数学・物理通信

6巻4号　　2016年6月

編集　新関章三・矢野　忠

2016 年 6 月 6 日

目次 (Contents)

量子力学における周期ポテンシャル問題 (2)

世戸 憲治 *

A Periodic Potential Problem in Quantum Mechanics (2)

Kenji SETO*

1　はじめに

前回に引き続き，量子力学における周期ポテンシャル問題を扱ってみる．前回は，ポテンシャルとしてデルタ関数が，周期的に並んだものを扱ったが，今回は，Kronig-Penney モデルと言われるものを解析する．このモデルは，時間に依存しない 1 次元の Schrödinger 方程式

$$\Big[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\Big]\Psi=E\Psi \tag{1.1}$$

において，ポテンシャル $V(x)$ が周期 $\ell\,(=a+b)$ を持つ，すなわち，$V(x+\ell)=V(x)$ とし，$-a\le x<b$ の範囲で，

$$V(x)=\begin{cases}0, & -a\le x<0\\ V_0, & 0\le x<b\end{cases} \tag{1.2}$$

と矩形波の形で与えられたものである．このときの方程式は，制御工学におけるパラメタ振動をモデル化した Hill-Meissner 方程式と言われるものと本質的に同じものであり，非常に応用範囲の広いものである．なお，量子力学の教科書では，このモデルについて，エネルギー固有値を求めるところまでしか書かれていないので，ここでは，波動関数の規格化をするところまでを目標とする．

ここでは，以下で扱う数式簡素化のため，ℓ を長さの単位として，座標 x，長さ a，b，および，ポテンシャルの大きさ V_0，エネルギー E を無次元化し，

$$x/\ell\ \to\ x,\qquad a/\ell\ \to\ a,\qquad b/\ell\ \to\ b,\qquad \frac{2m\ell^2V_0}{\hbar^2}\ \to\ V_0,\qquad \frac{2m\ell^2E}{\hbar^2}\ \to\ E \tag{1.3}$$

と，改めて置き直すことにする．この変換で方程式は

$$\Big[\frac{d^2}{dx^2}+E-V(x)\Big]\Psi=0 \tag{1.4}$$

となり，$a+b=1$ となるので，ポテンシャルの周期性は $V(x+1)=V(x)$ となる．なお，ポテンシャルの大きさ V_0 は正負どちらにしても矩形波であることには変わりはないので，以下，V_0 は正とし，これにしたがって，エネルギー E も正として扱う．

* 北海学園大学名誉教授　　　E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

2 方程式の解法

2.1 $0 < E < V_0$ の場合

初めに，$0 < E < V_0$ の場合を解析する．以下，数式簡素化のため，

$$k = \sqrt{E}, \qquad \kappa = \sqrt{V_0 - E} \tag{2.1}$$

と書くことにして，方程式 (1.4) を $-a \leq x < 0$, および $0 \leq x < b$ の範囲に分けて解くと，A, B, C, D を任意定数として，

$$\Psi(x) = \begin{cases} A\cos(kx) + B\sin(kx), & -a \leq x < 0 \\ C\cosh(\kappa x) + D\dfrac{k}{\kappa}\sinh(\kappa x), & 0 \leq x < b \end{cases} \tag{2.2}$$

となる．ここで，$x = 0$ で波動関数自体，および，その微係数が連続となる条件を課すと，

$$C = A, \qquad D = B \tag{2.3}$$

となることがわかる．

前回の論文で示したように，ポテンシャルが周期 1 を持ったからと言って波動関数も同じ周期関数になるわけではなく，Floquet の定理により，伝播数と呼ばれる $0 \leq K \leq \pi$ なる実数 K を用いて

$$\Psi(x+1) = e^{iK}\Psi(x), \quad \text{or} \quad \Psi(x+1) = e^{-iK}\Psi(x) \tag{2.4}$$

となることが知られている．ここでは，当分のあいだ，この第 1 式の方で議論を進める．これを用いるとつぎの周期 $b \leq x < 1 + b$ での波動関数は

$$\Psi(x) = e^{iK}\begin{cases} A\cos\big(k(x-1)\big) + B\sin\big(k(x-1)\big), & b \leq x < 1 \\ A\cosh\big(\kappa(x-1)\big) + B\dfrac{k}{\kappa}\sinh\big(\kappa(x-1)\big), & 1 \leq x < 1+b \end{cases} \tag{2.5}$$

と書かれる．つぎに，これを用いて，波動関数の $x = b$ での接続を考える．初めに波動関数自身の連続性は (2.2) (2.5) 式より，$a + b = 1$ に注意して，

$$A\cosh(\kappa b) + B\frac{k}{\kappa}\sinh(\kappa b) = e^{iK}\big[A\cos(ka) - B\sin(ka)\big] \tag{2.6}$$

となり，また，微係数の連続性より，

$$A\kappa\sinh(\kappa b) + Bk\cosh(\kappa b) = e^{iK}\big[Ak\sin(ka) + Bk\cos(ka)\big] \tag{2.7}$$

を得る．これら 2 式をまとめて書くと，

$$\begin{pmatrix} \cosh(\kappa b) - e^{iK}\cos(ka) & \dfrac{k}{\kappa}\sinh(\kappa b) + e^{iK}\sin(ka) \\ \kappa\sinh(\kappa b) - e^{iK}k\sin(ka) & k\cosh(\kappa b) - e^{iK}k\cos(ka) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

となり，A, B が両方共にゼロとならないためには，この式の係数行列式の値がゼロでなければならず，方程式

$$\cos(K) = \cos(ka)\cosh(\kappa b) + \frac{\kappa^2 - k^2}{2k\kappa}\sin(ka)\sinh(\kappa b) \tag{2.9}$$

を得る．この式により，V_0 は一定値として，エネルギー E を与えると，k, κ が決まり，この式で伝播数 K が決まる．ただし，そのためには右辺の絶対値が 1 以下でなければならず，これがエネルギーのバンド構造を決めることになる．この意味で，この (2.9) 式を (広義の) 固有値方程式と呼ぶことにする．

なお，この式の左辺は K の偶関数なので，(2.4) 式に対応して，一般に，正負 2 個の K の値が決まることになり，この意味で波動関数は縮退していることになる．ただし，$K=0$, π のときはこれら関数は同じものとなるので，そのときは K で偏微分したものがもう 1 つの波動関数となるはずであるが，ここでは，この $K=0$, π の場合を例外として扱わないことにする．したがって以下では，K の範囲を $0<K<\pi$ とする．

通常，量子力学の教科書では，方程式を区間 $[0,\ a+b]$ で解き，$x=a$ および $x=a+b$ で接続する方法をとっている．しかし，この方法では，(2.3) 式のような簡単な関係式を得ることはできず，(2.9) 式を得るためには，4 行 4 列の行列式を計算しなければならない．ここでは，敢えて，(2.2) 式のように，$x=0$ を含む区間 $[-a,\ b]$ で解き，$x=0$ および $x=b$ で接続する方法を採用した．

2.2 波動関数の規格化

(2.4) の第 1 式を繰り返し使うと，n を任意整数として，$n-a\le x<n+b$ なる範囲での波動関数は，(2.2) 式より，

$$\Psi(x)=e^{iKn}\begin{cases}A\cos\big(k(x-n)\big)+B\sin\big(k(x-n)\big), & n-a\le x<n\\[2ex] A\cosh\big(\kappa(x-n)\big)+B\dfrac{k}{\kappa}\sinh\big(\kappa(x-n)\big), & n\le x<n+b\end{cases}\tag{2.10}$$

となる．さらに，定数 A, B は (2.6) 式が満たされるように，

$$A=\frac{k}{\kappa}\sinh(\kappa b)+e^{iK}\sin(ka),\qquad B=e^{iK}\cos(ka)-\cosh(\kappa b)\tag{2.11}$$

