数学・物理通信

6巻2号　　2016年3月

編集　新関章三・矢野　忠

2016 年 3 月 7 日

目次(Contents)

多重振り子の一般化

A Generalization of Multi-Weight Pendulum

中 西　襄 *1
Noboru NAKANISHI

1　これまでのいきさつと新しい結果

3 年前，筆者は世戸憲治氏 *2 との共著で「多重振り子と鎖振り子」という論文（「数学・物理通信」3-1）を書いた．そこで扱った多重振り子は，n 個の等質量の錘を等間隔にひもでつるした振り子である．これは 1943 年に渡部信夫という人が出したといわれる結果 *3 を再現するもので，固有振動が n 次の Laguerre 多項式のゼロ点で決まるという結果が興味あるところである．ひもの長さ $L = nl$ を一定に保ったまま，錘の間隔 l をゼロにする極限が，密度一様な鎖振り子である．この鎖振り子そのものは，18 世紀の数学者 Daniel Bernoulli によって解析されたということである．筆者らは，上記多重振り子の $n \to \infty$ としても再現できることを示した．ここで橋渡しになる式は，n 次の Lagurre 多項式の或る $n \to \infty$ の極限が 0 次の第 1 種 Bessel 関数 J_0 になるという公式である．

この話はその後放置していたが，最近になって世戸氏は「鎖振り子で現れる Bessel 関数はなぜ 0 次のものだけなのか」という疑問を提起し，それを解決した（「数学・物理通信」6-1）．振り子の下端からの長さを x とするとき，もし鎖の密度が x^ν に比例するならば，固有振動を決める式に ν 次の Bessel 関数 J_ν が現れるという結果である．さらに彼は多重振り子のほうでも，錘の番号を下から k とするとき，錘の質量が k^ν に比例する場合を考察した．しかし一般の場合はうまくいかず，$\nu = 1$ の場合，すなわち $m_k = km_1$ の場合に限って，固有振動を決める式が Laguerre 陪多項式 $L_n^{(\alpha)}$ の $\alpha = 1$ のものになり，$n \to \infty$ の極限で 1 次の Bessel 関数 J_1 を生ずることを示した（「数学・物理通信」6-1）．

以上の結果は，多重振り子の錘の質量 m_k が漸近的に k^α であるような或る質量系列になっているときに，Laguerre 陪多項式 $L_n^{(\alpha)}$（α は整数とは限らない）が現れることを強く示唆している．しかし漸近形のみから，具体的な質量系列を決めることはできない．そこで筆者は逆転の発想で，Laguerre 陪多項式 $L_n^{(\alpha)}$ の漸化式から逆算して錘の質量系列を決めることを試みた．その結果，非常にきれいな質量系列の式が見出された．そして期待通り，$n \to \infty$ の極限で α 次の Bessel 関数 J_α を生ずることが確かめられた．

以下，この論文で引用する数学的な公式は，すべて「岩波・数学辞典」巻末の公式集に載って

*1 京都大学名誉教授　　nbr-nak@trio.plala.or.jp
*2 北海学園大学名誉教授
*3 この情報は大阪市立大学名誉教授河合俊治氏による．

いるものである．

2　錘の質量系列の決定

錘の番号を下から $k = 0,\, 1,\, 2,\, \cdots,\, n-1$ とする [*4]．錘 k の質量を m_k，錘の間隔を l, 重力の加速度を g，振り子の角振動数を ω，錘 k の最大水平振幅（線形近似）を X_k とする．

方程式の導出の仕方は上記の共著論文や世戸論文に与えられているので省略し，結果のみを書く．X_k は n 元連立 1 次方程式

$$(M_k + m_k)X_{k+1} + (m_k\hat{\lambda} - 2M_k - m_k)X_k + M_k X_{k-1} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1) \tag{2.1}$$

を満足する．ただし

$$M_0 X_{-1} \equiv 0, \quad X_n \equiv 0, \tag{2.2}$$

$$M_k \equiv m_0 + m_1 + \cdots + m_{k-1}, \tag{2.3}$$

$$\hat{\lambda} \equiv l\omega^2/g \tag{2.4}$$

とする．

他方，最終結果に Laguerre 陪多項式が現れることを期待しているわけだが，その漸化式は,

$$nL_n^{(\alpha)}(x) + (x - \alpha - 2n + 1)L_{n-1}^{(\alpha)}(x) + (\alpha + n - 1)L_{n-2}^{(\alpha)}(x) = 0 \tag{2.5}$$

で与えられる．

$$D_n(\lambda) \equiv (-1)^n n! L_n^{(\alpha)}(\lambda) \tag{2.6}$$

と置くと,

$$D_n(\lambda) = (\lambda - \alpha - 2n + 1)D_{n-1}(\lambda) - (\alpha + n - 1)(n-1)D_{n-2}(\lambda) \tag{2.7}$$

となる．$D_0(\lambda) = 1$ として，この漸化式を満たす $D_n(\lambda)$ は，行列式

$$D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-\alpha-1 & \alpha+1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-\alpha-3 & \alpha+2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \lambda-\alpha-5 & \alpha+3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda-\alpha-2n+3 & \alpha+n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & \lambda-\alpha-2n+1 \end{vmatrix} \tag{2.8}$$

で与えられる [*5]．この行列式を係数の作る行列の行列式とするような n 元連立 1 次方程式は,

$$(\alpha + k + 1)X_{k+1} + (\lambda - \alpha - 2k - 1)X_k + kX_{k-1} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1) \tag{2.9}$$

[*4] 世戸氏の今回の論文では，k を 1 から n までに変更しているが，これは質量が k に「比例する」ことにこだわったためと思われる．

[*5] 共著論文でやったように，右下 2 行 2 列に関して展開すればよい．

である．

さて，(2.1) は物理的考察によって得られた X_k に対する式であり，(2.9) は数学的考察からこうあってほしいと考えている X_k に対する式である．そこで (2.9) が (2.1) と一致するには，質量 m_k がどうなっていればよいかを調べる．その条件は，$\lambda = \beta\hat{\lambda}$ と置くとき，

$$\begin{aligned} \beta \cdot \frac{M_k + m_k}{m_k} &= \alpha + k + 1, \\ \beta \cdot \frac{M_k}{m_k} &= k \end{aligned} \tag{2.10}$$

となる．これを解けば，

$$\begin{aligned} \lambda &= \beta\hat{\lambda} = (\alpha+1)\hat{\lambda}, \\ m_k &= \frac{\alpha+1}{k} \cdot M_k = \frac{\alpha+1}{k}(m_0 + m_1 + \cdots + m_{k-1}) \end{aligned} \tag{2.11}$$

を得る．(2.11) の第 2 式は質量に対する漸化式で，その解は

$$m_k = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+1)k!} \cdot m_0 \tag{2.12}$$

である [*6]．証明は数学的帰納法による．$k=0$ のときは自明に OK．上の式が正しいとすると，

$$\begin{aligned} m_{k+1} &= \frac{\alpha+1}{k+1}(m_0 + m_1 + \cdots + m_{k-1} + m_k) \\ &= \frac{\alpha+1}{k+1}\Big(\frac{k}{\alpha+1} \cdot m_k + m_k\Big) \\ &= \frac{\alpha+k+1}{k+1} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+1)k!} \cdot m_0 \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+k+2)}{\Gamma(\alpha+1)(k+1)!} \cdot m_0 \end{aligned} \tag{2.13}$$

となって OK．（証明終）

つまり，求める質量系列は (2.12) で与えられることが分かった．

3　固有値問題

質量が (2.12) で与えられることがわかったので，(2.9) から (2.6) まで逆にたどる．固有値を決める方程式は $D_n(\lambda) = 0$ だから，(2.6) と (2.11) の第 1 式により，

$$L_n^{(\alpha)}(\lambda) = 0, \qquad \lambda = (\alpha+1)l\omega^2/g \tag{3.1}$$

である．この解 $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とし，λ_j に対応する ω を ω_j とする．

固有値 λ_j に属する n 個の固有ベクトル $X_k^{[j]}$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ は，(2.9) に $\lambda = \lambda_j$ を代入して得られる n 元連立 1 次方程式

$$(\alpha+k+1)X_{k+1}^{[j]} + (\lambda_j - \alpha - 2k - 1)X_k^{[j]} + kX_{k-1}^{[j]} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1) \tag{3.2}$$

---

*6 $m_k/m_0 = L_k^{(\alpha)}(0)$ とも書ける．次節の (3.6) で $x = 0$ とすればよい．

の解である．

公式集から少し公式を引用する．Kummer の合流型超幾何関数

$$ {}_1F_1(a;\, c;\, x) \equiv \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+r)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c+r)\, r!} x^r \tag{3.3} $$

は漸化式

$$ -a\, {}_1F_1(a+1;\, c;\, x) + (x+2a-c)\, {}_1F_1(a;\, c;\, x) + (c-a)\, {}_1F_1(a-1;\, c;\, x) = 0 \tag{3.4} $$

を満たす．${}_1F_1(-n;\, c;\, x)$ は，n が 0 または正の整数ならば n 次多項式になる．Laguerre 陪関数との関係は，

$$ L_\nu^{(\alpha)}(x) \equiv \frac{\Gamma(\alpha+\nu+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\nu+1)}\, {}_1F_1(-\nu;\, \alpha+1;\, x) \tag{3.5} $$

である．とくに Laguerre 陪多項式は，

$$ L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{r=0}^{n} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\,(-x)^r}{\Gamma(\alpha+r+1)\,(n-r)!r!} \tag{3.6} $$

