たすと言う条件だけでは，行列の積に α^2 の任意性が存在することをやゝ詳しく復習したが，それには，どんな意味があるのだろうか．数学的には全く無意味であるかも知れない．しかし，$\alpha^2 = 0$ のケースは，行列の結合則とトレースの性質は使うが，行列式を使わない物理的な問題のモデル計算では，$\alpha^2 = 1$ のケースと区別が付く．

謝辞

原稿を読んで，貴重なコメントを頂いた加瀬博己大同大学名誉教授に謝意を表します．

鎖振り子の一般化

世戸 憲治 *

A Generalization of Chain Pendulum

Kenji SETO*

1　はじめに

「数学・物理通信」(3 巻 1 号 2013.3.8) に，中西襄先生と共著の形で，「多重振り子と鎖振り子」と題したものを発表した．この中で，鎖振り子の解が，ゼロ次の Bessel 関数 J_0 を用いて表わされることを述べた．ここで，一つ疑問が湧いてくる．Bessel 関数には，一般に ν 次のもの J_ν が存在するのに，この解が何故にゼロ次だけなのか，たまたま，ゼロ次であったのか，もっと一般化するとゼロ次ではない Bessel 関数になるのか，あるいは，まったく異なる他の関数になってしまうのかが分からずにそのままになっていた．今回，この問題を解決すべく，再度挑戦したところ，一般化によって，ν 次の Bessel 関数 J_ν が現れることに気付いた．

2　方程式の導入

ここでは，鎖の線密度が場所によって変化するものを考え，この鎖を鉛直に吊るし微小振動させる．振動していないときの鎖の最下点を原点として，上向きに x 軸をとり，鎖の線密度を $\rho(x)$ とする．座標 x，時刻 t における鎖の水平方向の変位を $U(x,t)$ とする．この鎖の微小部分 $[x,\ x+\Delta x]$ を考え，その運動方程式を立てる．この部分が，点 x でそれより下にある部分から受ける張力を $T(x)$ とする．この張力は振動している鎖の方向を向いているので，その水平分力は，線形近似の範囲で $-T(x)\partial U/\partial x$ となり，また，点 $x+\Delta x$ で受ける張力の水平分力は $T(x+\Delta x)[\partial U/\partial x]_{x+\Delta x}$ となる．したがって，その運動方程式は，

$$\Delta x \rho(x)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = T(x+\Delta x)\Big[\frac{\partial U}{\partial x}\Big]_{x+\Delta x} - T(x)\Big[\frac{\partial U}{\partial x}\Big]_x, \tag{2.1}$$

あるいは，書き直して，

$$\rho(x)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big[T(x)\frac{\partial U}{\partial x}\Big] \tag{2.2}$$

となる．ここで，張力 $T(x)$ は，線形近似の範囲では，鎖の点 x より下にある部分の重力と考えてよいので，重力加速度を g として，

$$T(x) = g\int_0^x \rho(x)dx \tag{2.3}$$

と書ける．

* 北海学園大学名誉教授　　E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

ここで，振動の固有モードを調べるため，鎖の水平方向変位 $U(x,t)$ は変数分離形で書けるものとし，さらに，その時間部分は，角振動数 ω の単振動型とし，

$$U(x,t)=\sin(\omega t+\alpha)X(x), \qquad \alpha=\text{定数} \tag{2.4}$$

と置くものとする．このとき，方程式 (2.2) は，

$$\frac{d}{dx}\Big[T(x)\frac{dX}{dx}\Big]+\rho(x)\omega^2X=0 \tag{2.5}$$

と書き直され，これは，Sturm-Liouville 型の微分方程式となる．

3 方程式の解法

方程式 (2.5) を解くため，初めに，

$$X(x)=\frac{f(x)}{\sqrt{T(x)}} \tag{3.1}$$

と変換する [*1]．この変換で，方程式は，

$$Tf''-\sqrt{T}\big(\sqrt{T}\big)''f+\rho\,\omega^2f=0 \tag{3.2}$$

となる．ここで，プライムは x 微分の意味である．さらに，T として，(2.3) 式を代入すると，

$$f''+\Big[\frac{\omega^2\rho}{g\int_0^x\rho\,dx}+\Big(\frac{\rho}{2\int_0^x\rho\,dx}\Big)^2-\frac{\rho'}{2\int_0^x\rho\,dx}\Big]f=0 \tag{3.3}$$

となる．

ここまでは，鎖の線密度 $\rho(x)$ は，任意でよかったが，これを x の冪乗の形とし，ゼロまたは正の任意の実数 ν を用いて，

$$\rho(x)=\rho_0(x/L)^\nu \tag{3.4}$$

と仮定する．L は次元合せのためであるが，鎖の全長とする．これを方程式に代入すると，

$$f''+\Big[\frac{(1+\nu)\omega^2}{g\,x}+\frac{1-\nu^2}{4x^2}\Big]f=0 \tag{3.5}$$

となる．ここでさらに，

$$f(x)=\sqrt{x}\,h(x) \tag{3.6}$$

と従属変数を変換すると，

$$h''+\frac{1}{x}h'+\Big[\frac{(1+\nu)\omega^2}{g\,x}-\frac{\nu^2}{4x^2}\Big]h=0 \tag{3.7}$$

となり，最後に，独立変数を，x から ξ に，

$$x=\frac{g}{4(1+\nu)\omega^2}\xi^2 \tag{3.8}$$

*1 ここでは，発見論的手法を用いるので，多少，回りくどい方法になることをお断りしておく．

と変換すると

$$\frac{d^2h}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{dh}{d\xi}+\Big(1-\frac{\nu^2}{\xi^2}\Big)h=0 \tag{3.9}$$

となる．これは，Bessel の微分方程式で，その解は，ν 次の Bessel 関数を用いて $h=J_\nu(\xi)$ となる．このとき，第 2 種 Bessel 関数 $N_\nu(\xi)$ も解になるが，これは $x\to 0$ で発散する関数なので，ここでは排除する．これから，変換式 (3.8) (3.6) (3.1) をさかのぼると，元の波動関数 $U(x,t)$ の x 依存部分 $X(x)$ は

$$X(x)=x^{-\nu/2}J_\nu\Big(2\omega\sqrt{(1+\nu)x/g}\Big) \tag{3.10}$$

と求められたことになる．ここで，不要な定数はすべて除いておいた．この Bessel 関数の部分は $x^{\nu/2}$ から始まる級数となるので，$X(x)$ は $x\to 0$ で一般に定数となることを注意する．

鎖を吊るした点は動いてはいないので，鎖の全長 $x=L$ の点で，その変位はゼロとなる．すなわち，

$$J_\nu\Big(2\omega\sqrt{(1+\nu)L/g}\Big)=0 \tag{3.11}$$

となり，固有振動の振動数 ω が Bessel 関数のゼロ点から決まることになる．これは一般に無限個存在し，小さい方から，ω_1，ω_2，$\cdots$ とする．また，そのときの ω_i に属する固有関数を $X_i(x)$ と書くことにし，

$$X_i(x)=x^{-\nu/2}J_\nu\Big(2\omega_i\sqrt{(1+\nu)x/g}\Big) \tag{3.12}$$

とする．

以下，この固有関数の規格化を行う．Sturm-Liouville 型方程式の一般論によると，このときの規格化積分には，重み関数として鎖の密度 $\rho(x)$ を付加した積分にしなければならない．ここでは，密度 $\rho(x)$ のうち定数係数を取り除いた x^ν だけを付けることにして，

$$\int_0^L x^\nu X_i(x)X_j(x)dx=\int_0^L J_\nu\Big(2\omega_i\sqrt{(1+\nu)x/g}\Big)J_\nu\Big(2\omega_j\sqrt{(1+\nu)x/g}\Big)dx \tag{3.13}$$