ととることにし，この (2.10) 式に代入すると，

$$\Psi(x)=e^{iKn}\begin{cases}\dfrac{k}{\kappa}\sinh(\kappa b)\cos\big(k(x-n)\big)-\cosh(\kappa b)\sin\big(k(x-n)\big)+e^{iK}\sin\big(k(x+a-n)\big), \quad n-a\le x<n\\[2ex] e^{iK}\sin(ka)\cosh\big(\kappa(x-n)\big)+e^{iK}\dfrac{k}{\kappa}\cos(ka)\sinh\big(\kappa(x-n)\big)-\dfrac{k}{\kappa}\sinh\big(\kappa(x-b-n)\big), \\ \hfill n\le x<n+b\end{cases}\tag{2.12}$$

となる．ただし，これはまだ規格化されたものではない．

これ以降，波動関数のエネルギー依存性を明示するため，$\Psi(x,E)$ と書くことにする．一般に異なる 2 つのエネルギー E, E' を考え，これに対応する k, κ, K をそれぞれ，k,k', κ,κ', K,K' と記すことにする．波動関数規格化のため，$\Psi(x,E)$ の複素共役 $\overline{\Psi(x,E)}$ と $\Psi(x,E')$ の積の積分を考えると，(2.10) 式を考慮して，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\Psi(x,E)}\Psi(x,E')dx&=\lim_{M\to\infty}\sum_{n=-M}^{M}\int_{n-a}^{n+b}\overline{\Psi(x,E)}\Psi(x,E')dx\\&=\Big(\lim_{M\to\infty}\sum_{n=-M}^{M}e^{-i(K-K')n}\Big)\int_{-a}^{b}\overline{\Psi(x,E)}\Psi(x,E')dx\end{aligned}\tag{2.13}$$

となる．ここで，この積分の部分を実行するために，$\overline{\Psi(x,E)}$, $\Psi(x,E')$ が満たす (1.4) 式を，それぞれ，

$$\begin{aligned}\Big[\frac{d^2}{dx^2}+E-V(x)\Big]\overline{\Psi(x,E)}=0\\ \Big[\frac{d^2}{dx^2}+E'-V(x)\Big]\Psi(x,E')=0\end{aligned} \tag{2.14}$$

と書いておき，この第 1 式に $\Psi(x,E')$ を，第 2 式に $\overline{\Psi(x,E)}$ を掛けて，辺々を引き算すると，

$$\frac{d}{dx}\Big[\Psi(x,E')\frac{d\overline{\Psi(x,E)}}{dx}-\overline{\Psi(x,E)}\frac{d\Psi(x,E')}{dx}\Big]+(E-E')\overline{\Psi(x,E)}\Psi(x,E')=0 \tag{2.15}$$

となり，これを積分すると

$$\int_{-a}^{b}\overline{\Psi(x,E)}\Psi(x,E')dx=\frac{1}{E-E'}\Big[\overline{\Psi(x,E)}\frac{d\Psi(x,E')}{dx}-\Psi(x,E')\frac{d\overline{\Psi(x,E)}}{dx}\Big]_{-a}^{b} \tag{2.16}$$

となる．この右辺に $n=0$ とした (2.12) 式を代入する．このとき，区間 $[-a,\ 0]$ と $[0,\ b]$ では関数が異なるが，$x=0$ では関数自身とその微係数が連続なので差は発生せず，この上限には (2.12) の第 2 式，下限には (2.12) の第 1 式を用いるとよい．この計算は項数が多いので大変であるが，結果は，

$$\begin{aligned}&(E-E')\int_{-a}^{b}\overline{\Psi(x,E)}\Psi(x,E')dx\\ &=\Big[\big(e^{-i(K-K')}+1\big)\cos(k'a)\cosh(\kappa'b)+\frac{1}{k'\kappa'}\big(e^{-i(K-K')}\kappa'^2-k'^2\big)\sin(k'a)\sinh(\kappa'b)-\big(e^{-iK}+e^{iK'}\big)\Big]k'F(E)\\ &\quad-\Big[\big(e^{-i(K-K')}+1\big)\cos(ka)\cosh(\kappa b)+\frac{1}{k\kappa}\big(e^{-i(K-K')}\kappa^2-k^2\big)\sin(ka)\sinh(\kappa b)-\big(e^{-iK}+e^{iK'}\big)\Big]kF(E')\end{aligned} \tag{2.17}$$

と長い式になる．ここに，関数 $F(E)$ は

$$F(E)=\frac{k}{\kappa}\cos(ka)\sinh(\kappa b)+\sin(ka)\cosh(\kappa b) \tag{2.18}$$

と定義する．一方，(2.13) 式の和の部分は，デルタ関数に関する公式から，

$$\lim_{M\to\infty}\sum_{n=-M}^{M}e^{-i(K-K')n}=2\pi\delta(K-K'),\qquad 0<K,\ K'<\pi \tag{2.19}$$

となるので，これらの結果を (2.13) 式に代入すると，$e^{-i(K-K')}=1$, $e^{-iK}+e^{iK'}=2\cos(K)$ とおくことにして，

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\Psi(x,E)}\Psi(x,E')dx\\ &=\frac{4\pi}{E-E'}\Big\{\Big[\cos(k'a)\cosh(\kappa'b)+\frac{\kappa'^2-k'^2}{2k'\kappa'}\sin(k'a)\sinh(\kappa'b)-\cos(K)\Big]k'F(E)\\ &\quad-\Big[\cos(ka)\cosh(\kappa b)+\frac{\kappa^2-k^2}{2k\kappa}\sin(ka)\sinh(\kappa b)-\cos(K)\Big]kF(E')\Big\}\delta(K-K')\end{aligned} \tag{2.20}$$

となる．さらに，ここで，固有値方程式 (2.9) 式を用いると，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi(x,E)}\Psi(x,E')dx = -\frac{4\pi}{E-E'}\big[\cos(K)-\cos(K')\big]k'F(E)\delta(K-K') \tag{2.21}$$

と，かなりコンパクトな式にまとめられる．なお，ここでは，$e^{-iK}+e^{iK'}=2\cos(K)$ としたが，これを，$2\cos(K')$ としたときは，この式の $k'F(E)$ の部分が $kF(E')$ になり，最終的には同じ結果になる．

ここで，一つ問題になることは，エネルギー E を決めると，k，κ が決まり，(2.9) 式から伝播数 K が決まるが，逆に，K を決めた場合，エネルギーは一意的には決まらずに，各バンドごとに 1 個ずつのエネルギー E が決まってしまうことである．これはつまり，$K=K'$ であっても，$E=E'$ になるとは限らないことを意味する．したがって，E と E' が異なるバンドに属しているときは，$E\neq E'$ なので，(2.21) 式の右辺はゼロとなり，異なるバンド間の直交性がでる．同じバンドに属するときは，$E=E'$ となって，この式の分母もゼロとなるので，極限値を求めると，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi(x,E)}\Psi(x,E')dx = 4\pi kF(E)\sin(K)\frac{dK}{dE}\delta(K-K') \tag{2.22}$$

となる．このとき，この式右辺の $\delta(K-K')$ を除いた部分は正定値になるべき量なので，その符号を調べておく必要がある．第 3 節のグラフで見るように，dK/dE の符号はバンドごとに異なり，エネルギー E が最も小さいときのバンドを 0 番目として，小さい方から n 番目のバンドにおける dK/dE の符号は，$(-1)^n$ となる．したがって，この (2.22) 式が正定値であるためには，関数 $F(E)$ の符号も n 番目のバンドで $(-1)^n$ になっていなければならない．このことを解析的に直接証明することは難しいが，第 3 節で示すように，数値的に求めた範囲では矛盾なく満たされている．以上のことを考慮した上で，$\delta(K-K')$ を $\delta(E-E')$ で表すと，最終的に，波動関数の直交性，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi(x,E)}\Psi(x,E')dx = N^2(E)\delta(E-E') \tag{2.23}$$