である．

さて，(3.2) を (3.4) と比較すれば，

$$ X_k^{[j]} = \mathrm{const}\; {}_1F_1(-k;\, \alpha+1;\, \lambda_j) \tag{3.7} $$

を得る．(3.5) を使って Laguerre 陪多項式で書くと，

$$ X_k^{[j]} = \mathrm{const}\; \frac{k!}{\Gamma(\alpha+k+1)} L_k^{(\alpha)}(\lambda_j) \tag{3.8} $$

となる．

なお，固有値を決める行列が対称行列ではないので，固有ベクトルの直交性は保証されない [*7]．したがって，const を規格化するのは意味がない．

4 鎖振り子との関係

$k \to \infty$ のときの m_k の漸近形は次のようにして求められる．

Stirling の公式

$$ \Gamma(z) \asymp \sqrt{2\pi} e^{-z} z^{z-\frac{1}{2}} \tag{4.1} $$

を用いれば，

$$ \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(k+1)} \asymp \mathrm{const}\, k^\alpha \tag{4.2} $$

[*7] Laguerre の陪多項式は直交多項式だが，これは関数としての直交性であり，ここで欲しい $X_k^{[j]}$ のベクトルとしての直交性とはもちろん全く関係がない．念のため．

なるゆえ，(2.12) から

$$\frac{m_k}{m_0} \sim k^\alpha \tag{4.3}$$

となって，確かに k^α の振る舞いをする．

$L = nl$ を一定に保って $n \to \infty$, $l \to 0$ の極限を考える．変数 $z = 2\sqrt{y}$ の冪に関する Bessel 関数 $J_\alpha(z)$ の展開式

$$J_\alpha(2\sqrt{y}) = y^{\alpha/2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-y)^r}{\Gamma(\alpha + r + 1)\, r!} \tag{4.4}$$

を (3.6)（n を k と書いて）と比較すると，

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k!}{\Gamma(\alpha + k + 1)} L_k^{(\alpha)}\left(\frac{y}{k}\right) = y^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{y}) \tag{4.5}$$

であることがわかる．ただし

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k!}{(k-r)!k^r} = \lim_{k\to\infty} \frac{k(k-1)\cdots(k-r+1)}{k^r} = 1 \tag{4.6}$$

を用いた．

(4.5) において，$k = n$，$y = (\alpha+1)\omega^2 L/g$ と置けば，$y/n = (\alpha+1)\omega^2 l/g = \lambda$ なるゆえ，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\Gamma(\alpha + n + 1)} L_n^{(\alpha)}(\lambda) = \bigl(\omega\sqrt{(\alpha+1)L/g}\bigr)^{-\alpha} J_\alpha\bigl(2\omega\sqrt{(\alpha+1)L/g}\bigr) \tag{4.7}$$

となる．したがって，多重振り子の固有値の方程式 (3.1) の $n \to \infty$ の極限は

$$J_\alpha\bigl(2\omega\sqrt{(\alpha+1)L/g}\bigr) = 0 \tag{4.8}$$

という鎖振り子の固有値の方程式になる．これは世戸氏の論文「鎖振り子の一般化」の (3.11) に与えられた，鎖の密度が x^ν に比例する鎖振り子の固有値を与える方程式で $\nu = \alpha$ としたものと，完全に一致する．

また，(4.5) において，$y = (\alpha+1)\omega_j^2 x/g$，$x = kl$ と置けば，$y/k = (\alpha+1)\omega_j^2 l/g = \lambda_j$ であるから，振幅 (3.8) についても同様の結果が得られる．

5 まとめ

n 個の錘を等間隔に取り付けた多重振り子において，錘 k の質量を

$$m_k = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\Gamma(\alpha+1)k!} \cdot m_0 \quad (\alpha + 1 > 0) \tag{5.1}$$

のように設定すれば，固有値問題はすべて Laguerre 陪多項式 $L_k^{(\alpha)}$ で表すことができる．この振り子は，全体の長さを一定に保って $n \to \infty$ とすると，密度が下端からの長さ x の α 乗に比例する鎖振り子になるが，その固有値問題はすべて α 次の第 1 種 Bessel 関数 J_α を用いて表すことができる．そしてそれはもちろん，この鎖振り子の問題を直接解いた結果と一致する．

[**謝辞**]　はじめに述べたように，この論文で扱った問題は世戸憲治氏の仕事によって示唆されたものです．また論文原稿を精読してミスや説明不足などの指摘をして頂きました．世戸憲治氏に深く感謝いたします．

三角関数の還元公式　1

矢野　忠[1]

Reduction Formulae for Trigonometric Functions 1

Tadashi YANO [2]

1　はじめに

三角関数の還元公式 [1] と呼ばれる公式がある[3]．これはたとえば，三角関数 $\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)$ を $\cos\theta$ に還元するような公式である．このエッセイとその続きのエッセイではそのような還元公式をいくつかの方法で導く．

三角関数の還元公式は三角関数の余角の公式だとか補角の公式だとかいわれている公式，およびそれに類似の三角関数の公式，につけた公式の一般的な総称である．普通，三角関数の還元公式の中には三角関数の周期性を示す公式は含めないだろうが，このエッセイではこれも含めていくつか方法での導出を考えることにしよう．

なぜわざわざこのようなことを考えるのか．三角関数の加法公式（加法定理ともいう）を三角関数の水源として考えると主張する，エッセイ [2] を書いたときに，この三角関数の還元公式が三角関数の加法公式を三角関数の水源として考える場合の障害になるように思えたからである[4]．

本論に入る前にこれらの還元公式が出てきたときにどうすればよいかを how to としてまとめておく．これはすでに私の編纂した電気電子工学科ミニマム [3] にもつぎのように述べた[5]．

> 一般角の三角関数で偏角 $\frac{\pi}{2}\pm\theta, \pi\pm\theta, \frac{3\pi}{2}\pm\theta$ 等を含む三角関数を θ の三角関数で表すには，普通これを公式として記憶することはしないで θ を正の鋭角と仮定して図を描いて変形するのが常道である．結果として
>
> 1. $\frac{n\pi}{2}\pm\theta$, n が奇数のとき sin は cos へ, cos は sin へ
> 2. $\frac{n\pi}{2}\pm\theta$, n が偶数のとき sin は sin へ, cos は cos へ
>
> となることを記憶しておいて，後はその角 $\frac{n\pi}{2}\pm\theta$ がどの象限にあるかを見てその象限での sin または cos の符号を間違わないようにつけてやればよい．すなわち，cos は第 1, 4 象限で正の符号をとり，第 2, 3 象限で負の符号をとる．また sin は第 1, 2 象限で正の符号をとり，第 3, 4 象限で負の符号をとることにだけ注意すればよい．

上に引用した know-how の記述が間違っているわけではないが，言いかたをちょっと変えた方がいいかもしれない．それは

1. $\frac{n\pi}{2}\pm\theta$, n が奇数のとき sin は cos へ, cos は sin へ
2. $n\pi\pm\theta$, n が整数のとき sin は sin へ, cos は cos へ

---

[1]元愛媛大学工学部
[2]yanotad@earth.ocn.ne.jp
[3]三角関数の還元公式という用語名は武藤 [1] によるものであるが，まだ一般的ではない．しかし，その名は適切であり，この用語が一般的になったらいいと思う．もっともインターネットの世界では三角関数の還元公式という語は普通に使われている．
[4] [2] では強引に還元公式の導出にも加法定理が使えるとした．そのことにまちがいはないけれども．
[5]このことは私が高校数学の学習参考書 [4] で学んだことである．

と表現した方が記憶しやすいかも知れない．

ともかく，三角関数の偏角のなかに $\frac{\pi}{2}$ とその奇数倍の形で現れるときには $\sin \leftrightarrow \cos$ と $\sin$ と $\cos$ とが相互に入れ変わり，三角関数の偏角のなかに $n\pi$ の形で現れたときには $\cos \to \cos$ のまま，また $\sin \to \sin$ のままで変わらない．

いずれの場合にも三角関数の前につく符号を θ を鋭角としてその偏角がどの象限に来るかを調べて決めてやればよい．

三角関数の還元公式への変換の know-how としてはこれだけ知っておれば，十分なのだが，これらの還元公式をいろいろの方法で導出してみようというのが，このエッセイの目的である．

2　取り扱う対象と方法

取り扱う対象としてどのような公式があるか．またその還元公式を導出する方法としてどのようなものが考えられるか．まずそれについてあげておく．

還元公式の主な対象は三角関数の周期性，負角の公式，余角の公式，補角の公式およびそれらに類似な公式（前に与えた公式の偏角 θ を $-\theta$ と置換して得られる公式）である．

取り扱う対象を具体的に表せば，

[三角関数の周期性]

$$\cos(2n\pi + \theta) = \cos\theta, \quad n = \text{整数} \tag{2.1}$$
$$\sin(2n\pi + \theta) = \sin\theta, \quad n = \text{整数} \tag{2.2}$$

[負角の三角関数の周期性]

$$\cos(2n\pi - \theta) = \cos(-\theta) = \cos\theta, \quad n = \text{整数} \tag{2.3}$$
$$\sin(2n\pi - \theta) = \sin(-\theta) = -\sin\theta, \quad n = \text{整数} \tag{2.4}$$

[負角の公式]

$$\cos(-\theta) = \cos\theta, \tag{2.5}$$
$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \tag{2.6}$$

[余角の公式]

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta, \tag{2.7}$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta \tag{2.8}$$

[$\frac{\pi}{2} + \theta$ の公式]

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta, \tag{2.9}$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta \tag{2.10}$$

[補角の公式]

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta, \tag{2.11}$$
$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta \tag{2.12}$$

[$\pi+\theta$ **の公式**]

$$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta, \tag{2.13}$$

$$\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta \tag{2.14}$$

[$\frac{3\pi}{2}-\theta$ **の公式**]

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right) = -\sin\theta, \tag{2.15}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right) = -\cos\theta \tag{2.16}$$

[$\frac{3\pi}{2}+\theta$ **の公式**]

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right) = \sin\theta, \tag{2.17}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right) = -\cos\theta \tag{2.18}$$

がある．またこれらの公式に類似な公式がもし他にあれば，それらをすべて含む.