を考える．この式で，変数変換，

$$\alpha_i=2\omega_i\sqrt{(1+\nu)L/g},\qquad y=\sqrt{x/L} \tag{3.14}$$

を施す．α_i は Bessel 関数 $J_\nu(y)$ の i 番目のゼロ点である．この変換で積分式は，

$$\int_0^L x^\nu X_i(x)X_j(x)dx=2L\int_0^1 J_\nu(\alpha_i\,y)J_\nu(\alpha_j\,y)ydy \tag{3.15}$$

となるが，この積分は，Bessel 関数に関する直交性の公式，

$$\int_0^1 J_\nu(\alpha_i\,y)J_\nu(\alpha_j\,y)ydy=\frac{1}{2}\big[{J_\nu}'(\alpha_i)\big]^2\delta_{i,j}=\frac{1}{2}\big[J_{\nu+1}(\alpha_i)\big]^2\delta_{i,j} \tag{3.16}$$

が使える．これから，規格直交化の式

$$\int_0^L x^\nu X_i(x)X_j(x)dx=L\big[J_{\nu+1}(\alpha_i)\big]^2\delta_{i,j} \tag{3.17}$$

が得られる．これから，$X_i(x)/\big[\sqrt{L}\,J_{\nu+1}(\alpha_i)\big]$ が規格化された固有関数となる．

4　おわりに

ここで扱ったような線密度が長さ方向に冪乗で変化する鎖などというものは，実際には存在するかもしれないが，私個人としてはこれまでに見たこともない．したがって，このようなことを考えるのは，物理的にはあまり意味のあることとは思えない．しかし，解析学の立場からすると，Bessel 関数の J_0 から J_ν に拡張できたことで，非常に興味ある結果が得られたものと考えられる．歴史的には，初めに鎖振り子を考えたのは，Daniel Bernoulli と言われている．いまから 300 年も前のことである．その間，ここで扱ったようなことを考えた人はいたのだろうか.

[謝辞]

今回も，京都大学名誉教授の中西襄先生にこの原稿を見ていただき，いくつかのコメントをいただきました．ここに，謹んで感謝いたします.

多重振り子の一般化

世戸 憲治 *

A Generalization of Multi-Weight Pendulum

Kenji SETO*

1 はじめに

前の論文「鎖振り子の一般化」(「数学・物理通信」6 巻 1 号，8-11) では，鎖振り子の密度 ρ が，振り子の最下点から測った長さを x として，x^ν に比例する場合を議論し，ν 次の Bessel 関数 J_ν で表される解を求めた．今回は，この延長として，多重振り子で，下から数えて k 番目の錘の質量 m_k を，k^ν に比例する場合を扱ってみようとしたが，この問題は，あまりに難問で手が付けられず，m_k が k の 1 乗に比例する場合だけを解析することにした．

2 方程式の導入

ここで扱う多重振り子は，錘同士の間隔はすべて等しく ℓ とするが，錘の質量はそれが付いている高さに比例して大きくなるものとする．すなわち，一番下に付いている錘の番号を $k=1$，その質量を m としたとき，下から k 番目の錘の質量 m_k を

$$m_k = k\,m \tag{2.1}$$

とする．この多重振り子が微小振動するときの時刻 t における k 番目の錘の水平方向変位を $U_k(t)$ とし，この錘の運動方程式をつくる．この k 番目と $k+1$ 番目を結ぶ紐の張力を T_k とすると，この張力は振動しているときの紐の方向を向いているので，その水平分力は，線形近似の範囲で，$T_k(U_{k+1}-U_k)/\ell$ となる．同様に，k 番目と $k-1$ 番目を結ぶ紐から受ける水平分力は，$-T_{k-1}(U_k-U_{k-1})/\ell$ となるので，その運動方程式は，

$$k\,m\frac{d^2U_k}{dt^2} = T_k\frac{U_{k+1}-U_k}{\ell} - T_{k-1}\frac{U_k-U_{k-1}}{\ell} \tag{2.2}$$

となる．ここで，張力 T_k は，線形近似の範囲で，k 番目も含めたそれより下にある錘の総重量となるので，重力加速度を g として，

$$T_k = \Big(\sum_{r=1}^{k} m_r\Big)g = \frac{1}{2}k(k+1)mg \tag{2.3}$$

となる．これを方程式に代入すると，m は消えて，

$$\frac{2\ell}{g}\frac{d^2U_k}{dt^2} = (k+1)(U_{k+1}-U_k) - (k-1)(U_k-U_{k-1}), \tag{2.4}$$

* 北海学園大学名誉教授 E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

となる．ここでは，固有振動を求めるため，変位 $U_k(t)$ は変数分離形とし，その時間依存部分は角振動数 ω の単振動とし，

$$U_k(t) = \sin(\omega t + \alpha) X_k, \qquad \alpha = \text{定数} \tag{2.5}$$

とする．これで，方程式は，

$$(k+1)X_{k+1} + (\lambda - 2k)X_k + (k-1)X_{k-1} = 0 \tag{2.6}$$

となる．ここに，

$$\lambda = \frac{2\ell\omega^2}{g} \tag{2.7}$$

と定義した．これから固有値 λ と固有ベクトル $(X_1, X_2, \cdots)$ を求めることになる．

3 方程式の解法

錘の総個数を n としたとき，$n = 1,\ 2$ および，一般の n の場合について，具体的に方程式を解いてみよう．

[$n = 1$ の場合]

錘は 1 個しかないのであるから，方程式 (2.6) で $k = 1$ としたとき，X_2 はゼロとおける．これは，X_2 は振り子を支えている点なので，固定されているものとしてよい．したがって，方程式は

$$(\lambda - 2)X_1 = 0 \tag{3.1}$$

となり，これから $X_1 \neq 0$ として，固有値 λ が $\lambda = 2$ と決まる．

[$n = 2$ の場合]

錘が 2 個の場合は，同様に，$X_3 = 0$ とおけるので，方程式 (2.6) で $k = 1,\ 2$ としたとき，

$$k = 1 \text{ から } 2X_2 + (\lambda - 2)X_1 = 0, \qquad k = 2 \text{ から } (\lambda - 4)X_2 + X_1 = 0 \tag{3.2}$$

となる．これから，$X_1,\ X_2$ が両方ともゼロとならないためには，その係数行列式の値がゼロでなければならず，

$$(\lambda - 2)(\lambda - 4) - 2 = 0, \qquad \text{すなわち}, \qquad \lambda^2 - 6\lambda + 6 = 0 \tag{3.3}$$

となり，これから 2 個の固有値 $\lambda = 3 \pm \sqrt{3}$ が決まる．

[一般の n の場合]