が得られる．ここに規格化定数 $N^2(E)$ は

$$N^2(E) = 4\pi k\big|F(E)\big|\sin(K) \tag{2.24}$$

と定義する．これから，$\Psi(x,E)/N(E)$ が規格化された波動関数となる．なお，K の符号を変えたもう 1 つの解の場合は，dK/dE の符号がこの場合と逆符号となるが，$\sin(K)$ の符号も逆転するので，結果的に同じ式になることを注意する．

2.3 $E>V_0$ の場合

エネルギー E がポテンシャルの大きさ V_0 より大きい場合は，(2.1) 式で定義した κ に代わって，$\sqrt{E-V_0}$ を新しい変数として定義すればよいのだが，ここでは，これ以上，文字を増やさないことにして，これまでの κ を改めて，

$$\kappa \ \rightarrow \ i\kappa, \quad \kappa=\sqrt{E-V_0} \tag{2.25}$$

と置き直すことにする．したがって，これまで使われてきた κ^2，$\cosh(\kappa x)$，$\sinh(\kappa x)/\kappa$ を，それぞれ，$-\kappa^2$，$\cos(\kappa x)$，$\sin(\kappa x)/\kappa$ と置き換えることになる．しかもこの置き換えは，虚数 i を表に出さない変換なので，複素共役をとる波動関数の規格化のときも影響されない変換であることに注意する．

このときの伝播数 K を決める式は，前の固有値方程式 (2.9) 式より，

$$\cos(K) = \cos(ka)\cos(\kappa b) - \frac{\kappa^2 + k^2}{2k\kappa}\sin(ka)\sin(\kappa b) \tag{2.26}$$

となり，波動関数は，(2.12) 式より，$n - a \le x < n + b$ の範囲で，

$$\Psi(x) = e^{iKn}\begin{cases} \dfrac{k}{\kappa}\sin(\kappa b)\cos\big(k(x-n)\big) - \cos(\kappa b)\sin\big(k(x-n)\big) + e^{iK}\sin\big(k(x+a-n)\big), & n-a \le x < n \\ e^{iK}\sin(ka)\cos\big(\kappa(x-n)\big) + e^{iK}\dfrac{k}{\kappa}\cos(ka)\sin\big(\kappa(x-n)\big) - \dfrac{k}{\kappa}\sin\big(\kappa(x-b-n)\big), & \\ & n \le x < n+b \end{cases} \tag{2.27}$$

となる．また，この関数の規格化の式は，(2.23) (2.24) 式と同じ形であるが，関数 $F(E)$ は (2.18) 式から，

$$F(E) = \frac{k}{\kappa}\cos(ka)\sin(\kappa b) + \sin(ka)\cos(\kappa b) \tag{2.28}$$

に代わる．

ここで，流れ関数 j

$$j = \frac{1}{2i}\overline{\Psi}(\overrightarrow{\partial_x} - \overleftarrow{\partial_x})\Psi \tag{2.29}$$

を求めてみよう．波動関数として，(2.27) の第 1 式，第 2 式どちらを用いても，同じ結果の

$$j = kF(E)\sin(K) \tag{2.30}$$

となる．これから，$F(E)$ はバンドごとに符号を変えるので，波動の流れの方向は，バンドの小さい方から正方向，つぎは負方向と繰り返す．また，K の符号を変えた解の場合は，同じくバンドの小さい方から，負方向，つぎは正方向と繰り返すことになる．前に波動関数は，K に付く符号の正負によって縮退していると述べたが，この流れの方向によって，波動関数の縮退が解けてこれら 2 つの状態が区別されることになる．

3 数値計算によるグラフ表示

ここで，数値計算によるグラフを表示する．図 1 は，固有値方程式 (2.9) および (2.26) 式でエネルギー E を与えたとき伝播数 K がどのように求まるかを示したものである．ただし，ここでは，パラメータ a, b を $a = b = 1/2$ とし，ポテンシャルの大きさは $V_0 = 50$ の一定値とした．このグラフから，E の値によっては，K が実数で求まらずに，空白になるいわゆる禁止帯が存在すること，また，線が描かれている部分は，K が実数で求まる許容帯とに分かれることが見て取れる．このようにしてバンド構造が作られるが，各バンドごとに，グラフの傾き dK/dE の値は正負の値を繰り返すことがわかる．この図で線に色が付いているのは，(2.18) (2.28) 式で定義される関数 $F(E)$ が正のときは赤線，負のときは青線で描いたもので，これから，この関数 $F(E)$ の符号はこれら曲線の傾き dK/dE と一致していることがわかる．

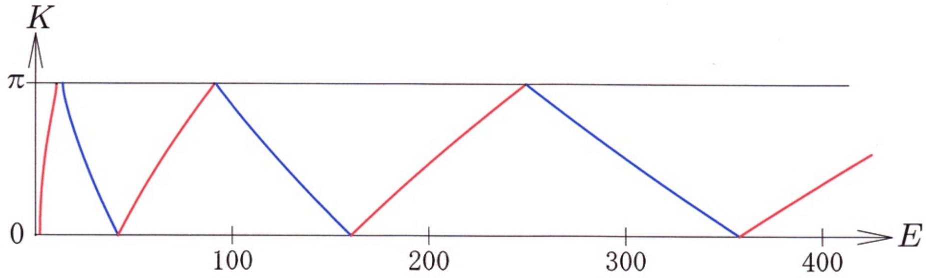

図 1　　K と E の関係 ($a = b = 1/2,\ V_0 = 50$)

つぎの図 2 は，バンド構造の全体がわかるように，固有値方程式 (2.9) (2.26) 式で，パラメータ a, b を同じく $a = b = 1/2$ としたとき，ポテンシャルの大きさ V_0 とエネルギー E の関係を示したものである．前回のデルタ関数が周期的に並んだモデルのときは，固有値方程式から V_0 を求め $\cos(K)$ をパラメータとして図を描いたが，今回は，固有値方程式から V_0 を解析的に求めることは不可能である．そこで，V_0-E 平面を細かな点に分割し，それらの点を走査させながら，各点ごとにこれらの式の右辺の値を計算し，その絶対値が 1 を超えるときは何も描かず，1 になるときは赤点で，また，その値が小さくなるにつれ，色を連続的に変化させ，-1 になる時を青点で描くようにした．この図から，バンド構造がどのようなものであるかがよく理解される．どのバンドにも，$\cos(K)$ の値は，1 から -1 までの値が含まれることがわかる．

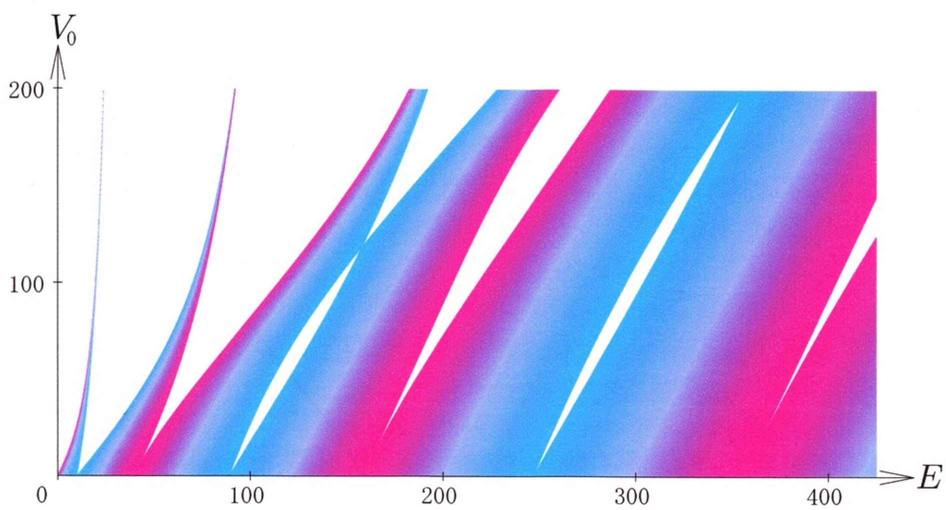

図 2　　V_0 と E の関係 ($a = b = 1/2$)