では，これらの還元公式を取り扱う方法としてどんなものを考えたらよいだろうか．つぎのような方法が思いつかれるであろう.

1. 円の対称性
2. グラフの移動
3. Euler の公式
4. 回転行列
5. 三角関数の加法公式
6. Maclaurin 展開
7. 偏角の置換　$\theta \leftrightarrow -\theta$
8. その他
   （1）直角三角形の余角の公式
   （2）$\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)$，$\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)$ を 2 回用いる

といった方法が考えられる.

他の方法もあるかもしれないが，これらの方法での還元公式の導出を考えたい．このエッセイとつぎのエッセイでは円の対称性による導出を述べる．他の導出については第 3 のエッセイ以下で取り扱う.

3　円の対称性による導出 1 （回転を用いた）

円の対称性を用いた三角関数の還元公式の導き方を 3 通り述べるが，このエッセイでは一つだけ述べ，残りの 2 つについてはつぎのエッセイで述べる [5].

はじめに三角関数の定義について述べよう．図 1 を見てほしい．半径 1 の円（単位円という）の点 P の座標 (x,y) をそれぞれ

$$\cos\theta = x, \tag{3.1}$$

$$\sin\theta = y \tag{3.2}$$

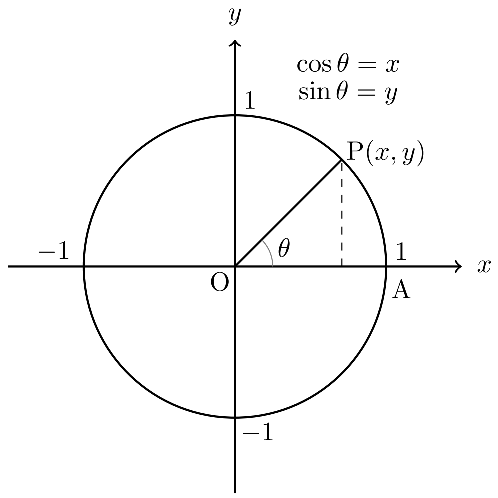

図 1: $\cos\theta$, $\sin\theta$ の定義

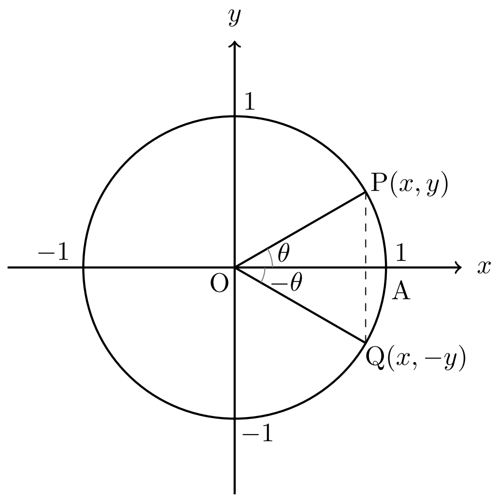

図 2: 負角の公式

と定義する．すなわち，余弦関数 $\cos\theta$ は単位円上の点 P の x 座標であり，正弦関数 $\sin\theta$ は y 座標である．ここで角 θ は OA と OP とのなす角 $\angle\mathrm{POA} = \theta$ である．OP が反時計方向に回転するときの角度を正とし，時計方向に OP が回転するときの角度を負とする [6].

cos と sin の定義は上で与えたものでいいのだが，もし半径が $r(>0)$ の円を考えたときには余弦関数 cos と正弦関数 sin は半径 r の円上の点 P の座標 (X, Y) を用いて

$$\cos\theta = \frac{X}{r}, \tag{3.3}$$

$$\sin\theta = \frac{Y}{r} \tag{3.4}$$

で定義される．もし単位円をとれば半径 $r = 1$ であるから (3.1),(3.2) で与えられた定義に帰着する．要するに半径が r の円であろうが，半径が 1 の円であろうが，$\frac{X}{r} = x$，$\frac{Y}{r} = y$ は角 θ によってその値は一意的に決まる．ここで，$r = 1$ のときの X, Y を x, y と表している．

この x, y の値は普通の座標系の正負のとり方をする．すなわち，x 軸より上の平面では y の値が正であり，x 軸より下の平面では y の値は負である．また，y 軸から右半分の平面では x が正の値をとり，左半分の平面では負の値をとる．したがって $\cos\theta, \sin\theta$ の正負の値は x, y の正負の値にしたがう．もし座標系の各象限で $\cos\theta, \sin\theta$ でとる正負の符号がわからなくなったら，普通の座標系でとる x, y の符号を思い出せばよい．もっとも余弦関数 $\cos\theta = x$ と正弦関数 $\sin\theta = y$ の定義を忘れてはいけない．

このエッセイではとりあげないが，正接関数 $\tan\theta$ は

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \tag{3.5}$$

で定義される．余弦関数と正弦関数の性質がわかれば正接関数の性質はほとんどすぐに導くことができる．

まず負角の公式を導く（図 2 を参照せよ）．図 2 からわかるように角 θ に対応する動径 OP と角 $-\theta$ に対応する動径 OQ とは x 軸に対称であり，

$$\cos(-\theta) = \cos\theta, \tag{3.6}$$

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \tag{3.7}$$

[6] このエッセイでは θ として第 1 象限にあるときのみを図示してあるが，第 2 象限から第 4 象限にあるときにも以下に示したすべての還元公式は同様に成立する．このことは別に示す必要がある．

が成り立つ[7].

これは OA が角 0 であるから，この角 0 を中心にして動径 OP は角 $0+\theta$ であるのに対して動径 OQ は角 $0-\theta$ となっており，角 0 から同じ大きさの互いに反対向きに角 θ だけ回っている．このことは角度 0 を表す OA，すなわち，x 軸に対して動径 OP と OQ が対称であることを示している．

この負角の公式が成り立つことを示すことができたので，後は原点 O のまわりの回転だけで他の還元公式を導くことができる[8].

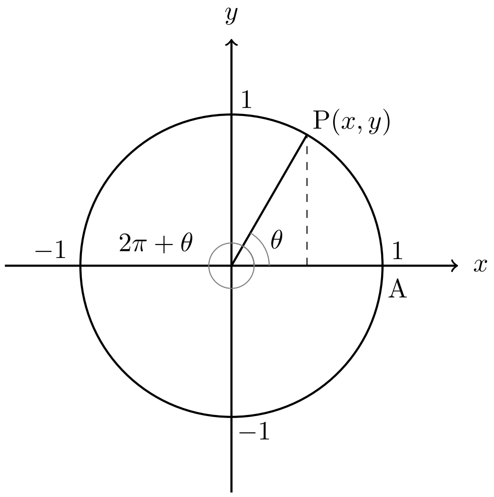

図 3: 三角関数の周期性

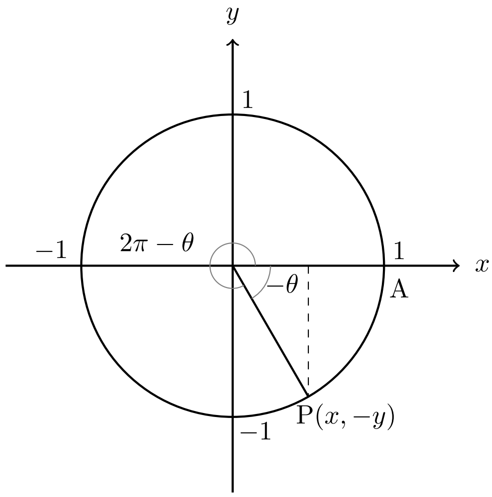

図 4: 負角の三角関数の周期性

まずはじめに三角関数の周期性について述べよう．

動径 OP が θ から $\theta+2n\pi, (n:\text{整数})$ だけ原点 O のまわりに角 $2n\pi$ だけ回転して元のはじめ動径 OP があった元の角 θ の位置にもどってくる．このことはまったく動径が回転をしなかったのと同一であるから，三角関数の周期性

$$\cos(2n\pi+\theta)=\cos\theta, \tag{3.8}$$

$$\sin(2n\pi+\theta)=\sin\theta \tag{3.9}$$

が成り立つことは誰でも直観的に理解できる（図 3 参照)[9]．いまは θ が正の角であるときを考えたが，さらに $-\theta$ のときも同様であることはいうまでもないから

$$\cos(2n\pi-\theta)=\cos(-\theta)=\cos\theta, \tag{3.10}$$

$$\sin(2n\pi-\theta)=\sin(-\theta)=-\sin\theta \tag{3.11}$$

がもちろん成り立つ（図 4 参照）[10]．図 3, 4 では一般角の代表として $2\pi+\theta, 2\pi-\theta$ しか描いていないが，もちろん $2n\pi+\theta, 2n\pi-\theta$ で一般の整数 n に対して成り立つ．