錘の個数が n のときは $X_{n+1} = 0$ とおけるので，(2.6) 式で $k = 1, 2\ \cdots n$ としたものを行列形式で書いたとき，$X_1, X_2, \cdots X_n$ がすべてゼロにならないためには，その係数行列式の値がゼロでなければならない．すなわち，

$$D_n(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda - 4 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \lambda - 6 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda - 2(n-1) & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & \lambda - 2n \end{vmatrix} \tag{3.4}$$

と定義したとき，固有値方程式は

$$D_n(\lambda) = 0 \tag{3.5}$$

となる．この行列式を第 n 行について展開すると，$\lambda - 2n$ にかかる $D_{n-1}(\lambda)$ と $n-1$ にかかる $nD_{n-2}(\lambda)$ になるので，漸化式

$$D_n(\lambda) = (\lambda - 2n)D_{n-1}(\lambda) - (n-1)nD_{n-2}(\lambda) \tag{3.6}$$

を得る．ここでさらに，

$$D_n(\lambda) = (-1)^n n! E_n(\lambda) \tag{3.7}$$

とおくと，この漸化式は，

$$nE_n(\lambda) + (\lambda - 2n)E_{n-1}(\lambda) + nE_{n-2}(\lambda) = 0 \tag{3.8}$$

となる．ここで，Laguerre 陪多項式 $L_n^{(\alpha)}(x)$ の漸化式

$$nL_n^{(\alpha)}(x) + (x - 2n - \alpha + 1)L_{n-1}^{(\alpha)}(x) + (n + \alpha - 1)L_{n-2}^{(\alpha)}(x) = 0, \qquad n \geq 2 \tag{3.9}$$

を引用する [*1]．ちなみに，$n = 0,\ 1,\ 2$ に対する $L_n^{(\alpha)}(x)$ は

$$L_0^{(\alpha)}(x) = 1, \qquad L_1^{(\alpha)}(x) = -x + \alpha + 1, \qquad L_2^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{2}x^2 - (\alpha+2)x + \frac{1}{2}(\alpha+1)(\alpha+2) \tag{3.10}$$

である．この (3.9) 式で $\alpha = 1,\ \ x = \lambda$ とおくと，この漸化式は，(3.8) 式のものと完全に一致する．しかも，(3.10) 式から，

$$L_1^{(1)}(\lambda) = -\lambda + 2, \qquad L_2^{(1)}(\lambda) = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 6\lambda + 6) \tag{3.11}$$

となるので，これらをゼロとおいた方程式は，前に求めた (3.1) (3.3) 式と一致する．以上から，錘が n 個付いたときの固有値 λ を求めるための固有値方程式は，

$$L_n^{(1)}(\lambda) = 0 \tag{3.12}$$

となる．$L_n^{(1)}(\lambda)$ は λ の n 次多項式なので，これから n 個の固有値が求められる．

つぎに，固有ベクトル $(X_1,\ X_2,\ \cdots, X_n)$ を求めよう．Laguere 陪多項式の漸化式 (3.9) で，$n = k+1,\ \alpha = -1,\ x = \lambda$ とおくと，

$$(k+1)L_{k+1}^{(-1)}(\lambda) + (\lambda - 2k)L_k^{(-1)}(\lambda) + (k-1)L_{k-1}^{(-1)}(\lambda) = 0, \qquad k \geq 1 \tag{3.13}$$

となる．この漸化式と (2.6) 式を比べると，まったく同じ形の漸化式になっていることがわかる．ちなみに，(3.10) 式で，$\alpha = -1,\ x = \lambda$ とおくと，

$$L_1^{(-1)}(\lambda) = -\lambda, \qquad L_2^{(-1)}(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda^2 - \lambda \tag{3.14}$$

となる．そこで，$X_1 = -\lambda$ とおくと，$k = 1$ とした (2.6) 式から $X_2 = \lambda^2/2 - \lambda$ となる．あとは，この (2.6) 式と (3.13) 式が漸化式として一致することから，$k = 1, 2, \cdots, n$ に対し，規格化定数を除いて，

$$X_k = L_k^{(-1)}(\lambda) \tag{3.15}$$

[*1] 「数学公式３」(岩波全書) p.97

と求められたことになる．この問題の場合は，固有値方程式と固有ベクトルが，$L_n^{(1)}(\lambda)$ と $L_k^{(-1)}(\lambda)$ という異なる関数で表される結果となった．本来ならば，この (3.15) 式の解で，振子を吊るしている点 $k = n + 1$ としたときに，それは固定点なので，

$$L_{n+1}^{(-1)}(\lambda) = 0 \tag{3.16}$$

として固有値 λ が求められるはずである．実は，この $L_{n+1}^{(-1)}(\lambda)$ と $L_n^{(1)}(\lambda)$ とは，関係式，

$$L_{n+1}^{(-1)}(\lambda) = -\frac{\lambda}{n+1} L_n^{(1)}(\lambda) \tag{3.17}$$

で結ばれている [*2]．したがって，(3.16) 式のようにおいた場合は，固有値ではない $\lambda = 0$ という解もでてくるが，残りの部分が (3.12) 式と一致して，n 個の固有値が求められる．なお，(3.15) 式で求めた解は，この公式を用いると，

$$X_k = -\frac{\lambda}{k} L_{k-1}^{(1)}(\lambda) \tag{3.18}$$

と書き直されることを注意しておく．

ここで，前回で扱った鎖振り子との関係を議論してみよう．錘と錘を結ぶ紐の長さ ℓ を無限小にした極限では，この多重振り子は鎖振り子になるはずである．そこで，

$$x = k\ell \tag{3.19}$$

とおき，この x を一定値に保ったまま，$\ell \to 0$，$k \to \infty$ の極限を考える．このとき，つぎの公式

$$\lim_{k\to\infty} k^{-\alpha} L_k^{(\alpha)}(y/k) = y^{-\alpha/2} J_\alpha(2y^{1/2}) \tag{3.20}$$

が使える [*3]．ここで，(3.15) 式の X_k に比例定数 $1/\ell$ を付けた $(1/\ell)L_k^{(-1)}(\lambda)$ の極限を考え，λ として (2.7) 式を代入すると，

$$\lim_{k\to\infty} (1/\ell) L_k^{(-1)}(\lambda) = \frac{1}{x} \lim_{k\to\infty} k L_k^{(-1)}\Big(\frac{2\omega^2 x/g}{k}\Big) = \omega\sqrt{2/g}\, x^{-1/2} J_{-1}(2\omega\sqrt{2x/g}) \tag{3.21}$$

となる．これは，$J_{-1}(y) = -J_1(y)$ なることを考慮すると，比例定数を除いて，前回の論文で求めたものの $\nu = 1$ とした解と一致する．

4 おわりに

初めは，「はじめに」のところで述べたように，錘の質量を $m_k = k^\nu\, m$ とした場合を求めようとしたが，ことはそう単純には進まなかった．鎖振り子のときは，きれいに解けたのに，この違いはどこから来るのだろうか．一般に，差分方程式は微分方程式よりも難しいことは確かである．だからと言って，ここで大きく躓いてしまったことは残念としか言いようがない．また，宿題が残ってしまった．

[*2] 数学辞典 (岩波書店) 付録の公式 20

[*3] “Higher Transcendental Functions” Bateman Manuscript Project, Vol. II, p.191 (36)

[謝辞]

いつものように，京都大学名誉教授の中西襄先生にこの原稿を見ていただいたところ，さすが先生ですね．早速，この多重振り子を発展させ，解が一般の Laguerre 陪多項式 $L_k^{(\alpha)}$ で表わされるような新しいモデルを作ってくれました．そのうち,『数学・物理通信』に発表されると思いますので，ご期待ください．これで，私の宿題も一挙に解決し，鎖振り子も含めこの多重振り子の問題は大変きれいな理論体系になりました．ここに，深く感謝いたします.