4　おわりに

ここで，前回のポテンシャルとしてデルタ関数が周期的に並んだものとの比較をしてみる．$\cos(K)$ を決める (2.26) 式において，$\kappa^2 + k^2 = 2E - V_0$ となるが，ここで，V_0 を V_0/b として，$b \to 0$ の極限をとるとこの式は，

$$\cos(K) = \cos k + \frac{V_0}{2k} \sin k \tag{4.1}$$

となって前回得た式と一致する．また，(2.28) 式の $F(E)$ は $b \to 0$ で $F(E) = \sin k$ となるので，規格化の (2.23) (2.24) 式は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi(x,E)} \Psi(x,E') dx = 4\pi k |\sin k| \sin(K) \delta(E - E') = 2\pi |\sin k| \sin(K) \delta(k - k') \tag{4.2}$$

となって，これも前回のものと一致する．これらの事実から，今回のものが前回の拡張になっていることは確かであろう．

[謝辞]

今回もこの原稿を書くにあたって，京都大学名誉教授の中西襄先生にご精読いただき，たくさんのコメントをいただきました．ここに，謹んで感謝いたします．

四元数・八元数と交代代数

Quaternions・Octonions and Alternative Algebras

森田克貞 [1)]

Katsusada Morita[2)]

要約

八元数に対する Tiomno の公式 (1963) が，一般に，実数体上の交代代数 (交代的多元環) とみなされる超複素数系に対する必要十分条件であることを示す．この公式を使うと， 組成代数は交代代数でもあることから，その次元 ($n+1=1,2,4,8$) による，可換性及び結合性についての性質の違いが，n 次元空間における 3 階及び 4 階の完全反対称テンソルの存否によることがわかる．特に，0, 1 次元空間ではそのようなテンソルは存在しないので，代数は可換になる (実数，複素数に対応)．3 次元空間では，3 階の完全反対称テンソルは存在するが，4 階の完全反対称テンソルが存在しないことから，四元数は非可換・結合的であること，及び，四元数の構造定数が Levi-Civita の 3 階完全反対称テンソル ϵ_{ijk} で与えられることが結論される．一方，八元数の非可換性及び非結合性は，7 次元空間においては 3 階及び 4 階の完全反対称テンソルが存在することによる．さらに，Tiomno の公式から，組成法則が証明され，Hurwitz の定理と合わせると，交代的な可除代数は実数・複素数・四元数・八元数に限られるという「一般化された Frobenius の定理」が初歩的な (しかし若干冗長な) 方法で証明される．「交代的な」を「結合的な」に制限すると八元数が除かれ「Frobenius の定理」になる．

1　はじめに

$\mathcal{A}$ を実数体 $\mathbb{R}$ 上の $n+1$ 次元の代数とする (ここでは，$n=1$ の複素数を一般化したものと考えられたい)．$\mathcal{A}$ はベクトル空間でもあるので，その任意の元 $a\in\mathcal{A}$ は 1 次独立な基底 $\{e_0,e_1,\cdots,e_n\}$ を用いて，一意的に

$$a=a_0e_0+a_1e_1+\cdots+a_ne_n\equiv a_0+\mathbf{a},\ a_0,a_i(i=1,2,\cdots,n)\in\mathbb{R},\ \ \mathbf{a}\equiv a_ie_i, \tag{1.1}$$

と書ける．ただし，e_0 は $\mathcal{A}$ の単位元 [3)] で，基底 $e_i(i=1,2\cdots,n)$ 及び実数と交換する．$\{a_0,a_1,\cdots,a_n\}$ をその基底に関する元 a の成分という．基底の 1 次独立性から，$a=0$ (零元) は $a_0=a_1=\cdots=a_n=0$ を意味する．基底の数 $n+1$ はベクトル空間の次元数に等しく，元の和は成分の和で与えられる：

$$\begin{aligned}a+b&=(a_0e_0+a_1e_1+\cdots+a_ne_n)+(b_0e_0+b_1e_1+\cdots+b_ne_n)\\&=(a_0+b_0)e_0+(a_1+b_1)e_1+\cdots+(a_n+b_n)e_n\end{aligned} \tag{1.2}$$

$a=b$ は $a_0=b_0,a_i=b_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ を意味する．$\mathcal{A}$ は定義により，この加法に関して，加群をなす．

代数 $\mathcal{A}$ には，2 項演算 $\mathcal{A}\times\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}:(a,b)\longrightarrow ab\in\mathcal{A},\forall a,b\in\mathcal{A}$ が定義され，α,β を任意の実数として，$\forall a,b,c\in\mathcal{A}$ に対し，

$$\alpha(ab)=(\alpha a)b=a(\alpha b) \tag{1.3a}$$

1) 元名古屋大学理学部物理教室

2) kmorita@cello.ocn.ne.jp

3) 今後，代数（あるいは多元環）といえば，単位元を持つ代数のことをいう．なお，結合的，あるいは，交代的な代数が，可除的 (脚注 8) 参照) ならば，必ず単位元を持つことが証明される．

$$a(\alpha b+\beta c)=\alpha(ab)+\beta(ac) \tag{1.3b}$$

$$(\alpha b+\beta c)a=\alpha(ba)+\beta(ca) \tag{1.3c}$$

$$1a=a1=a, 1\in\mathbb{R} \tag{1.3d}$$

を満たす．$\mathcal{A}$ を $\mathbb{R}$ 上の単位元を持つ多元環とも言う（このノートでは超複素数系をイメージする）．代数 $\mathcal{A}$ の任意の元 a,b に対して，$ab=ba$ が成り立つときは可換代数，$ab\neq ba$ となる元 a,b が 1 組でも存在する場合には非可換代数という．また，$\mathcal{A}$ が条件

$$(ab)c=a(bc),\quad a,b,c\in\mathcal{A} \tag{1.4}$$

を満たすとき，結合代数と言う．(1.4) は満たさないが，交代性

$$a(ab)=a^2b,\ (ab)b=ab^2,\ a^2\equiv aa,\quad a,b\in\mathcal{A} \tag{1.5}$$

を満たすとき，交代代数と呼ぶ．組成代数 (単位元を持つノルム多元環) は交代的である [1, 2]．実数体 $\mathbb{R}$ や複素数体 $\mathbb{C}$ は 1 次元，2 次元の可換代数である．また，四元数体 $\mathbb{H}$ は 4 次元の非可換な結合代数である．それに対し，八元数 $\mathbb{O}$ は 8 次元の非可換・非結合代数である．Hurwitz の定理により，組成代数は，$\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H},\mathbb{O}$ に限る．このように，組成代数の可換性・結合性は代数の次元数によっていることは明白である．

これを表にまとめると，右表のようになる．◯，× はそれぞれ 1 番上の行の性質が成り立つ場合と，成り立たない場合を表す．このノートでは組成代数の可換性・結合性の違いがその次元によることを，組成代数が交代代数でもあることを使い，交代代数に対する必要十分条件である Tiomno の公式 (次々節の (3.1a), (3.1b)) に基づいて調べる．すると，その違いが，代数の次元を $n+1$ として，n 次元空間における， 3 階及び 4 階の完全反対称テンソルの存否によることが分かる．

Hurwitz 代数	次元	可換性	結合性	交代性
$\mathbb{R}$	1=0+1	◯	◯	◯
$\mathbb{C}$	2=1+1	◯	◯	◯
$\mathbb{H}$	4=3+1	×	◯	◯
$\mathbb{O}$	8=7+1	×	×	◯

2　組成代数は必ず交代的であること

$\forall a,b\in\mathcal{A}$ に対して積 $ab\in\mathcal{A}$ が定義されているので，代数は積のもとで閉じている：

$$e_\lambda e_\mu=c^\nu_{\lambda\mu}e_\nu\quad(\lambda,\mu,\nu=0,1,2,\cdots,n),\ \ c^\nu_{\lambda\mu}\in\mathbb{R} \tag{2.1}$$