つづいて原点のまわりを動径 OP が半周する（原点のまわりの $180^\circ=\pi$ 回転）ときを考えよう（図 5, 6 参照）．

まず正の角 θ に対しての動径 OP の半周回転，すなわち，$180^\circ=\pi$ の角度の回転を考える．

[7]線対称については [5] の付録 1 を参照せよ．

[8]負角の公式だけが線対称性を用いて導出されており，導出法が一貫しない．もし一貫性を重視するならば負角の公式を使わずに還元公式の導出ができる．脚注 9 を参照．

[9]このエッセイでは，説明の都合上，特に言及しない限り θ は $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ にとっている．この条件は $x\ge 0, y\ge 0$ を意味する．しかし，この制約が最終的には取り除かれた形ですべての還元公式が成り立つ．

[10]負角の三角関数の周期性が成り立ち，つづいて負角の公式で最右辺が得られたと考えている．しかし，$-\theta$ は第 4 象限にあるから，左辺から直接に最右辺が求めると考えることもできる．その場合には負角の公式は (3.10),(3.11) の特殊な場合と考える．

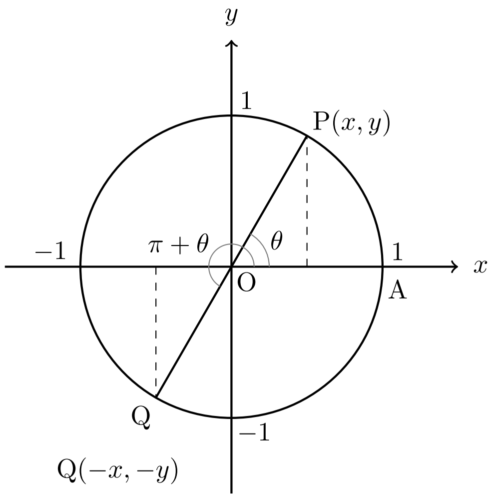

図 5: $\cos(\pi+\theta)$, $\sin(\pi+\theta)$ の公式

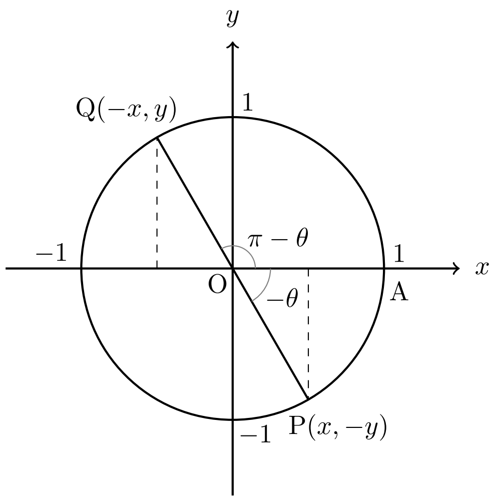

図 6: 補角の公式

すなわち，角 $\pi+\theta$ のときにはこの回転によって動径 OP は P とは原点 O に対してちょうど反対側の図 5 の OQ に来る．これは原点を中心として動径 OP を $180° = \pi$ だけ回転したことになり，これは元の OP から見れば，点 Q の位置は点 P と原点対称な点となる．このとき点 Q の座標は $(-x,-y)$ である（点対称の説明については [5] の付録 1 を参照せよ）．点 Q の座標は $(\cos(\pi+\theta), \sin(\pi+\theta))$ とも表せるので，したがって，$x=\cos\theta, y=\sin\theta$ であったことを想い起こせば,

$$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta, \tag{3.12}$$

$$\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta \tag{3.13}$$

が成り立つ.

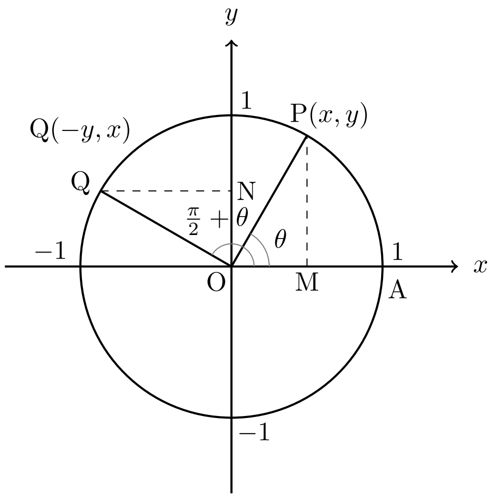

図 7: $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$， $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ の公式

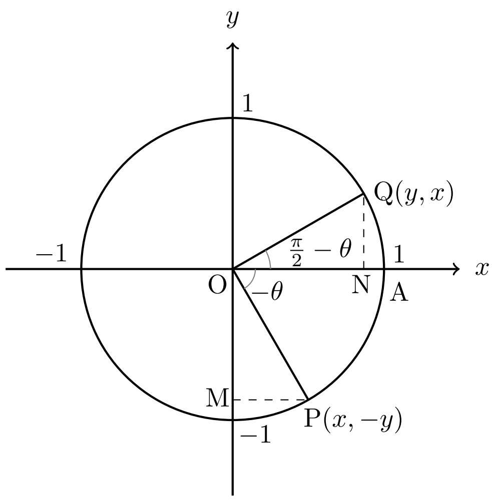

図 8: 余角の公式

つぎに，角 $\pi-\theta$ のときには図 6 に示されたように角 $-\theta$ の動径 OP を $180° = \pi$ 回転して動径は OQ にくる．このとき点 Q は点 P と原点対称となる．したがって，点 P の座標は $(x,-y)$ であったから点 Q の座標は $(-x,y)$ となる．動径 OQ の角度は $\pi-\theta$ であったから，点 Q の座標は $(\cos(\pi-\theta), \sin(\pi-\theta))$ とも表される．

したがって

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta, \tag{3.14}$$
$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta \tag{3.15}$$

が成り立つ．(3.14),(3.15) を**補角の公式**という．

補角とは二つの角を加えたときにその和が $180° = \pi$ となる角である．いま $\theta + (\pi - \theta) = \pi$ であるから確かに θ と $\pi - \theta$ とは互いに補角である [11]．

さらに，原点 O のまわりを動径 OP が 1/4 周回転する，すなわち，$90° = \frac{\pi}{2}$ の回転する場合を考えよう．このとき角 θ と $-\theta$ はそれぞれ $\frac{\pi}{2} + \theta$ と $\frac{\pi}{2} - \theta$ となる（図 7, 8 参照）．

図 7 において OP の x 軸とのなす角が θ のときを考えると三角形 ΔOQN は三角形 ΔOPM を原点 O のまわりに $90° = \pi/2$ 回転したものだから三角形 ΔOPM と三角形 ΔOQN とは合同である．

したがって，$\mathrm{OM} = \mathrm{ON} = x$, $\mathrm{PM} = \mathrm{QN} = y$ であるが，Q は第 2 象限にあるので，このことも考慮すれば Q の座標は $(-y, x)$ となる．

また点 Q の座標は $\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right)$ と表せるから

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta, \tag{3.16}$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta \tag{3.17}$$

が成り立つ．

図 8 において OP の x 軸とのなす角が $-\theta$ のときには動径 OP を原点 O のまわりに $90° = \frac{\pi}{2}$ 回転させると動径 OQ となる．このとき三角形 ΔOPM は原点 O のまわりに $90° = \frac{\pi}{2}$ 回転して三角形 ΔOQN となる．だから三角形 ΔOQN は三角形 ΔOPM と合同である．したがって $\mathrm{OM} = \mathrm{ON} = y$, $\mathrm{PM} = \mathrm{QN} = x$ である．点 Q はいま第 1 象限にあるからその座標は (y, x) となる．

点 Q の座標は $(\cos(\frac{\pi}{2} - \theta), \sin(\frac{\pi}{2} - \theta))$ とも表されるから，

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta, \tag{3.18}$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta \tag{3.19}$$

が成り立つ．(3.18),(3.19) を**余角の公式**という．

いま二つの角 θ と $\frac{\pi}{2} - \theta$ とをたすと $\frac{\pi}{2}$ となる．たして $90° = \frac{\pi}{2}$ となる二つの角は互いに余角をなすという [12]．

最後に原点 O のまわりを動径 OP が 3/4 周回転する，すなわち，$270° = \frac{3\pi}{2}$ の回転する場合を考えよう．このとき角 θ と $-\theta$ は原点 O のまわりに $\frac{3\pi}{2}$ 回転してそれぞれ $\frac{3\pi}{2} + \theta$ と $\frac{3\pi}{2} - \theta$ となる（図 9, 10 参照）．

図 9 において OP の x 軸とのなす角が θ のときには三角形 ΔOPM を $270° = \frac{3\pi}{2}$ 回転させると三角形 ΔOQN となる．これらの三角形は合同である．したがって，$\mathrm{OM} = \mathrm{ON} = x, \mathrm{PM} = \mathrm{QN} = y$ である．点 Q はいま第 4 象限にあるから，その座標は $(y, -x)$ となる．ところで点 Q の座標は $(\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta), \sin(\frac{3\pi}{2} + \theta))$ で表されるから

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = \sin\theta, \tag{3.20}$$
$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\cos\theta \tag{3.21}$$

が成り立つ．

図 10 において OP の x 軸とのなす角が $-\theta$ のときには動径 OP を原点 O のまわりに $\frac{3\pi}{2}$ 回転させると OQ となる．このとき三角形 ΔOPM は三角形 ΔOQN へと回転移動する．このとき二つの三角形の合同である．し

[11] 補角は角 θ が $0 < \theta < \pi$ の場合に定義されたものであろう．ここではその意味を拡張して使っている．
[12] 余角は角 θ が $0 < \theta < \pi/2$ の場合に定義されたものであろう．ここではその意味を拡張して使っている．