フィボナッチ数列の拡張

武藤　徹 [1]

Extension of Fibonacci's Sequence

Tohru Mutoh [2]

1　フィボナッチ数列

アザラシの子は，1 年で親になり，親は毎年，１番（つがい）の子を産むといいます．このとき，番（つがい）の数は，

$$1,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 5,\quad 8,\quad 13,\quad 21,\quad 34,\quad 55,\quad 89,\quad 144,\quad \cdots \tag{1.1}$$

となります．高校の教科書では，これを，**フィボナッチ数列**といいます．

$$F_1 = 1,\quad F_2 = 1,\quad F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \tag{1.2}$$

で定義されます．

ここで，ｎを整数の範囲まで広げると，

$$F_2 = F_0 + F_1\text{から}\quad F_0 = 0$$
$$F_1 = F_{-1} + F_0\text{から}\quad F_{-1} = 1$$

が導かれます．

ここで，a, b を，任意の 0 以上の整数とし，

$$H_0 = a,\quad H_1 = b,\quad H_{n+2} = H_n + H_{n+1} \tag{1.3}$$

で定義される数列を，**汎フィボナッチ数列**と呼びましょう．

2　10 を法とする剰余

フィボナッチ数列の 1 の位を見ると，

(1) 0112358314594370774156178538190998752796516730336954932572910112358

となり，周期 60 の循環数列となっています．面白いことに，

011235831459437
077415617853819
099875279651673
033695493257291

となっていて，0 が等間隔に並んでいます．この数列は，10 を法として整除したときの剰余の数列です．

汎フィボナッチ数列の場合には，剰余の数列として，(1) の他に，偶数の循環 (2) や，5 の倍数の循環 (3) などが得られます．

---

[1] 数学思想研究者
[2] mutoh.ab@wine.ocn.ne.jp

番号	剰余数列	周期
(1)	0112358314594370774156178538190998752796516730336954932572910112358	60
(2)	02246066280886404482022460662808864044	20
(3)	0550550550550550550	3
(4)	13471897639213471897639213	12
(5)	268426842684268426842684	4

他にはありません．混循環は，存在しません．一覧表で，確かめました．

一覧表

	10(1)	20(2)	30(1)	40(2)	50(3)	60(2)	70(1)	80(2)	90(1)
01(1)	11(1)	21(4)	31(1)	41(1)	51(1)	61(1)	71(4)	81(1)	91(1)
02(2)	12(1)	22(2)	32(1)	42(5)	52(1)	62(2)	72(1)	82(2)	92(4)
03(1)	13(4)	23(1)	33(1)	43(1)	53(1)	63(4)	73(1)	83(1)	93(1)
04(2)	14(1)	24(2)	34(4)	44(2)	54(1)	64(2)	74(1)	84(5)	94(1)
05(3)	15(1)	25(1)	35(1)	45(1)	55(3)	65(1)	75(1)	85(1)	95(1)
06(2)	16(1)	26(5)	36(1)	46(2)	56(1)	66(2)	76(4)	86(2)	96(1)
07(1)	17(1)	27(1)	37(1)	47(4)	57(1)	67(1)	77(1)	87(1)	97(4)
08(2)	18(4)	28(2)	38(1)	48(2)	58(1)	68(5)	78(1)	88(2)	98(1)
09(1)	19(1)	29(1)	39(4)	49(1)	59(1)	69(1)	79(1)	89(4)	99(1)

これで，すべてです．

3　その他の法では

一般に，ある数列において，ある数を法とする剰余のつくる数列を，その数列の剰余数列とよびましょう．ここでは，汎フィボナッチ数列の剰余数列を考えます．

2 を法とすると，剰余数列は，

$$0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, \cdots \tag{3.1}$$

で，周期は 3 です．

3 を法とする剰余数列は，

番号	剰余数列	周期
(1)	01120221011202210	8

一覧表

	10(1)	20(1)
01(1)	11(1)	21(1)
02(1)	12(1)	22(1)

4 を法とする剰余数列は，

番号	剰余数列	周期
(1)	01123101123101123	6
(2)	0220220220	3
(3)	0332130332130	6

一覧表

	10(1)	20(2)	30(3)
01(1)	11(1)	21(3)	31(1)
02(2)	12(1)	22(2)	32(3)
03(3)	13(3)	23(1)	33(3)

5 を法とするとき

番号	剰余数列	周期
(1)	0112303314044320224101123	20
(2)	1342134213	4

一覧表

	10(1)	20(1)	30(1)	40(1)
01(1)	11(1)	21(2)	31(1)	41(1)
02(1)	12(1)	22(1)	32(1)	42(2)
03(1)	13(2)	23(1)	33(1)	43(1)
04(1)	14(1)	24(1)	34(2)	44(1)

6 を法とするとき

番号	剰余数列	周期
(1)	0112352134150554314532510112352	24
(2)	0224044202240442	8
(3)	0330330330	3

一覧表

	10(1)	20(2)	30(3)	40(2)	50(1)
01(1)	11(1)	21(1)	31(1)	41(1)	51(1)
02(2)	12(1)	22(2)	32(1)	42(2)	52(1)
03(3)	13(1)	23(1)	33(3)	43(1)	53(1)
04(2)	14(1)	24(2)	34(1)	44(2)	54(1)
05(1)	15(1)	25(1)	35(1)	45(1)	55(1)

7 を法とするとき

番号	剰余数列	周期
(1)	01123516066542610112	16
(2)	022463250553145202246	16
(3)	03362134044156430336213	16

一覧表

	10(1)	20(2)	30(3)	40(3)	50(2)	60(1)
01(1)	11(1)	21(3)	31(2)	41(3)	51(1)	61(1)
02(2)	12(1)	22(2)	32(2)	42(1)	52(2)	62(3)
03(3)	13(3)	23(1)	33(3)	43(3)	53(2)	63(2)
04(3)	14(2)	24(2)	34(3)	44(3)	54(1)	64(3)
05(2)	15(3)	25(2)	35(1)	45(2)	55(2)	65(1)
06(1)	16(1)	26(1)	36(3)	46(2)	56(3)	66(1)

8 を法とするとき

番号	剰余数列	周期
(1)	011235055271011235	12
(2)	0224620224620	6
(3)	033617077653033617	12
(4)	0440440440	3
(5)	0664260664260	6
(6)	13473257437213473	12
(7)	145167541563145167	12

一覧表

	10(1)	20(2)	30(3)	40(4)	50(1)	60(5)	70(3)
01(1)	11(1)	21(6)	31(7)	41(7)	51(7)	61(3)	71(1)
02(2)	12(1)	22(2)	32(6)	42(5)	52(1)	62(2)	72(6)
03(3)	13(6)	23(1)	33(3)	43(6)	53(3)	63(7)	73(6)
04(4)	14(7)	24(2)	34(6)	44(4)	54(7)	64(5)	74(6)
05(1)	15(7)	25(6)	35(1)	45(7)	55(1)	65(3)	75(7)
06(5)	16(7)	26(5)	36(3)	46(2)	56(7)	66(5)	76(3)
07(3)	17(3)	27(1)	37(6)	47(6)	57(6)	67(7)	77(3)