積 ab はこの式を使って計算する．e_0 は任意の基底と交換する:

$$e_0e_\mu=e_\mu e_0=e_\mu,\quad c^\nu_{0\mu}=c^\nu_{\mu 0}=\delta_{\mu\nu} \tag{2.2}$$

代数 $\mathcal{A}$ が組成代数になっていることを主張するときには，代数のすべての元に対して，ノルムが定義されていないといけない．そのためには，スカラー積を定義すれば良いが，ここでは，共役と呼ばれる対合 $a\in\mathcal{A}\to\overline{a}\in\mathcal{A}$

が定義された代数を考える [4]．その性質は，

$$\overline{ab} = \overline{b}\,\overline{a} \tag{2.3}$$

で特徴づけられ，線形で $\overline{\overline{a}} = a$ を満たす．これは，基底 $\{e_0, e_1, \cdots, e_n\}$ が

$$\overline{e_0} = \overline{e_0},\ \overline{e_i} = -e_i,\ \overline{e_0 e_i} = \overline{e_i e_0} = \overline{e_i} = -e_i,\ \overline{e_i e_j} = \overline{e_j}\,\overline{e_i} = e_j e_i \tag{2.4}$$

を満たせば良い．添え字 $\{i, j, k\}$ は '空間' 成分 $\{1, 2, \cdots, n\}$ を走る．なぜなら，この定義は

$$\overline{a} = a_0 e_0 - a_1 e_1 - \cdots - a_n e_n \equiv a_0 - \mathbf{a} \tag{2.5a}$$

$$e_i e_j = -\delta_{ij} + c_{ijk} e_k, \quad c_{jik} = -c_{ijk} \quad \because\ \overline{e_i e_j} = e_j e_i \tag{2.5b}$$

に導くから [5]．実際，このとき，$a \to \overline{a}$ は線形で，明らかに，$\overline{\overline{a}} = a$ を満たし，共役は対合の性質を持つ：

$$\begin{aligned} ab &= (a_0 + a_i e_i)(b_0 + b_j e_j) = a_0 b_0 + (a_0 b_i + a_i b_0) e_i + a_i b_j e_i e_j \\ &= (a_0 b_0 - a_i b_i) + (a_0 b_i + a_i b_0) e_i + c_{ijk} a_i b_j e_k \end{aligned} \tag{2.6a}$$

$$\overline{ab} = (a_0 b_0 - a_i b_i) - (a_0 b_i + a_i b_0) e_i - c_{ijk} a_i b_j e_k \tag{2.6b}$$

$$\begin{aligned} \overline{b}\,\overline{a} &= (b_0 - b_i e_i)(a_0 - a_j e_j) = b_0 a_0 - (b_0 a_i + b_i a_0) e_i + b_i a_j e_i e_j \\ &= (b_0 a_0 - b_i a_i) - (b_i a_0 + b_0 a_i) e_i - c_{ijk} a_i b_j e_k = \overline{ab} \end{aligned} \tag{2.6c}$$

$a \in \mathcal{A}$ のノルム (の自乗) を

$$|a|^2 = a\overline{a} = \overline{a}a = a_0^2 + a_i^2 \tag{2.7}$$

で定義すると，代数 $\mathcal{A}$ が組成法則を満たすと言うことは，

$$|ab| = |a||b| \tag{2.8}$$

を意味する．Hurwitz の定理により，この組成法則が成り立つのは，$n = 0, 1, 3, 7$ の場合だけである．組成法則 (2.8) が交代性 (1.5) を意味することは，[1, 2] で証明されている．ここでは，記号の統一性のため，[3] の第 1 章 6 節にある証明を補遺 A で繰り返す．更に，補遺 B では，その逆も成り立つのではないかと言う予想を述べる．

3 代数の交代性と Tiomno の公式

ところで，交代性の条件 (1.5) の第 1 式 (左交代性の条件) は

$$a(ab) = a^2 b \to (\mathbf{a}\cdot\mathbf{e})[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{e})] = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{e})^2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}) \to a_l a_m b_n e_l(e_m e_n) = a_l a_m b_n (e_l e_m) e_n$$

に導く．便宜上，この式に限り，(1.1) の $\mathbf{a}$ を，より詳しく，$a_i e_i = \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}$ と書いた．この式を $a_i a_j b_k$ で微分すると，

$$[\delta_{li}\delta_{mj} + \delta_{mi}\delta_{lj})\delta_{nk}] e_l(e_m e_n) = [\delta_{li}\delta_{mj} + \delta_{mi}\delta_{lj})\delta_{nk}](e_l e_m) e_n$$

$$\therefore\ e_i(e_j e_k) + e_j(e_i e_k) = (e_i e_j + e_j e_i) e_k = -2\delta_{ij} e_k \quad \because\quad (2.5b)\ から\ e_i e_j + e_j e_i = -2\delta_{ij}$$

[4] 組成代数の場合には，スカラー積は $\langle a, b\rangle = (\overline{a}b + \overline{b}a)/2$ で与えられる．補遺 A の (7.4f)．

[5] $n = 0, 1$ の時には，$c_{ijk} = 0$ になるので，代数は可換になる．これは実数・複素数の場合に対応する．$n > 1$ では，すべての $c_{ijk} = -c_{jik}$ はゼロにはならないので，可換性は破れる．最も，Hamilton が三元数 ($n = 2$) に対して，初めて，反可換な虚数単位を考えるきっかけになったのは，絶対値の条件に関連してであった．このノートでは，一般化されたものも含め，絶対値の条件を単に，組成法則と呼ぶ．

同様に，(1.5) の第 2 式 (右交代性の条件) からは，上式の共役を取り，$i \leftrightarrow k$ としたものがえられる．従って，代数が交代的であるための必要条件として，

$$e_i(e_je_k) + e_j(e_ie_k) = -2\delta_{ij}e_k \tag{3.1a}$$

$$(e_ie_j)e_k + (e_ie_k)e_j = -2\delta_{kj}e_i \tag{3.1b}$$

が得られる．この公式は，Tiomno の論文 [4](1963) に交代代数である八元数に対して，(3.1a) の両辺に a_k をかけて，k について和を取って得られる式 ($a = a_0 + \mathbf{a}$ に注意)

$$e_i(e_ja) + e_j(e_ia) = -2\delta_{ij}a \tag{3.1c}$$

が載っているので，以下，Tiomno の公式と呼ぶことにする．

次に，(3.1a)，(3.1b) が交代性 (1.5) に導く，従って，Tiomno の公式が交代代数に対する十分条件であることを証明しよう．(3.1a) の両辺に $a_ia_jb_k$ をかけて，(3.1b) の両辺に $a_ib_jb_k$ をかけて，すべての添え字に付いて和を取ると，(1.1) の定義及び (2.7) から，$\mathbf{a}\overline{\mathbf{a}} = a_i^2$, $\overline{\mathbf{a}} = -\mathbf{a}$ 故，

$$\mathbf{a}(\mathbf{ab}) = -a_i^2\mathbf{b} = \mathbf{a}^2\mathbf{b} \tag{3.2a}$$

$$(\mathbf{ab})\mathbf{b} = -b_i^2\mathbf{a} = \mathbf{ab}^2 \tag{3.2b}$$

を得る．結合子

$$(a, b, c) = a(bc) - (ab)c \tag{3.3}$$

が，a, b, c のどれか 1 つでも，第 0 成分であったら，ゼロになることから，

$$0 = \mathbf{a}(\mathbf{ab}) - \mathbf{a}^2\mathbf{b} = (\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = (a, a, b) = (\overline{a}, a, b) \to a(ab) = a^2b,\ \overline{a}(ab) = |a|^2b \tag{3.4a}$$

$$0 = \mathbf{ab}^2 - (\mathbf{ab})\mathbf{b} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}) = (a, b, b) = (a, b, \overline{b}) \to a(bb) = (ab)b,\ a|b|^2 = (ab)\overline{b} \tag{3.4b}$$