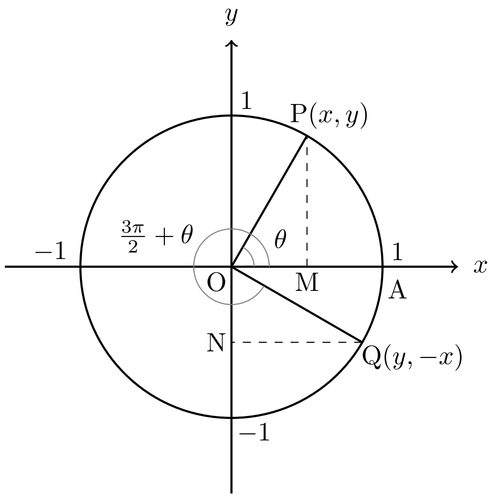

図 9: $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)$，$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)$ の公式

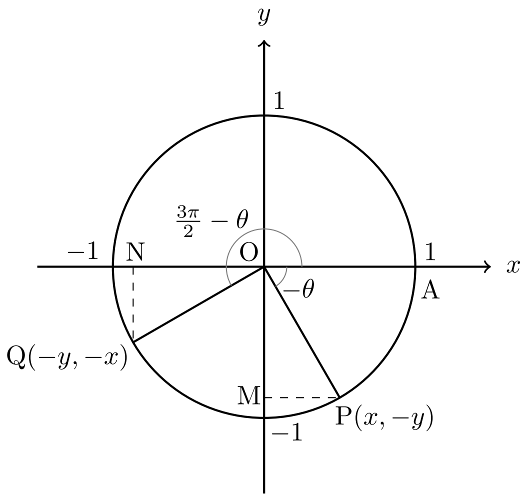

図 10: $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)$，$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)$ の公式

たがって，$\mathrm{OM} = \mathrm{ON} = y, \mathrm{PM} = \mathrm{QN} = x$ である．点 Q が第 3 象限にあるから，点 Q の座標は $(-y, -x)$ である．ところでこの点 Q の座標は $(\cos(\frac{3\pi}{2} - \theta), \sin(\frac{3\pi}{2} - \theta))$ で表されるから

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin\theta, \tag{3.22}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\cos\theta \tag{3.23}$$

が成り立つ．

円の対称性を用いた三角関数の還元公式の導出は以上ですべてであるが，余角の公式と補角の公式は線対称であることを用いて導出するのが普通である．この導出はつぎのエッセイ [5] で述べる [13].

この節で導いた還元公式は θ が第 1 象限の角，すなわち，$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ である場合に成り立つことしか示されていない．しかし，cos や sin のグラフを描くと，$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ で一致している等式は第 1 象限以外の $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$ でも一致することが直観的にわかる．この説明は cos 関数や sin 関数のグラフを用いて還元公式を導く場合に述べる．

もともと還元公式は第 2〜4 象限にある角に対する cos 関数とか sin 関数の値を第 1 象限の角の cos 関数や sin 関数の値から知るという目的のために導かれた公式であろう．そうであるならば，角 θ は第 1 象限の角であれば十分であろう．しかし，それが第 2〜4 象限の任意の角に対しても成り立つのは当然でもあるが，ちょっと不思議な気もする．もともとの目的から言えば，第 1 象限の角に対して成り立てば十分のはずだからである．

さらに言うと余角の公式があれば，$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ の角 θ に対してだけ cos および sin の関数値がわかれば，$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の角に対する cos と sin の関数値も求められる [6].

現在では実用上は関数電卓やパソコン等があるので，三角関数表も不要かもしれない．だが，高校の数学教科書につけられた三角関数表が $0°$〜$90°$（弧度法での 0〜$\frac{\pi}{2}$ に対応）に対してのみ与えられていることの理由を知っておくことはやはり必要であろう．

4　円の対称性が使える理由

円の対称性から三角関数の還元公式が導ける理由はなんだろうか．

[13] 余角の公式を導くのに角 θ をなす動径 OP と角 $\frac{\pi}{2} - \theta$ をなす動径 OQ とが $y = x$ に対して対称であることを用いるか，用いないかによって文献が 2 通りに分かれる．

これは円の第 4 象限の部分を x 軸に対称に折り返すと円の第 1 象限となり，第 2 象限の部分を y 軸に対称に折り返せば，同じく円の第 1 象限となる．また，第 3 象限を原点に関して $-180° = -\pi$ 回転すれば，第 1 象限となるからであろう．

また $y = x$ や $y = -x$ に関して対称に折り返す場合には符号を除いて考えれば x 座標と y 座標の値は入れ代わる．またこれらの折り返しや回転の変換に対して，対応した座標の符号が変ったりもするが，それらの変換に対して $x^2 + y^2 = 1$ という円の方程式は変わらない．これが円の対称性である．

また，一方では折り返しや回転の変換する前の角度が指定されるとその角度の cos で x 座標が，sin で y 座標が決まる．

要するに二つの方法で点の座標を表して，それを等しくおくことによってこれらの還元公式が得られている．

5　おわりに

三角関数の還元公式を導出する方法のうちでもっとも初等的と思われる，円上の点 P の原点のまわりの回転を用いた導出について述べた．これを述べるだけでもこんなにページ数を要するとは思ってもいなかったが，2 節で列挙した他の導出についてはつづきのエッセイに譲ることにする．

三角関数の還元公式の回転による導出の根拠をはっきりさせようと思ったのだが，明瞭には述べることはできなかったかもしれない．その過程でいろいろ考えたこともあるが，それらについてもつづきのエッセイで述べることにしたい．

(2016. 3. 3)

参考文献

[1] 武藤　徹,『数学読本 I』代数学・幾何学,（三省堂，1998）156-159

[2] 矢野　忠，加法定理は「水源池」となりうるか，研究と実践（愛数協），**76** (2001.3) 14-18,
『数学散歩』（国土社，2005）42-56 に収録

[3] 矢野　忠,『電気電子工学科ミニマム』（第 3 版）（愛媛大学電気電子工学科，2001）4

[4] 藤森良夫,『解析の基礎』（続編）（考え方研究社，1954）661

[5] 矢野　忠，三角関数の還元公式 2，数学・物理通信，**6 巻 2 号**（2016.3）16-26

[6] 遠山　啓,『基礎からわかる数学入門』（ソフトバンククリエイティブ，2013）169-173

三角関数の還元公式　2

矢野　忠 [1]

Reduction Formulae for Trigonometric Functions 2

Tadashi YANO [2]

1　はじめに

「三角関数の還元公式 1」 [1] で円周上の点 P を原点 O を中心にして回転することによって三角関数の還元公式を導出した．このエッセイでは一般に行われている線対称性を用いることによる還元公式の導出 [2] [3] と藤森の還元公式の導出 [4] について述べる．これは円の対称性を用いていることでは同じだが，やはりすこし考え方が違うと思われる．

ここでの三角関数の還元公式の円の対称性を用いた導出では点対称と線対称の知識が必要になるので，付録にまとめておく．

2　円の対称性による導出 2 (線対称性を用いた)

このエッセイで，線対称性を用いて導出する還元公式は負角の公式，補角の公式，余角の公式，$\frac{3\pi}{2}-\theta$ の公式である．ここでの導出は [1] の回転の方法とはすこし異なっているが，この線対称性を用いる導出はもっとも一般的によく行われている導出である．

なお，一般的な場合にも回転を用いて導かれる還元公式の導出はすでに [1] で述べたのでここでは省いている．

2.1　負角の公式

まず負角の公式を導く（図 1 を参照せよ）．図 1 からわかるように角 θ に対応する動径 OP と角 $-\theta$ に対応する動径 OQ とは x 軸に対称であり，

$$\cos(-\theta)=\cos\theta, \tag{2.1}$$

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta \tag{2.2}$$

が成り立つ [3]．

これは OA が角 0 であるから，この角 0 を中心にして動径 OP は角 $0+\theta$ であるのに対して動径 OQ は角 $0-\theta$ となっており，角 0 から同じ大きさの互いに反対向きに角 θ だけ回転している．このことは角度 0 を表す OA，すなわち，x 軸に対して動径 OP と OQ が対称であることを示している．

---
[1] 元愛媛大学工学部

[2] yanotad@earth.ocn.ne.jp

[3] 線対称については付録を参照せよ．

2.2　補角の公式

角 θ に対する補角は $\pi-\theta$ であり，角 $\pi-\theta$ に対する補角は θ である．すなわち，

$$\theta+(\pi-\theta)=\pi \tag{2.3}$$

となり，θ と $\pi-\theta$ とは互いに補角である [4].