9 を法とするとき

番号	剰余数列	周期
(1)	0112358437180887641562810112 35	24
(2)	0224617865270775382134720224617	24
(3)	0336066303360663	8
(4)	0448325731450551674268540448257	24

一覧表

	10(1)	20(2)	30(3)	40(4)	50(4)	60(3)	70(2)	80(1)
01(1)	11(1)	21(2)	31(4)	41(1)	51(4)	61(2)	71(1)	81(1)
02(2)	12(1)	22(2)	32(4)	42(4)	52(2)	62(1)	72(2)	82(2)
03(3)	13(2)	23(1)	33(3)	43(1)	53(2)	63(3)	73(4)	83(4)
04(4)	14(4)	24(2)	34(2)	44(4)	54(4)	64(1)	74(4)	84(1)
05(4)	15(1)	25(4)	35(1)	45(4)	55(4)	65(2)	75(2)	85(4)
06(3)	16(4)	26(4)	36(3)	46(2)	56(1)	66(3)	76(1)	96(2)
07(2)	17(2)	27(2)	37(1)	47(2)	57(4)	67(4)	77(2)	87(1)
08(1)	18(1)	28(1)	38(2)	48(4)	58(1)	68(4)	78(2)	88(1)

11 を法とするとき

番号	剰余数列	周期
(1)	01123582t101123582t1	10
(2)	02246t549202246t549	10
(3)	0336942683033694268	10
(4)	044819t874044819	10
(5)	055t437t65055t437t	10
(6)	066178415606617	10
(7)	0773t213470773t2	10
(8)	0885279538088527	10
(9)	099751672909975	10
(10)	0tt986391t0tt9	10
(11)	14593145931459	5
(12)	18964t325718964	10
(13)	28t7628t7628	5

ここで，t は 10 です.

一覧表

	10(1)	20(2)	30(3)	40(4)	50(5)	60(6)	70(7)	80(8)	90(9)	t0(10)
01(1)	11(1)	21(7)	31(11)	41(6)	51(9)	61(6)	71(12)	81(4)	91(10)	t1(1)
02(2)	12(1)	22(2)	32(12)	42(3)	52(8)	62(13)	72(9)	82(1)	92(2)	t2(7)
03(3)	13(7)	23(1)	33(3)	43(5)	53(8)	63(10)	73(7)	83(3)	93(11)	t3(12)
04(4)	14(11)	24(2)	34(7)	44(4)	54(2)	64(12)	74(4)	84(6)	94(3)	t4(5)
05(5)	15(6)	25(12)	35(1)	45(11)	55(5)	65(5)	75(9)	85(8)	95(8)	t5(2)
06(6)	16(9)	26(3)	36(3)	46(2)	56(6)	66(6)	76(13)	86(10)	96(12)	t6(5)
07(7)	17(6)	27(8)	37(5)	47(7)	57(12)	67(9)	77(7)	87(4)	97(9)	t7(13)
08(8)	18(12)	28(13)	38(8)	48(4)	58(1)	68(3)	78(6)	88(8)	98(10)	t8(4)
09(9)	19(4)	29(9)	39(10)	49(2)	59(11)	69(3)	79(8)	89(12)	99(9)	t9(10)
0t(10)	1t(10)	2t(1)	3t(7)	4t(12)	5t(5)	6t(2)	7t(5)	8t(13)	9t(4)	tt(10)

12 を法とするとき

番号	剰余数列	周期
(1)	011235819t75055t314592e10112358	24
(2)	02246t42682t0tt8628t64t202246t	24
(3)	0336930336930	6
(4)	044808840448088	8
(5)	0660660660	3
(6)	07729e873t1e0eet974e325707729e	24
(7)	0996390996390	6
(8)	1347e65e437t538e761783e21347e	24
(9)	156e5491te98516718952794156e	24

ここで，t は 10，e は 11 です.

一覧表

	10(1)	20(2)	30(3)	40(4)	50(1)	60(5)	70(6)	80(4)	90(7)	t0(2)	e0(6)
01(1)	11(1)	21(8)	31(1)	41(9)	51(9)	61(8)	71(9)	81(1)	91(9)	t1(6)	e1(1)
02(2)	12(1)	22(2)	32(6)	42(2)	52(9)	62(2)	72(6)	82(2)	92(1)	t2(2)	e2(8)
03(3)	13(8)	23(1)	33(3)	43(8)	53(8)	63(7)	73(6)	83(8)	93(3)	t3(1)	e3(6)
04(4)	14(1)	24(2)	34(8)	44(4)	54(9)	64(2)	74(6)	84(4)	94(9)	t4(2)	e4(8)
05(1)	15(9)	25(6)	35(1)	45(1)	55(1)	65(8)	75(1)	85(9)	95(9)	t5(8)	e5(9)
06(5)	16(9)	26(2)	36(3)	46(2)	56(9)	66(5)	76(8)	86(2)	96(7)	t6(2)	e6(8)
07(6)	17(8)	27(9)	37(8)	47(8)	57(6)	67(9)	77(6)	87(6)	97(6)	t7(1)	e7(8)
08(4)	18(9)	28(2)	38(8)	48(4)	58(1)	68(2)	78(8)	88(4)	98(9)	t8(2)	e8(6)
09(7)	19(1)	29(6)	39(7)	49(9)	59(1)	69(3)	79(9)	89(9)	99(7)	t9(6)	e9(9)
0t(2)	1t(9)	2t(2)	3t(6)	4t(2)	5t(1)	6t(2)	7t(8)	8t(2)	9t(1)	tt(2)	et(6)
0e(6)	1e(6)	2e(1)	3e(8)	4e(6)	5e(8)	6e(9)	7e(8)	8e(8)	9e(6)	te(9)	ee(6)

13 を法とするとき

番号	剰余数列	周期
(1)	01123580883e1d0ddet85055t2d101123	28
(2)	02246t3033692e0ee973t0tt74e202246	28
(3)	0448d76066d549099516707718940448d	28
(4)	1347e538e64t1edt9628t52793d21347e	28
(5)	14591te861782td984d3257d65e314591	28
(6)	156e426819t639d8729e75d437t4156e4	28

ここで，t は 10，e は 11，d は 12　です.