と言う，交代性の条件が満たされる．

4 Tiomno の公式から導かれる積法則に対する制限

代数 $\mathcal{A}$ が組成法則を満たすなら，交代的でもあるので，その基底の ‘空間’ 成分 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ [6] の積法則に対する条件は Tiomno の公式 (3.1a)，(3.1b) から次のように導かれる．その条件を探すため，積法則 (2.5b) を (3.1a)，(3.1b) に代入する．

$$\begin{aligned} e_i(-\delta_{jk} + c_{jkl}e_l) + e_j(-\delta_{ik} + c_{ikl}e_l) &= (-e_i\delta_{jk} - c_{jki} + c_{jkl}c_{ilm}e_m) + (-\delta_{ik}e_j - c_{ikj} + c_{ikl}c_{jlm}e_m) \\ &= -\delta_{jk}e_i - \delta_{ik}e_j - (c_{jki} + c_{ikj}) + (c_{jkl}c_{ilm} + c_{ikl}c_{jlm})e_m \\ &= -2\delta_{ij}e_k \end{aligned} \tag{4.1a}$$

[6] §6 で分かるように，Hurwitz の定理により，$n = 0, 1, 3, 7$ に限られることが分かるが，以下 n は形式上，任意の自然数を走るとみなし，基底の ‘空間’ 成分の添え字 i, j, k, l, m を使い続ける (ただし，$n = 0$ の時は，すべての $e_i = 0$ で基底は単位元 e_0 のみ．また，$n = 1$ の時は，$e_0 = 1, e_1 = \sqrt{-1}$ で，残りの $e_i = 0$ となり，それぞれ，実数，複素数に対応する．

$$(-\delta_{ij}+\epsilon_{ijl}e_l)e_k+(-\delta_{ik}+c_{ikl}e_l)e_j=(-\delta_{ij}e_k-c_{ijk}+c_{ijl}c_{lkm}e_m)+(-\delta_{ik}e_j-c_{ikj}+c_{ikl}c_{ljm}e_m)$$
$$=-\delta_{ij}e_k-\delta_{ik}e_j-(c_{ijk}+c_{ikj})+(c_{ijl}c_{lkm}+c_{ikl}c_{ljm})e_m$$
$$=-2\delta_{kj}e_i \tag{4.1b}$$

従って,

$$c_{jki}+c_{ikj}=c_{ijk}+c_{ikj}=0 \tag{4.2a}$$

$$(c_{jkl}c_{ilm}+c_{ikl}c_{jlm})e_m=\delta_{jk}e_i+\delta_{ik}e_j-2\delta_{ij}e_k \tag{4.2b}$$

$$(c_{ijl}c_{lkm}+c_{ikl}c_{ljm})e_m=\delta_{ij}e_k+\delta_{ik}e_j-2\delta_{kj}e_i \tag{4.2c}$$

(4.2a) を (2.5b) と組み合わせると c_{ijk} の添え字に関する完全反対称性が得られる：

$$c_{ijk}=-c_{jik}=c_{jki}=-c_{kji}=-c_{ikj}=c_{kij} \tag{4.3}$$

一方,

$$c_{jkl}c_{ilm}=-\delta_{ji}\delta_{km}+\delta_{jm}\delta_{ki}-f_{jkim} \tag{4.4a}$$

と置くと,

$$c_{ikl}c_{jlm}=-\delta_{ij}\delta_{km}+\delta_{im}\delta_{kj}-f_{ikjm} \tag{4.4b}$$

$$c_{ijl}c_{lkm}=\delta_{ik}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{kj}+f_{ijkm} \tag{4.4c}$$

$$c_{ikl}c_{ljm}=\delta_{ij}\delta_{km}-\delta_{im}\delta_{kj}+f_{ikjm} \tag{4.4d}$$

となり，(4.2b), (4.2c) は

$$f_{ikjm}+f_{jkim}=0 \tag{4.5a}$$

$$f_{ijkm}+f_{ikjm}=0 \tag{4.5b}$$

を与える．その結果，f_{ikjm} は c_{ijk} の完全反対称性を使うと，(4.4a), (4.4b) により，ペア (ik)，(jm) について，反対称だったが，(4.5a), (4.5b) により，ペア $(ij),(kj)$ についても反対称と言うことから，ペア $(im),(km)$ についても反対称になり，結局，添え字 $(ikjm)$ について完全反対称であることが結論される．それ故，$n=3$ の時には，$f_{ikjm}=0$ となり，このときの c_{ijk} は次式を満足する．

$$c_{ikl}c_{jlm}=-\delta_{ij}\delta_{km}+\delta_{im}\delta_{kj} \tag{4.6}$$

即ち，$n=3$ の時には，$c_{ijk}=\epsilon_{ijk}$ は Levi-Civita の 3 階完全反対称テンソルになる．これは，四元数 $\mathbb{H}$ である [7]．

[7] Hamilton が有名な公式 $i^2=j^2=k^2=ijk=-1$ ($c_{ijk}=\epsilon_{ijk}$ のこと) を導いたのは，四元数に対する組成法則からであった．交代性の条件から，同じ公式が導かれたと言うことは，Tiomno の公式は組成法則をも導かねばならないことを意味する．§6 で，交代代数と組成代数の関係を議論する．

5　四元数の結合性と八元数の非結合性

前節で得られた結果を，四元数 $(n=3)$ と八元数 $(n=7)$ に適用する．

代数の結合則 $(ab)c=a(bc)$ に導く

$$(e_\mu e_\nu)e_\lambda = e_\mu(e_\nu e_\lambda) \tag{5.1a}$$

はギリシャ文字の添え字が 1 つでもゼロの時は，自明だから，

$$(e_i e_j)e_k = e_i(e_j e_k) \tag{5.1b}$$

を意味する．これは，

$$(-\delta_{ij}+c_{ijl}e_l)e_k = e_i(-\delta_{jk}+c_{jkl}e_l) \tag{5.1c}$$

$$-\delta_{ij}e_k - c_{ijk} + c_{ijl}c_{lkm}e_m = -\delta_{jk}e_i - c_{jki} + c_{jkl}c_{ilm}e_m \tag{5.1d}$$

となるが，c_{ijk} の完全反対称性を使えば，

$$-\delta_{ij}e_k + c_{ijl}c_{lkm}e_m = -\delta_{jk}e_i + c_{jkl}c_{ilm}e_m \tag{5.1e}$$

$$(c_{jkl}c_{ilm}+c_{ijl}c_{klm})e_m = -\delta_{ij}e_k+\delta_{jk}e_i-(f_{jkim}+f_{ijkm})e_m = -\delta_{ij}e_k+\delta_{jk}e_i \tag{5.1f}$$

$$\therefore \quad f_{jkim}=0 \tag{5.1g}$$

ここで，(5.1f)→(5.1g) では f_{ijkm} の完全反対称性を使った．逆に，(5.1g) が成り立つなら，(5.1b) も成り立つ．

以上のように，$f_{ijkm}=0$ ならば代数は結合的であるが，$f_{ijkm}\neq 0$ なら，代数は非結合的になることが分かった．ところが，前節で見たように，$n=3$ の時には，4 階の完全反対称テンソルは存在しないので，$n=3$ の四元数は結合的で，かつ構造定数が $c_{ijk}=\epsilon_{ijk}$ と決まるが，$n>3$ の時は，ゼロでない 4 階の完全反対称テンソルは存在するから，代数は非結合的になる．特に，八元数は非結合的である．言い換えれば，同じ交代代数でも，八元数は非結合的で，四元数は結合的となる理由は，4 階の完全反対称テンソルが，存在するか否かにある．

6　可除的な交代代数は組成代数でもあること

この節では，可除的な交代代数 [8] は組成代数でもあることを示そう [9]．今，(共役の定義された) 交代代数の 2 つの元を

$$a=a_0+a_ie_i,\ b=b_0+b_ie_i,\ i=1,2,\cdots,n \tag{6.1}$$

と書き，その積 (2.6a), (2.6b) を $ab=A_0+A_ke_k$，$\overline{ab}=A_0-A_ke_k$ とおけば，次のように，組成法則が証明出来る．

$$\begin{aligned}|ab|^2 &= (ab)(\overline{ab}) = A_0^2+A_k^2\\ &= (a_0b_0-a_ib_i)^2+(a_0b_k+b_0a_k+a_ib_jc_{ijk})(a_0b_k+b_0a_k+a_lb_mc_{lmk})\end{aligned}$$

---

[8] 線形方程式 $ax=b, xa=b,\ a,b\in\mathcal{A}$ が一意的な解 $x\in\mathcal{A}$ を持つとき，代数 $\mathcal{A}$ は可除的という．$\mathcal{A}$ が共役の定義された交代代数の場合は，$\overline{a}(ax)=|a|^2x=\overline{a}b\to x=(\overline{a}b)/|a|^2\in\mathcal{A}$ が成り立つ．同様に，$xa=b\to x=(b\overline{a})/|a|^2\in\mathcal{A}$.