図 2 を見ると三角形 ΔOPM を y 軸に関して対称に折り返せば，三角形 ΔOQN が得られる．したがって，この 2 つの三角形は合同であり，点 P の座標を (x,y) とすれば，点 Q の座標は $(-x,y)$ となる．したがって

$$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta; \tag{2.4}$$

$$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta \tag{2.5}$$

が成り立つ．

またこのことは

$$\theta=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right); \tag{2.6}$$

$$\pi-\theta=\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \tag{2.7}$$

であるから，x 軸と角 $\frac{\pi}{2}$ をなす直線，すなわち，y 軸に関して角 θ と $\pi-\theta$ とは対称の角をなすことからもわかる．

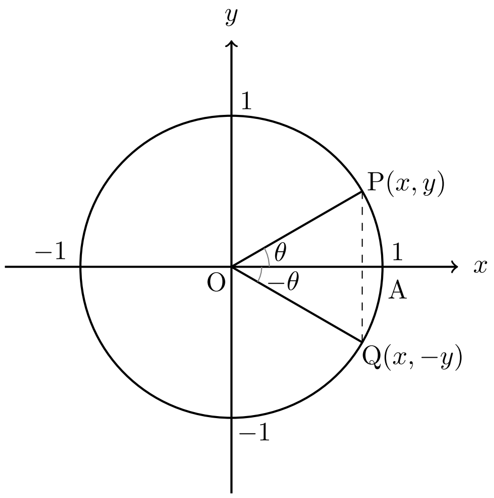

図 1: 負角の公式

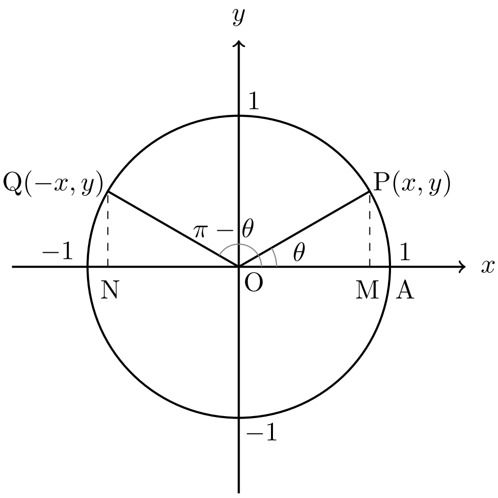

図 2: 補角の公式

2.3　余角の公式

角 θ に対する余角は $\frac{\pi}{2}-\theta$ であり，角 $\frac{\pi}{2}-\theta$ に対する余角は θ である [5]．すなわち，

$$\theta+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\pi}{2} \tag{2.8}$$

となり，θ と $\frac{\pi}{2}-\theta$ とは互いに余角である．

[4] 補角は角 θ が $0<\theta<\pi$ の場合に定義されたものであろう．ここではその意味を拡張して使っている．
[5] 余角は角 θ が $0<\theta<\pi/2$ の場合に定義されたものであろう．ここではその意味を拡張して使っている．

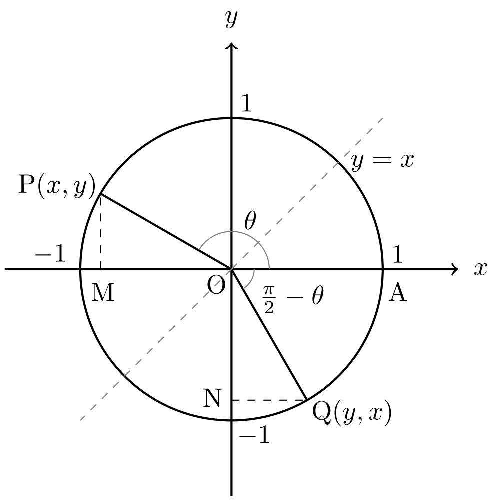

図 3: 余角の公式

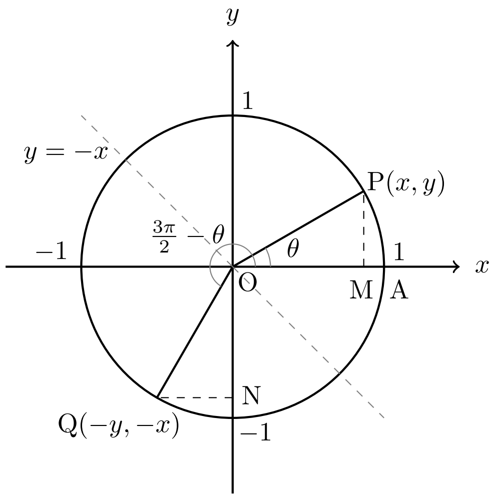

図 4: $\frac{3\pi}{2} - \theta$ の公式

図 3 で三角形 ΔOPM を直線 $y = x$ に関して対称に折り返せば，三角形 ΔOQN が得られる [6]．したがって，三角形 ΔOPM と三角形 ΔOQN は合同である．

点 P の座標を (x, y) とすれば，点 Q の座標は (y, x) となる．したがって

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta, \tag{2.9}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta \tag{2.10}$$

が成り立つ．

このことはまた

$$\theta = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} - \theta\right), \tag{2.11}$$

$$\frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \tag{2.12}$$

であるから，x 軸と角 $\frac{\pi}{4}$ をなす直線，すなわち，$y = x$ に関して角 θ と $\frac{\pi}{2} - \theta$ とは対称の角をなすことからもわかる．

2.4 $\frac{3\pi}{2} - \theta$ の公式

最後に偏角が $\frac{3\pi}{2} - \theta$ の公式を導出しよう．

図 4 で三角形 ΔOPM を直線 $y = -x$ に関して対称に折り返せば，三角形 ΔOQN が得られる．したがって，三角形 ΔOPM と三角形 ΔOQN は合同である．点 P の座標を (x, y) とすれば，点 Q の座標は $(-y, -x)$ となる．したがって

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin\theta, \tag{2.13}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\cos\theta \tag{2.14}$$

が成り立つ．

[6] θ を第 2 象限の角にここではとったが，第 1 象限にとってもよい．図に記号が記入しにくいためにわざと第 2 象限の角を選んである．$x = \cos\theta, y = \sin\theta$ と定義していることを想起せよ．ここでは例外的に $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ととられていない．

このことはまた

$$\theta = \frac{3\pi}{4} - \left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right), \tag{2.15}$$

$$\frac{3\pi}{2} - \theta = \frac{3\pi}{4} + \left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right) \tag{2.16}$$

と表すことができるので，x 軸と角 $\frac{3\pi}{4}$ をなす直線，すなわち，$y = -x$ に関して角 θ と $\frac{3\pi}{2} - \theta$ とは対称の角をなすことからもわかる．

3　円の対称を用いた導出 3　(藤森の方法)

回転を用いた還元公式の導出 [1] とも 2 節で述べた線対称性を用いた還元公式ともまったく異なるともいえないかもしれないが，藤森の与えた導出を述べる [4]．

3.1　余角の公式

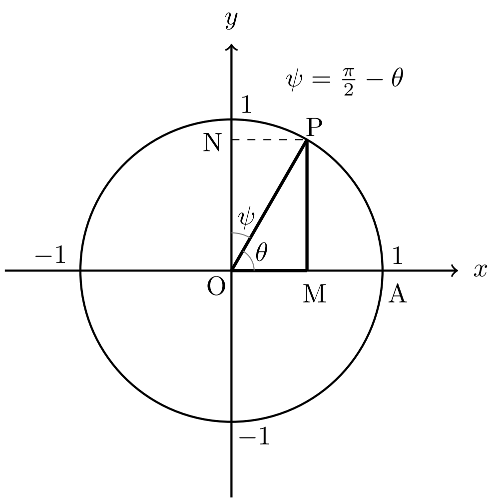

図 5: 余角の公式

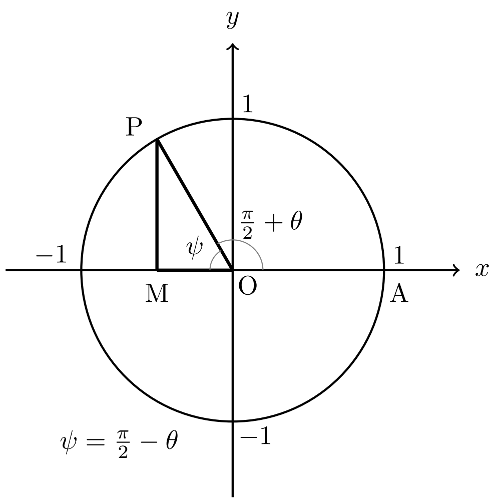

図 6: $\frac{\pi}{2} + \theta$ の公式

図 5 で角 θ を正の鋭角とする．角 $\psi = \frac{\pi}{2} - \theta$ は第 1 象限の角であり，その余弦関数 cos と正弦関数 sin は $\frac{\pi}{2} - \theta$ の隣の角 θ の sin と cos にそれぞれ等しく，符号は cos は正，sin も正であるから

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta, \tag{3.1}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta \tag{3.2}$$

が導かれる [7]．

[7] 藤森は余角の公式を直角三角形において導いており，改めて円を用いては導出していない．直角三角形から得られた余角公式は一般角で成立することは保証されない．これについての検討はつづきのエッセイに譲る [5]．

3.2 $\frac{\pi}{2}+\theta$ の公式

図 6 で角 θ を正の鋭角とする．角 $\frac{\pi}{2}+\theta$ は第 2 象限の角であり，その余弦関数 cos と正弦関数 sin はその隣の角 $\psi=\frac{\pi}{2}-\theta$ の cos と sin にそれぞれ等しく，符号は cos は負，sin は正であるから

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=-\sin\theta, \tag{3.3}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta \tag{3.4}$$