一覧表

	10(1)	20(2)	30(2)	40(3)	50(1)	60(3)	70(3)	80(1)	90(3)	t0(2)	e0(2)	d0(1)
01(1)	11(1)	21(4)	31(5)	41(6)	51(3)	61(5)	71(3)	81(6)	91(5)	t1(4)	e1(1)	d1(1)
02(2)	12(1)	22(2)	32(5)	42(6)	52(4)	62(4)	72(6)	82(5)	92(2)	t2(1)	e2(2)	d2(4)
03(2)	13(4)	23(1)	33(2)	43(6)	53(4)	63(6)	73(2)	83(1)	93(4)	t3(2)	e3(5)	d3(5)
04(3)	14(5)	24(2)	34(4)	44(3)	54(3)	64(4)	74(2)	84(5)	94(3)	t4(6)	e4(6)	d4(6)
05(1)	15(6)	25(5)	35(1)	45(5)	55(1)	65(5)	75(6)	85(1)	95(3)	t5(4)	e5(4)	d5(3)
06(3)	16(3)	26(6)	36(2)	46(2)	56(6)	66(3)	76(3)	86(5)	96(4)	t6(6)	e6(4)	d6(5)
07(3)	17(5)	27(4)	37(6)	47(4)	57(5)	67(3)	77(3)	87(6)	97(2)	t7(2)	e7(6)	d7(3)
08(1)	18(3)	28(4)	38(4)	48(3)	58(1)	68(6)	78(5)	88(1)	98(5)	t8(1)	e8(5)	d8(6)
09(3)	19(6)	29(6)	39(6)	49(3)	59(5)	69(2)	79(4)	89(3)	99(3)	t9(4)	e9(2)	d9(5)
0t(2)	1t(5)	2t(5)	3t(2)	4t(4)	5t(1)	6t(2)	7t(6)	8t(4)	9t(6)	tt(2)	et(1)	dt(4)
0e(2)	1e(4)	2e(2)	3e(1)	4e(2)	5e(5)	6e(6)	7e(4)	8e(4)	9e(6)	te(5)	ee(2)	de(1)
0d(1)	1d(1)	2d(1)	3d(4)	4d(5)	5d(6)	6d(3)	7d(5)	8d(3)	9d(6)	td(5)	ed(4)	dd(1)

14 を法とするとき

番号	剰余数列	周期
(1)	0112358r76r549r871893d1r0rrde9617819t5167r65e2r10112	48
(2)	02246t2d0ddt84d202246t	16
(3)	033691te74e1dret73tr983e0ee85r437t3r21347e4156e3033	48
(4)	0448d64t0tt628t4044	16
(5)	055t1ed9729e639d75d314590994r3257d538e52792ert95055t	48
(6)	066d42680882td86066d	16
(7)	0770770	3

ここで，t は 10，e は 11，d は 12，r は 13　です.

一覧表

	10(1)	20(2)	30(3)	40(4)	50(5)	60(6)	70(7)	80(6)	90(5)	t0(4)	e0(3)	d0(2)	r0(1)
01(1)	11(1)	21(3)	31(5)	41(3)	51(1)	61(1)	71(1)	81(1)	91(3)	t1(5)	e1(3)	d1(1)	r1(1)
02(2)	12(1)	22(2)	32(5)	42(6)	52(5)	62(4)	72(5)	82(6)	92(5)	t2(2)	e2(1)	d2(2)	r2(3)
03(3)	13(3)	23(1)	33(3)	43(3)	53(5)	63(5)	73(3)	83(3)	93(1)	t3(3)	e3(3)	d3(5)	r3(5)
04(4)	14(5)	24(2)	34(3)	44(4)	54(1)	64(4)	74(3)	84(2)	94(5)	t4(4)	e4(3)	d4(6)	r4(3)
05(5)	15(3)	25(5)	35(1)	45(5)	55(5)	65(1)	75(5)	85(3)	95(5)	t5(1)	e5(5)	d5(5)	r5(1)
06(6)	16(1)	26(6)	36(3)	46(2)	56(3)	66(6)	76(1)	86(6)	96(1)	t6(4)	e6(5)	d6(4)	r6(1)
07(7)	17(1)	27(5)	37(3)	47(3)	57(5)	67(1)	77(7)	87(1)	97(5)	t7(3)	e7(3)	d7(5)	r7(1)
08(6)	18(1)	28(4)	38(5)	48(4)	58(1)	68(6)	78(1)	88(6)	98(3)	t8(2)	e8(3)	d8(6)	r8(1)
09(5)	19(1)	29(5)	39(5)	49(1)	59(5)	69(3)	79(5)	89(1)	99(5)	t9(5)	e9(1)	d9(5)	r9(3)
0t(4)	1t(3)	2t(6)	3t(3)	4t(4)	5t(5)	6t(2)	7t(3)	8t(4)	9t(1)	tt(4)	et(3)	dt(2)	rt(5)
0e(3)	1e(5)	2e(5)	3e(3)	4e(3)	5e(1)	6e(3)	7e(3)	8e(5)	9e(5)	te(3)	ee(3)	de(1)	re(3)
0d(2)	1d(3)	2d(2)	3d(1)	4d(2)	5d(5)	6d(6)	7d(5)	8d(4)	9d(5)	td(6)	ed(5)	dd(2)	rd(1)
0r(1)	1r(1)	2r(1)	3r(3)	4r(5)	5r(3)	6r(1)	7r(1)	8r(1)	9r(1)	tr(3)	er(5)	dr(3)	rr(1)

15 を法とするとき

番号	剰余数列	周期
(1)	0112358r64tf982td74e0ee73tr86f549r75d2f101123	40
(2)	02246t1ed85r31459f87077f65e1drt83eft94r2022	40
(3)	033690993d0dd96066d303369	20
(4)	0448d52791te628t3r1f0ffrdt729e5167r538e4044	40
(5)	055t0tt5055t0	8
(6)	08819t4f3257d4156e2r0rre95f437t2dfet6178088	40
(7)	1347e3f21347e3f21347e3	8
(8)	1892er971892er	8
(9)	1rfde84d1rfd	8
(10)	268f76r4268f76	8
(11)	39d639d639d6	4

ここで，t は 10，e は 11，d は 12，r は 13,f は 14 です.

一覧表

	10(1)	20(2)	30(3)	40(4)	50(5)	60(3)	70(2)	80(6)	90(3)	t0(5)	e0(1)	d0(3)	r0(6)	f0(4)
01(1)	11(1)	21(7)	31(2)	41(6)	51(4)	61(6)	71(8)	81(6)	91(4)	t1(2)	e1(2)	d1(9)	r1(4)	f1(1)
02(2)	12(1)	22(2)	32(6)	42(10)	52(4)	62(4)	72(4)	82(1)	92(8)	t2(6)	e2(6)	d2(1)	r2(2)	f2(7)
03(3)	13(7)	23(1)	33(3)	43(6)	53(4)	63(11)	73(1)	83(2)	93(3)	t3(4)	e3(7)	d3(3)	r3(2)	f3(6)
04(4)	14(2)	24(2)	34(7)	44(4)	54(1)	64(1)	74(1)	84(9)	94(2)	t4(6)	e4(4)	d4(6)	r4(10)	f4(6)
05(5)	15(6)	25(6)	35(1)	45(2)	55(5)	65(2)	75(1)	85(2)	95(6)	t5(5)	e5(4)	d5(4)	r5(4)	f5(1)
06(3)	16(4)	26(10)	36(3)	46(2)	56(6)	66(3)	76(10)	86(1)	96(3)	t6(6)	e6(4)	d6(11)	r6(1)	f6(2)
07(2)	17(6)	27(4)	37(6)	47(7)	57(6)	67(4)	77(2)	87(2)	97(8)	t7(4)	e7(1)	d7(1)	r7(1)	f7(10)
08(6)	18(8)	28(4)	38(4)	48(4)	58(1)	68(10)	78(6)	88(6)	98(1)	t8(2)	e8(9)	d8(2)	r8(1)	f8(2)
09(3)	19(6)	29(4)	39(11)	49(1)	59(2)	69(3)	79(4)	89(8)	99(3)	t9(2)	e9(6)	d9(3)	r9(8)	f9(1)
0t(5)	1t(4)	2t(1)	3t(1)	4t(1)	5t(5)	6t(2)	7t(6)	8t(4)	9t(6)	tt(5)	et(6)	dt(4)	rt(2)	ft(2)
0e(1)	1e(2)	2e(8)	3e(2)	4e(1)	5e(2)	6e(6)	7e(7)	8e(4)	9e(4)	te(4)	ee(1)	de(9)	re(6)	fe(6)
0d(3)	1d(2)	2d(6)	3d(3)	4d(9)	5d(1)	6d(3)	7d(6)	8d(4)	9d(11)	td(1)	ed(2)	dd(3)	rd(4)	fd(9)
0r(6)	1r(9)	2r(6)	3r(4)	4r(2)	5r(2)	6r(10)	7r(4)	8r(1)	9r(1)	tr(1)	er(8)	dr(2)	rr(6)	fr(4)
0f(4)	1f(4)	2f(1)	3f(7)	4f(6)	5f(6)	6f(1)	7f(2)	8f(10)	9f(2)	tf(1)	ef(2)	df(6)	rf(9)	ff(4)