[9] この節の証明法は八元数に対して用いた方法 [5] と同じである．

$$= (a_0 b_0 - a_i b_i)^2 + (a_0 b_k + b_0 a_k)^2 + a_i b_j a_l b_m (c_{ijk} c_{lmk}) \quad \because c_{ijk}\ \text{は添え字に関して完全反対称}$$

この第 3 項に (4.4a) で添え字を入れ替えたものを使うと

$$= (a_0 b_0 - a_i b_i)^2 + (a_0 b_k + b_0 a_k)^2 + a_i b_j a_l b_m (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} + f_{ijlm})$$

$$= (a_0 b_0 - a_i b_i)^2 + (a_0 b_k + b_0 a_k)^2 + (a_i^2 b_j^2 - a_i b_i b_j a_j) \quad \because f_{ijlm}\ \text{は添え字に関して完全反対称}$$

$$= (a_0^2 + a_i^2)(b_0^2 + b_i^2) = |a|^2 |b|^2 \tag{6.2}$$

なお，(6.2) の証明で使った，c_{ijk}, f_{ijlm} についての性質は，交代代数に対する Tiomno の公式から，導かれたことに注意されたい．Hurwitz の定理により，このような組成法則が成り立つのは，$n = 0, 1, 3, 7$ に限る [10]．定義によって，任意の交代代数は積のもとで閉じているので，共役の定義された，交代代数は可除系でもあり，この節の主張は「一般化された Frobenius の定理」の内容に他ならない．ただ，この節の証明は第 4 節とともに，添え字があまりにも多いので，補遺 B に (添え字の全くない) 簡明な証明を与える．

7　まとめ

組成代数の四元数は結合的なので交代的でもあると言う事実から，基底の '空間' 成分に対する Tiomno の公式を使う事により，四元数の結合性が，3 次元空間では 4 階の完全反対称テンソルが存在しない事実に由来すること，その結果，四元数の構造定数 c_{ijk} が ϵ_{ijk} に等しいことがわかった (組成法則とは，一見，何の関係もないように見える，Tiomno の公式から，Hamilton と同じ結果が導かれたことは，組成法則と交代性に密接な関係があることを思わせる．この点についての更なる議論を補遺 A, B で行う)．同様に，組成代数である八元数の交代性から，その構造定数 c_{ijk} (普通 a_{ABC} と書く量) が完全反対称であることは分かったが，具体的数値は決まらなかった [11]．ただし，八元数の非結合性は (4.4a) で定義された f_{jkim} がゼロにならないことから示せた．

なお，交代性と Tiomno の公式との関係は，代数をなさない，三元数や (準結合則を使えば) 五元数の場合にも成り立つ．これから，可除性の要求により，三元数・五元数 → 四元数・八元数への一般化がなされることは，改めて議論するつもりである．

補遺 A 組成代数は交代的であること

a, b, c, d などはすべて単位元を持つ代数 $\mathcal{A}$ の元とする．非退化なスカラー積を $\langle a, b\rangle = \langle b, a\rangle$ とすれば [12]，組成法則は

$$\langle ab, ab\rangle = \langle a, a\rangle\langle b, b\rangle \tag{7.1}$$

で与えられる．この補遺では，組成代数 (単位元を持つノルム多元環) は必ず，交代的で，(1.5) 即ち，(3.4a), (3.4b) を満たすことを証明する．この証明は [1, 2] で与えられている．ここでは，文献 [3] の第 1 章 6 節で与えた記号での証明を紹介する．これは，単なる繰り返しに過ぎないが，このノートで，交代性に対する Tiomno の公式 (3.4a)，(3.4b) を使って，組成代数の四元数や八元数を議論してきたので，それが正しいことを確かめる．

---

[10] $n + 1 = 2^k, k = 0, 1, 2, 3$ の 4 つのケースは交代代数なので，Tiomno の公式が使えて，(6.2) が成り立つが，$k > 4$ になると，代数は，交代的ではなくなり，Tiomno の公式の右辺に余分な項が加わる．そのような代数は最早，組成法則を満たさない．

[11] しかし，準結合則を仮定すれば定まることは [5] で示した．

[12] スカラー積 $\langle a, b\rangle$ が非退化とは，すべての $b \in \mathcal{A}$ に対して $\langle a, b\rangle = 0$ ならば，$a = 0$ が成り立つ場合を言う．

まず，a の共役は (以下，$e_0 = 1$ と置く)

$$\overline{a} = 2\langle a, 1\rangle - a \tag{7.2}$$

で与えられる (これは，(2.5a) と同じ)．$a \to \overline{a}$ が線形であることは自明であるが，$\overline{\overline{a}} = a$ も直ぐ分かる．共役が積の順序を交換することは，$e_i e_j + e_j e_i = 0\ (i \neq j)$ を要求する：

$$\overline{ab} = 2\langle ab, 1\rangle - ab = 2\langle ab, 1\rangle - (ab + \overline{b}\overline{a}) + \overline{b}\overline{a} = \overline{b}\overline{a} \tag{7.3a}$$

ここで，

$$2\langle ab, 1\rangle = ab + \overline{b}\overline{a} \tag{7.3b}$$

を使った．

(7.1) において，$b \to b + c$ 及び，$a \to a + c$ とすれば，各々

$$\langle ab, ac\rangle = \langle a, a\rangle\langle b, c\rangle \tag{7.4a}$$

$$\langle ab, cb\rangle = \langle a, c\rangle\langle b, b\rangle \tag{7.4b}$$

を得る．(7.4a) において，$a \to a + d$ とおけば，

$$\langle ab, dc\rangle + \langle db, ac\rangle = 2\langle a, d\rangle\langle b, c\rangle \tag{7.4c}$$

となるが，ここで，$d = 1$ とおくと，

$$\langle ab, c\rangle = \langle b, \overline{a}c\rangle \tag{7.4d}$$

が得られる．(7.4c) で $c \leftrightarrow d$ として，$d = 1$ とおけば，次式を得る：

$$\langle ab, c\rangle = \langle a, c\overline{b}\rangle \tag{7.4e}$$

これから，スカラー積が

$$\langle a, b\rangle = \langle 1, \overline{a}b\rangle = \langle b, a\rangle = \langle 1, \overline{b}a\rangle, \quad \therefore\ \langle a, b\rangle = \frac{1}{2}(\overline{a}b + \overline{b}a) \tag{7.4f}$$

のように与えられる．更に，(7.4a) に (7.4d) を使い，(7.4b) に (7.4e) を使うと，それぞれ

$$\overline{a}(ab) = |a|^2 b \to a(ab) = a^2 b \cdots (\overline{a}, a, b) = 0 \to (a, a, b) = 0 \tag{7.4g}$$

$$a|b|^2 = (ab)\overline{b} \to ab^2 = (ab)b \cdots (a, b, \overline{b}) = 0 \to (a, b, b) = 0 \tag{7.4h}$$

を得る．以上のように，組成法則から，交代性の条件が導かれた (この証明の際には，$\mathcal{A}$ は単位元を持つ，対合である共役の定義された代数であるという仮定がフルに使われている)．従って，組成代数の $\mathbb{H}, \mathbb{O}$ に対し，交代性の条件である，Tiomno の公式を適用できたのである．なお，(7.4g)，(7.4h) から，(a, b, c) の完全反対称性，即ち，交代性が導かれる：$(a, b, c) = (b, c, a) = (c, a, b) = -(b, a, c) = -(c, b, a) = -(a, c, b)$.