が導かれる．

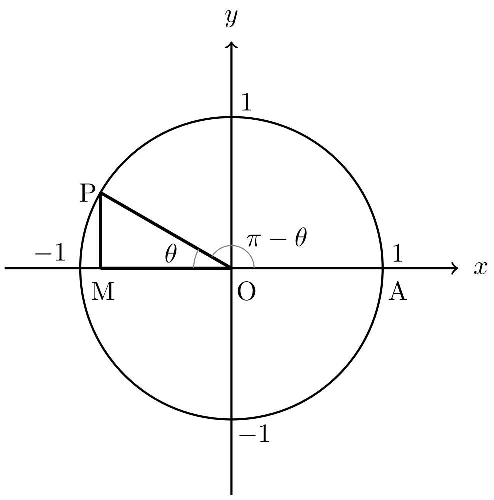

図 7: 補角の公式

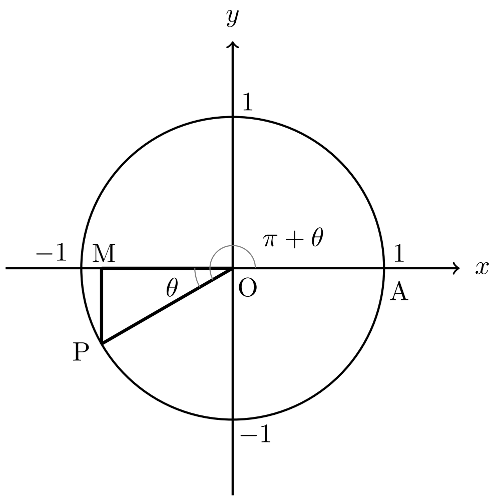

図 8: $\pi+\theta$ の公式

3.3 補角の公式

図 7 で角 θ を正の鋭角とする．角 $\pi-\theta$ は第 2 象限の角であり，その余弦関数 cos と正弦関数 sin は $\pi-\theta$ の隣の角 θ の cos と sin に絶対値はそれぞれ等しく，符号は cos は負，sin は正であるから

$$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta, \tag{3.5}$$

$$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta \tag{3.6}$$

が導かれる．

3.4 $\pi+\theta$ の公式

図 8 で角 θ を正の鋭角とする．角 $\pi+\theta$ は第 3 象限の角であり，その余弦関数 cos と正弦関数 sin は角 $(\pi+\theta)-\pi=\theta$ の cos と sin に絶対値はそれぞれ等しく，符号は cos は負，sin も負であるから

$$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta, \tag{3.7}$$

$$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta \tag{3.8}$$

が導かれる．

3.5　$\frac{3\pi}{2} - \theta$ の公式

図 9 で角 θ を正の鋭角とする．角 $\frac{3\pi}{2} - \theta$ は第 3 象限の角であり，その余弦関数 cos と正弦関数 sin は角 $\psi = \frac{\pi}{2} - \theta$ の cos と sin に絶対値はそれぞれ等しく，符号は cos は負，sin も負であるから

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\cos\psi = -\sin\theta, \tag{3.9}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin\psi = -\cos\theta \tag{3.10}$$

が導かれる．

3.6　$\frac{3\pi}{2} + \theta$ の公式

図 10 で角 θ を正の鋭角とする．角 $\frac{3\pi}{2} + \theta$ は第 4 象限の角であり，その余弦関数 cos と正弦関数 sin は角 $\psi = \frac{\pi}{2} - \theta$ の cos と sin に絶対値はそれぞれ等しく，符号は cos は正，sin は負であるから

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = \cos\psi = \sin\theta, \tag{3.11}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\psi = -\cos\theta \tag{3.12}$$

と導かれる．

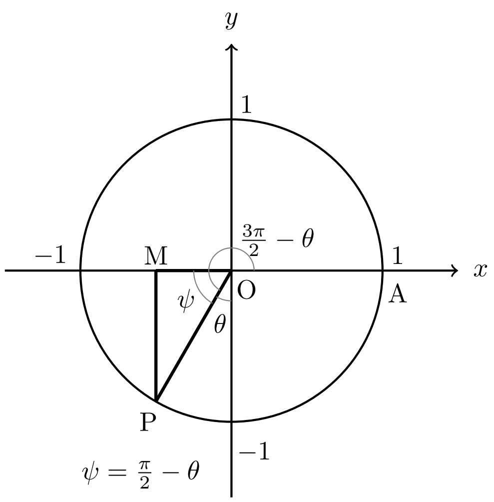

図 9: $\frac{3\pi}{2} - \theta$ の公式

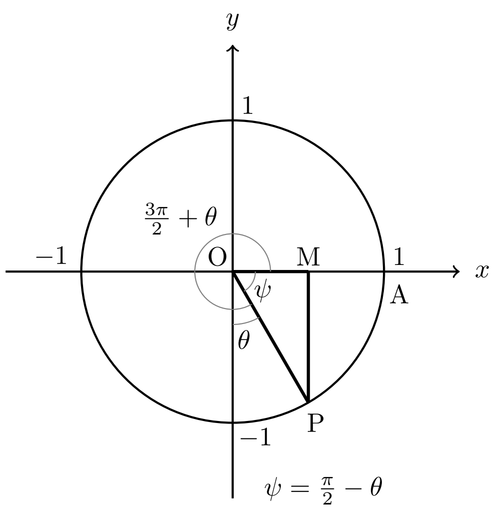

図 10: $\frac{3\pi}{2} + \theta$ の公式

4　おわりに

円の対称性を用いた三角関数の還元公式の中でもっとも一般的と思われる線対称性を用いた導出と藤森の方法を述べた．

[1] とこのエッセイで円の対称性を用いた導出を述べることができたと思う．しかし，角 θ が正の鋭角であるという制限を除いても同様にすべての還元公式が成り立つことはつづきのエッセイ [5] で示したい．

なお円の対称性を用いての還元公式を導出するときには点対称と線対称の知識が必要になるので付録にまとめてある．

5　付録　点対称と線対称

この付録では武藤 [6] [7] にしたがって三角関数の還元公式を導くときに用いる点対称と線対称について述べよう．

5.1　点対称

まず点対称から述べよう．**点対称**とはある点を中心にしてその点のまわりに $\pi = 180^\circ$ 回転させたとき，その図形（点，線，その他）が重なりあうことである．

（定義） 線分 AB の中点が M であるとき，2 点 A, B は点 M に関して対称であるという（図 11 を参照）．

（点 $\mathbf{M}(a, b)$ を中点として点 $\mathbf{A}(x_1, y_1)$ に点対称な点 B）
2 点 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ が点 $\mathrm{M}(a, b)$ に関して対称であれば，2 点 A, B は M に関して対称だから，M は線分 AB の中点である．したがって

$$\frac{x_2 + x_1}{2} = a$$
$$\frac{y_2 + y_1}{2} = b$$

である．これを x_2, y_2 について解けば，

$$x_2 = 2a - x_1 \tag{5.1}$$
$$y_2 = 2b - y_2 \tag{5.2}$$

が得られる．

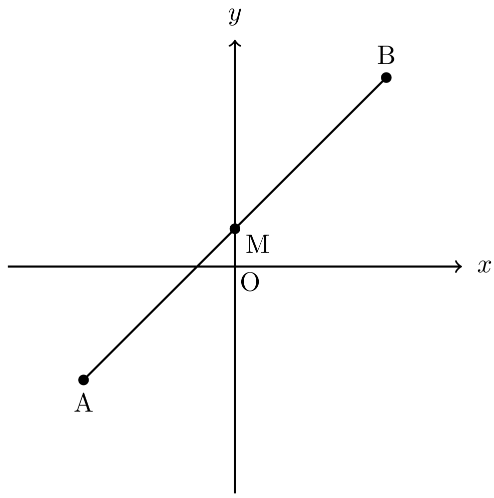

図 11: 点対称

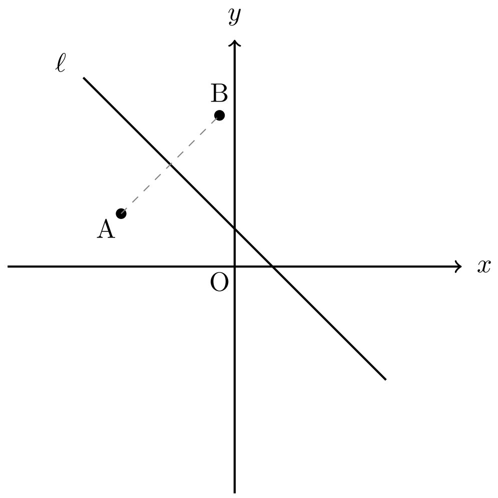

図 12: 線対称

もし，点 M が原点 O であれば，$(a, b) = (0, 0)$ であるから，

$$x_2 = -x_1 \tag{5.3}$$
$$y_2 = -y_1 \tag{5.4}$$

が成り立つ．この関係は $\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$,　$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$ を導くときに使われる．

5.2 線対称

線対称とはある直線を軸として $\pi = 180^\circ$ 回転させたとき，重なりあうことである．

（定義） 線分 AB の垂直二等分線が ℓ であるとき，2 点 A, B は直線 ℓ に関して対称であるという（図 12 を参照）．

（x 軸に対称な点）
2 点 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ が x 軸に関して対称であるとき，△OAH と △OBH とは合同である（図 13 を参照）．すなわち，OH は二つの三角形で共通であり，AH=HB が成り立つ．したがって

$$x_2 = x_1, \tag{5.5}$$

$$y_2 = -y_1 \tag{5.6}$$

が成り立つ．この関係は $\cos(-\theta) = \cos\theta, \quad \sin(-\theta) = -\sin\theta$ を導くときに使われる．