16 を法とするとき

番号	剰余数列	周期
(1)	0112358r52790992er85r2g10112358	24
(2)	02246t0tt4f202246	12
(3)	03369g87g65e0ee6178g76r303369	24
(4)	0448d40448d	6
(5)	055tg9819t3r0rrt71891te5055tg	24
(6)	066d2f0ffdt6066d2f	12
(7)	077f538e3f1g0ggfre83ef97077f5	24
(8)	088088088	3
(9)	0dd84d0dd84	6
(10)	1347e2rgde729e4g3257d3g21347e2rgde	24
(11)	1459f75d1rfe94r1fgrd95f3145	24
(12)	156e1dr96g549r639d5167r4156	24
(13)	1ed73tr74egt93dget5g437t1ed73	24
(14)	268f64tf86f4268f	12
(15)	28t2dft82td628t2	12

ここで，t は 10，e は 11，d は 12，r は 13, f は 14, g は 15 です.

一覧表

	10(1)	20(2)	30(3)	40(4)	50(5)	60(6)	70(7)	80(8)	90(1)	t0(2)	e0(3)	d0(9)	r0(5)	f0(6)	g0(7)
01(1)	11(1)	21(10)	31(11)	41(12)	51(12)	61(3)	71(5)	81(5)	91(5)	t1(13)	e1(12)	d1(11)	r1(11)	f1(7)	g1(1)
02(2)	12(1)	22(2)	32(10)	42(14)	52(1)	62(15)	72(10)	82(15)	92(1)	t2(15)	e2(10)	d2(6)	r2(1)	f2(2)	g2(10)
03(3)	13(10)	23(1)	33(3)	43(13)	53(7)	63(12)	73(13)	83(7)	93(13)	t3(5)	e3(7)	d3(10)	r3(3)	f3(11)	g3(10)
04(4)	14(11)	24(2)	34(10)	44(4)	54(12)	64(14)	74(13)	84(9)	94(11)	t4(2)	e4(10)	d4(4)	r4(12)	f4(14)	g4(13)
05(5)	15(12)	25(10)	35(1)	45(11)	55(5)	65(3)	75(11)	85(1)	95(11)	t5(13)	e5(5)	d5(12)	r5(1)	f5(7)	g5(12)
06(6)	16(12)	26(14)	36(3)	46(2)	56(12)	66(6)	76(3)	86(14)	96(12)	t6(6)	e6(3)	d6(15)	r6(12)	f6(14)	g6(3)
07(7)	17(3)	27(1)	37(13)	47(10)	57(10)	67(12)	77(7)	87(3)	97(7)	t7(5)	e7(10)	d7(13)	r7(13)	f7(11)	g7(3)
08(8)	18(5)	28(15)	38(7)	48(4)	58(1)	68(14)	78(3)	88(8)	98(5)	t8(15)	e8(7)	d8(9)	r8(1)	f8(14)	g8(3)
09(1)	19(5)	29(10)	39(12)	49(12)	59(11)	69(3)	79(1)	89(5)	99(1)	t9(13)	e9(11)	d9(11)	r9(12)	f9(7)	g9(5)
0t(1)	1t(5)	2t(15)	3t(13)	4t(14)	5t(5)	6t(2)	7t(13)	8t(15)	9t(5)	tt(2)	et(13)	dt(6)	rt(5)	ft(15)	gt(13)
0e(1)	1e(13)	2e(1)	3e(7)	4e(13)	5e(5)	6e(12)	7e(10)	8e(7)	9e(10)	te(5)	ee(3)	de(10)	re(7)	fe(11)	ge(13)
0d(9)	1d(12)	2d(15)	3d(13)	4d(9)	5d(11)	6d(6)	7d(10)	8d(4)	9d(12)	td(15)	ed(13)	dd(9)	rd(11)	fd(6)	gd(10)
0r(5)	1r(11)	2r(10)	3r(5)	4r(11)	5r(1)	6r(3)	7r(12)	8r(1)	9r(12)	tr(13)	er(1)	dr(12)	rr(5)	fr(7)	gr(11)
0f(6)	1f(11)	2f(6)	3f(7)	4f(2)	5f(11)	6f(14)	7f(7)	8f(14)	9f(11)	tf(14)	ef(7)	df(15)	rf(11)	ff(6)	gf(7)
0g(7)	1g(7)	2g(1)	3g(10)	4g(10)	5g(13)	6g(12)	7g(3)	8g(3)	9g(3)	tg(5)	eg(13)	dg(13)	rg(10)	fg(11)	gg(7)

17 を法とするとき

番号	剰余数列	周期
(1)	0112358r40448d3g1h0hhgfd94r0rr95f2h1011235	36
(2)	02246th98088h76r2g0ggre71890991te4g202246t	36
(3)	03369g75d0dd729e3f0ffe82td5055tg86f303369g	36
(4)	066d1rft7077f4156e0ee5h437t0tt3rhde6066d1r	36
(5)	1347e1dr84dhet4f1ghfrt6h549r5167r3h21347e	36
(6)	1459f639d4h3257d2fhrd83ef85r1fgdt5g31459f	36
(7)	178g64tf74eg97h65eht92er73tr628t1ed6178g	36
(8)	19t2df96g4268f5279h87g538e2rge93dgt819t2	36

ここで，t は 10, e は 11, d は 12, r は 13, f は 14, g は 15, h は 16　です.

一覧表

	10(1)	20(2)	30(3)	40(1)	50(3)	60(4)	70(4)	80(2)	90(2)	t0(4)	e0(4)	d0(3)	r0(1)	f0(3)	g0(2)	h0(1)
01(1)	11(1)	21(5)	31(6)	41(4)	51(5)	61(7)	71(2)	81(8)	91(2)	t1(7)	e1(5)	d1(4)	r1(6)	f1(5)	g1(1)	h1(1)
02(2)	12(1)	22(2)	32(6)	42(8)	52(8)	62(7)	72(3)	82(3)	92(7)	t2(8)	e2(8)	d2(6)	r2(2)	f2(1)	g2(2)	h2(5)
03(3)	13(5)	23(1)	33(3)	43(4)	53(8)	63(6)	73(7)	83(6)	93(8)	t3(4)	e3(3)	d3(1)	r3(5)	f3(3)	g3(6)	h3(6)
04(1)	14(6)	24(2)	34(5)	44(1)	54(5)	64(7)	74(7)	84(5)	94(1)	t4(5)	e4(2)	d4(6)	r4(1)	f4(4)	g4(8)	h4(4)
05(3)	15(4)	25(6)	35(1)	45(6)	55(3)	65(7)	75(3)	85(6)	95(1)	t5(6)	e5(4)	d5(3)	r5(5)	f5(8)	g5(8)	h5(5)
06(4)	16(5)	26(8)	36(3)	46(2)	56(4)	66(4)	76(2)	86(3)	96(8)	t6(5)	e6(4)	d6(7)	r6(7)	f6(6)	g6(7)	h6(7)
07(4)	17(7)	27(8)	37(4)	47(5)	57(6)	67(5)	77(4)	87(8)	97(7)	t7(4)	e7(2)	d7(3)	r7(7)	f7(7)	g7(3)	h7(2)
08(2)	18(2)	28(7)	38(8)	48(1)	58(1)	68(8)	78(7)	88(2)	98(2)	t8(8)	e8(3)	d8(6)	r8(5)	f8(6)	g8(3)	h8(8)
09(2)	19(8)	29(3)	39(6)	49(5)	59(6)	69(3)	79(8)	89(2)	99(2)	t9(7)	e9(8)	d9(1)	r9(1)	f9(8)	g9(7)	h9(2)
0t(4)	1t(2)	2t(3)	3t(7)	4t(7)	5t(3)	6t(2)	7t(4)	8t(7)	9t(8)	tt(4)	et(5)	dt(6)	rt(5)	ft(4)	gt(8)	ht(7)
0e(4)	1e(7)	2e(7)	3e(6)	4e(7)	5e(7)	6e(4)	7e(5)	8e(8)	9e(3)	te(2)	ee(4)	de(4)	re(2)	fe(3)	ge(8)	he(5)
0d(3)	1d(5)	2d(8)	3d(8)	4d(5)	5d(3)	6d(4)	7d(6)	8d(1)	9d(6)	td(3)	ed(7)	dd(3)	rd(6)	fd(1)	gd(6)	hd(4)
0r(1)	1r(4)	2r(8)	3r(4)	4r(1)	5r(6)	6r(2)	7r(5)	8r(1)	9r(5)	tr(7)	er(7)	dr(5)	rr(1)	fr(5)	gr(2)	hr(6)
0f(3)	1f(6)	2f(6)	3f(3)	4f(5)	5f(1)	6f(3)	7f(4)	8f(8)	9f(6)	tf(7)	ef(6)	df(8)	rf(4)	ff(3)	gf(1)	hf(5)
0g(2)	1g(5)	2g(2)	3g(1)	4g(2)	5g(6)	6g(8)	7g(8)	8g(7)	9g(3)	tg(3)	eg(7)	dg(8)	rg(8)	fg(6)	gg(2)	hg(1)
oh(1)	1h(1)	2h(1)	3h(5)	4h(6)	5h(4)	6h(5)	7h(7)	8h(2)	9h(8)	th(2)	eh(7)	dh(5)	rh(4)	fh(6)	gh(5)	hh(1)

4　汎フィボナッチ数列

任意の 2 数 a,b から始めると，

$$a,\quad b,\quad a+b,\quad a+2b,\quad 2a+3b,\quad 3a+5b,\quad 5a+8b,\quad 8a+13b,\quad 13a+21b,\quad \cdots \tag{4.1}$$

となります.

$$a \text{ の係数}: 1,0,1,1,2,3,5,8,13,\cdots$$
$$b \text{ の係数}: 0,1,1,2,3,5,8,13,21,\cdots$$

となります．b の係数は，フィボナッチ数列です.

a の係数の数列は，フィボナッチ数列に $F_{-1}=1$ を加えたものですから，定義域を整数まで拡張したフィボナッチ数列です．このとき，

$$H_n = aF_{n-1} + bF_n \tag{4.2}$$

の関係が成り立ちます.

仮に 4 を法とすれば，

$$a,\quad b,\quad a+b,\quad a+2b,\quad 2a+3b,\quad 3a+b,\quad a,\quad b,\quad a+b,\quad \cdots \tag{4.3}$$

となって，a, b の値にかかわらず，必ず循環します.

a の係数も，b の係数もフィボナッチ数列であり，その剰余数列は同じですから，a, b から始まる汎フィボナッチ数列の剰余数列の循環は，フィボナッチ数列の剰余数列の循環に帰着します．任意の数を法として，フィボナッチ数列の剰余数列が循環であることが証明されれば，汎フィボナッチ数列の剰余数列が循環であることも証明されます.

エレガントな証明を，お考えください.

なお，汎フィボナッチ数列の剰余数列には短い周期がありますが，その周期は，当然，フィボナッチ数列の剰余数列の周期の約数となります.

5　フィボナッチ数列の剰余数列の比較

汎フィボナッチ数列の剰余数列を比較しましょう.

法	周期	剰余数列の種類の数
2	3	1
3	8	1
4	6	3
5	20	2
6	24	3
7	16	3
8	12	7
9	24	4
10	60	5
11	10	13
12	24	9
13	28	6
14	48	7
15	40	11
16	24	15
17	36	8

何かの法則性があると思いますが，見当たりません．法が素数であるか合成数であるかによって，循環には差異があります．法が素数の場合，剰余は法より小ですから，法の倍数は現れません．法が合成数なら，循環に素因数の倍数があらわれます．

しかしながら，周期には，特徴がみられません．素数の場合，8 から 28 までですが，合成数の場合は，6 から 60 まであります．循環節の種類でも，素数は 1 から 13 まで，合成数は 3 から 15 までで，特徴がみられません．

なお，この周期性については，1774 年に，ラグランジュが書き残しているようです．

編集後記

今年も，はや3月となりました．6巻1号を発行します．

昨年に引き続き，今年もたくさんの投稿が寄せられると予想される．すでにいまの時点で中西先生の「多重振り子の一般化」という論文がこの号には掲載できず，次号送りとなった．

今回，問題となったのは論文のタイトルである．この号には中西先生の「多重振り子の一般化」と同じタイトルの世戸さんの論文が掲載されている．世戸さんは中西先生の論文が投稿掲載されることを考慮して、ご自分の論文のタイトルを「多重振り子の一般化について」とされていたのだが，どうも編集者としてはこの「について」の部分があると明治時代の古い論文を連想してしまうので，編集者から無理を言って，削除してもらった．

そのため，号はちがうけれども同じタイトルの論文が続いて掲載されることになるが，著者がちがうことと掲載の号もちがうので混乱はないと思う．それでも心配な方は論文の引用の際には著者名もはっきり記して引用をお願いする．

こういうことはあまり起こらないことだが，まったく起こらないこととも言えない。何かいいアディアがあれば，編集者にご助言をいただきたい．

ニュートリノ振動の発見の業績でのノーベル賞受賞が昨年にあったが，年が変わってからは重力波がはじめて観測されたことが報じられた．それでこの機会に江沢康生さんに一般相対論の実験的検証のレポートをお願いをしている．いつになるかはわからないが，そのうちにそのレポートを掲載できると考えている．

この『数学・物理通信』は数理物理的なトピックが多くてなかなか物理の固有のトピックが少なかった．物理固有のトピックもバランスよく掲載されるといいと思う．

（矢野　忠）