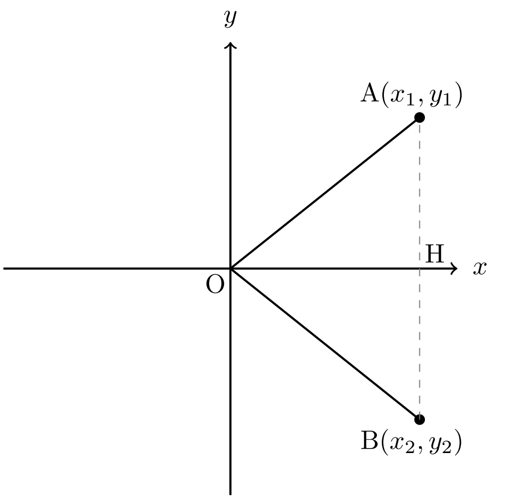

図 13: x 軸に対称な点

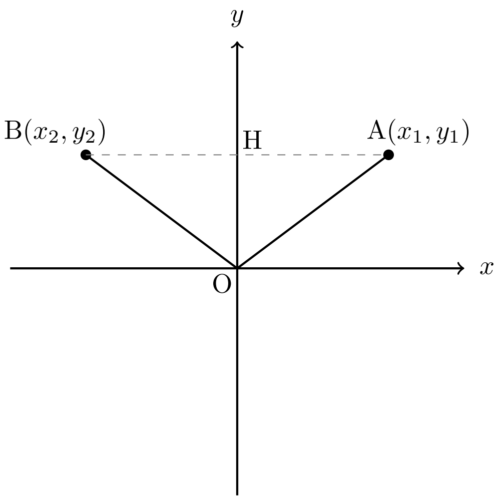

図 14: y 軸に対称な点

（y 軸に対称な点）
2 点 A, B が y 軸に対称であるとき，△OAH と △OBH とは合同である（図 14 を参照）．すなわち，OH は二つの三角形で共通であり，HA=BH が成り立つ．したがって

$$x_2 = -x_1, \tag{5.7}$$

$$y_2 = y_1 \tag{5.8}$$

が成り立つ．この関係は $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta, \sin(\pi - \theta) = \sin\theta$ を導くときに使われる．

線対称として x 軸対称と y 軸対称の場合については任意の直線 $y = mx + n$ に関して線対称である場合の特殊な場合としても導くことができる．そのことは以下に示す．

（2 点 $\mathbf{A}(x_1, y_1)$, $\mathbf{B}(x_2, y_2)$ を通る直線）
まず 2 点 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ を通る直線の方程式は

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{5.9}$$

この直線の方程式を $y = ax + b$ と表せば,

$$y = ax + b, \tag{5.10}$$
$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \tag{5.11}$$
$$b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1} \tag{5.12}$$

である.

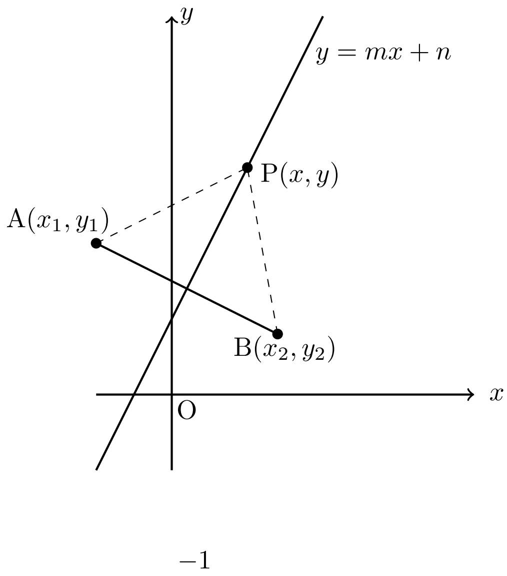

図 15: 直線 $y = mx + n$ に対称な点

(直線 $y = mx + n$ に対称な点)
さて 2 点 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ が直線 $y = mx + n$ に関して線対称であるとき，この直線上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ は点 A, B から等距離にあるから

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}$$

が成り立つ（図 15 を参照）.

この式の両辺を 2 乗して，簡単にすると

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$$
$$(x - x_2)^2 - (x - x_1)^2 = (y - y_1)^2 - (y - y_2)^2$$
$$2(y_2 - y_1)y + (y_1^2 - y_2^2) = 2(x_1 - x_2)x - (x_1^2 - x_2^2) \tag{5.13}$$

(5.13) は一つの直線を表しているから，2 点 A, B から等距離にある点 P の軌跡は直線 $y = mx + n$ は

$$y = mx + n, \tag{5.14}$$
$$m = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}, \tag{5.15}$$
$$n = -\frac{m(x_2 + x_1)}{2} + \frac{y_2 + y_1}{2} \tag{5.16}$$

と表せる.

(5.15),(5.16) から x_2, y_2 についてのつぎの 2 つの方程式を得る．

$$x_2 + my_2 = x_1 + my_1, \tag{5.17}$$

$$-mx_2 + y_2 = mx_1 - y_1 + 2n \tag{5.18}$$

これを x_2, y_2 について解くと

$$x_2 = \frac{1}{m^2+1}\left[(1-m^2)x_1 + 2my_1 - 2mn\right], \tag{5.19}$$

$$y_2 = \frac{1}{m^2+1}\left[2mx_1 + (m^2-1)y_1 + 2n\right] \tag{5.20}$$

この点 $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ は直線 ℓ に関して点 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ に対称な点である．

（直線 $y = x$ に対称な点）

いま，$y = x$ という直線に関しては $m = 1, n = 0$ であるので，点 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ に対称な点 B の座標は $(x_2, y_2) = (y_1, x_1)$ である．この関係は $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta, \quad \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$ を導くときに使われる．

（直線 $y = -x$ に対称な点）

いま，$y = -x$ という直線に関しては $m = -1, n = 0$ であるので，点 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ に対称な点 B の座標は $(x_2, y_2) = (-y_1, -x_1)$ である．この関係は $\cos(\frac{3\pi}{2} - \theta) = -\sin\theta, \quad \sin(\frac{3\pi}{2} - \theta) = -\cos\theta$ を導くときに使われる．

（x 軸に対称な点）

直線 $y = mx + n$ が x 軸，すなわち，$y = 0$ であるとき，$m = 0, n = 0$ であるから，点 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ に対称な点 B の座標は $(x_2, y_2) = (x_1, -y_1)$ である．この関係は $\cos(-\theta) = \cos\theta, \quad \sin(-\theta) = -\sin\theta$ を導くときに使われる．

（y 軸に対称な点）

直線 $y = mx + n$ は y 軸，すなわち，$x = 0$ を表すことができない．しかし，$x = 0$ を $y = mx + n$ で $m \to \infty, n = 0$ の極限の場合であると考えれば，点 A (x_1, y_1) の $y = mx + n$ に関する対称点 B の座標 (x_2, y_2) を求めることができる．そのためには座標 (x_2, y_2) の一般式を $m \to \infty$ の極限をとれるように書き換えをしておかなくてはならない．つぎのように書き変えると

$$x_2 = \frac{1}{1+\frac{1}{m^2}}\left[\left(-1 + \frac{1}{m^2}\right)x_1 + \frac{2}{m}y_1 - \frac{2n}{m}\right] \tag{5.21}$$

$$y_2 = \frac{1}{1+\frac{1}{m^2}}\left[\frac{2}{m}x_1 + \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)y_1 + \frac{2n}{m^2}\right] \tag{5.22}$$

この形に書き変えると，$m \to \infty$ の極限がとれる．この極限は

$$x_2 = -x_1 \tag{5.23}$$

$$y_2 = y_1 \tag{5.24}$$

となる．この関係は $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta, \sin(\pi - \theta) = \sin\theta$ を導くときに使われる．

（互いに垂直な直線の傾きの関係）

ここで $y = mx + n$ と点 A, B を結んだ直線の方程式 $y = ax + b$ との傾きの積をつくれば，(5.11),(5.15) から

$$ma = -1 \tag{5.25}$$

であることがわかる．すなわち，お互いに垂直な直線の方程式の傾きの積は -1 となることがわかる．

(2016. 3. 3)

参考文献

[1] 矢野　忠，三角関数の還元公式 1，数学・物理通信，**6 巻 2 号** (2016.3) 7-15

[2] 武藤　徹,『数学読本 I』 代数学・幾何学,（三省堂，1998）156-159

[3] 武藤　徹，図形のはなし（日本評論社，2011）96-98

[4] 藤森良夫,『解析の基礎』（続編）（考え方研究社，1954）624-625

[5] 矢野　忠，三角関数の還元公式 3，数学・物理通信，準備中

[6] 武藤　徹,『数学読本 I』代数学・幾何学,（三省堂，1998）151-152

[7] 武藤　徹，図形のはなし（日本評論社，2011）86-90

編集後記

新関さんがまた入院をなさったそうなので，続けて矢野が編集後記を書きます.

6 巻 1 号を出したばかりなのにもう 6 巻 2 号を発行するとは「せっかちだなあ」とは自分でも思います．しかし，原稿がたまっているのは私の精神衛生上よくないので片づけてしまいたいという思いが強くなります．編集・発行に従事するのは 3 の倍数の月だけでそれ以外の月は「数学・物理通信」のことは忘れていたい.

今号には中西先生の「多重振り子の一般化」という論文が掲載されています．別に投稿者が私に発行をせかしたという事実はありません．むしろ投稿される方々はどなたも大人の風格をおもちです.

急に話が変わりますが，Latex は数式入力については素晴らしいソフトだが，図を入れたいときになかなか面倒だというのが Latex ユーザーの感覚だったでしょう．しかし，Tikz が使えるようになってからこの感覚が少しづつ変わり始めたのかなと思います.

はじめ Tizk をどうやってインストールするのかもわからず半年か一年ほど放っておいたのです．数ヵ月前にどなたかのサイトにある Tizk のインストールのボタンを押したら，それでインストールでき，インターネットのサイトにあるいくつかの解説をプリントして読んで，見よう見まねで図が描けるようになってきました．もっともその前は picture 環境で 2 次の Bezier 曲線を使って図を描くことが多かったので，その手間は大変でした.

サインカーブを描いたりするのが，少し手間がかかるようですが，それもなんとかこなせるようになるのだと楽観しています．みなさんはどうなさっていますか.

（矢野　忠）