補遺 B 交代性と組成法則の関係

八元数の組成法則はその交代性からでも導ける．一般に，共役の定義された交代代数はまた組成代数でもある．第 5，6 節で与えた証明は，第 4 節の結果を使った関係で，添え字が多かったので，この補遺で改めて (添え字の全くない) 簡明な証明を与える．

まず，交代性の条件 (3.4b)

$$(a, b, \bar{b}) = 0 \tag{7.5}$$

で，$b \to b + ab$ と置き代える:

$$(a, b + ab, \overline{b + ab}) = 0 \tag{7.6}$$

これは，(7.5) と $(a, ab, \overline{ab}) = 0$ を使えば，

$$(a, b, \overline{ab}) + (a, ab, \bar{b}) = 0 \tag{7.7}$$

となるので

$$a[b(\overline{ab})] - (ab)(\overline{ab}) + a[(ab)\bar{b}] - [a(ab)]\bar{b} = 0 \to |ab|^2 = |a|^2|b|^2 \tag{7.8}$$

が得られる．なぜなら，$a[b(\overline{ab})] = a[b(\bar{b}\bar{a})] = a[|b|^2\bar{a}] = |a|^2|b|^2, \quad a[(ab)\bar{b}] - [a(ab)]\bar{b} = a^2|b|^2 - a^2|b|^2 = 0$ 故．即ち，単位元を持つ交代代数は単位元を持つ組成代数でもある．従って，先の補遺 A の結果とあわせると，単位元を持つ，対合である共役の定義された代数に対しては，組成代数 $\longleftrightarrow$ 交代代数であることが分かった．しかし，a や b の集合が代数をなさない場合に，条件 $(a, ab, \overline{ab}) = 0$ が，(7.5) の結果として導けない．なぜなら，ab は，a や b の集合から外に飛び出しているから．三元数や五元数がこの場合に相当する．しかしながら，三元数や五元数に対しても，組成法則 (7.8) は成り立つ．しかし，勿論，「平方和の定理」の仲間ではない [13)]．

参考文献

[1] R. D. Schafer, ‘AN INTRODUCTION TO NONASSOCIATIVE ALGEBRAS’, (Academic Press, NEW YORK and LONDON, 1966)

[2] B. L. Kantor, A. S. Solodovnikov 著，浅野洋監・笠野久弘訳，『超複素数入門ー多元環へのアプローチ』，(森北出版，1999).

[3] 森田 克貞，『四元数・八元数とディラック理論』, (日本評論社, 2011).

[4] J. Tiomno, ‘OCTONIONS AND SUPER-GLOBAL SYMMETRY’, in Theoretical Physics(Trieste Seminer), Viena, 1963), 251-264.

[5] 森田 克貞, ‘五元数の非存在と八元数’，「数学・物理通信」，第 5 巻，第 2 号 (2015)，23-35.

13) a, b が各々三元数の時には，ab は四元数，a, b が各々五元数の時には，ab は八元数．従って，(7.8) は，各場合において，4 平方和が 3 平方和の積に等しく，8 平方和が 5 平方和の積に等しくなっている．

7, 11, 13 の倍数の判別法

山崎和夫 [1]

How to Discriminate Numbers as Multiples of 7, 11, 13

Kazuo YAMAZAKI[2]

1　はじめに

一桁の整数の中で 7 以外の整数については誰でも知っていることだが，7 のみは簡単な倍数の判別法を私は知らない．

それを知ろうとして，3 については判別法は知っていてよく使っているが何故それが正しい答を与えるのか？その証明を私が知らないことに気づいた．文献を探すのも面倒なので，頭の体操に自分でしばらく考えたらその証明ができた．

2 の倍数は偶数である．それは小学生でも知っている．一桁目の数だけで解る．5 の倍数についても同様．何故 2 桁目以上に無関係なのか？　それは 10 が 2 と 5 の倍数だから．ところが，4 の倍数は下 2 桁で，8 の倍数は下 3 桁で解る．何故かは自明でしょう．6 は 2 と 3 の倍数である．こうして 7 は別として，3，6，9 以外は下 3 桁で話が済む．3，6，9 ではずっと上の桁の数も関係してくる．倍数にはこの 2 つのタイプがある．

7 の倍数を知るにはこれらのことをきっちり押さえてほぼ自明のことだが一般的な定理の形にしておく必要がある．次節以下でそれを確かめておこう．

2　倍数に関する一般的な定理

倍数かどうかを判別したい数を a とする．

1. （定理１）　a の任意の整数倍は常に a の倍数である．
2. （定理２）　a の任意の倍数の和は a の倍数である．
3. （定理３）　a の倍数と a の非倍数の和は a の非倍数である．

証明は自明である．代数表記を知っていればより解りやすいが．上記以外はどちらでもあり得る．例えば a の非倍数の和は a の倍数でも非倍数でもあり得る．

それでは本題である 7 の倍数の判別法を述べよう．

3　7 の倍数の判別法．マジックナンバー 1001 の発見

試行錯誤で色々やってみても 7 の場合下何桁かだけで決まらないことまた 3 の場合のようにもならず，大きな数，例えば 20 桁の数でも，割って見なければ解らない．3 や 9 の場合のように 99999 と 9 の並ぶ数を 7 で割ってみているうちに 999999 が 7 で割り切れることを見つけた．

さらに 999999=9 × 111111 であるから，111111 は 7 の倍数でなければならない．また 3 の倍数であることも明らか．そこで 111111 をよく見ると 111111=11 × 10101=111 × 1001 と表せることに気づく．詰まり 111111 は 3，7，11，1001 の倍数であることが解る．更に 111 は 7，11 の倍数でないから 1001 が 7 と 11 の倍数でな

[1] 京都大学名誉教授
[2] kazuo-yamazaki@y2.dion.ne.jp

ければならぬと結論できる．そこで 1001 = 7 × 11 × 13 が導け結局 111111 の素因数分解が 111111 = 3 × 37 ×（7 × 11 × 13）と得られる！

ここまでくれば，後の道筋は大体見当が付いていた．999 ⋯ と 9 の並びがどこかで 7 の倍数になっていないか？　3 の倍数の場合が頭にあったからである．つまり 1000000 = 999999 + 1 で，定理 1，2，3 を用いて 7 の倍数かどうかの議論をする場合には 1000000 は 1 と等価である．そのことを以下では記号 1000000 ∼ 1 で表す.

任意の 20 桁の数 $abcdefghijklmnopqrst$ が 7 の倍数かどうかで説明しよう．ただし a, b, c ⋯⋯ r, s, t 等は 0，1，2，⋯⋯ 7，8，9 等の中の任意の数である．

$$\begin{aligned} abcdefghijklmnopqrst &= abcdefghijklmn \times 1000000 + opqrst \\ &= abcdefghijklmn \times (999999 + 1) + opqrst \\ &\sim abcdefghijklmn + opqrst \end{aligned}$$

後はこの操作を繰り返せば結局

$$abcdefghijklmnopqrst \sim ab + cdefgh + ijklmn + opqrst$$

と 6 桁の数 3 個と 2 桁の数 1 個の足し算になり，それを求めると 1 個の 6 桁の数（場合によっては繰り上がって 7 桁になるかも知れないが，7 桁目は上記の方法で 6 桁の数に出来る）．

桁数がもっと違っても同じ議論が成り立ち，こうして得られた 6 桁の数を $ABCDEF$ としよう．この 6 桁の数が 7 の倍数なら，元の数も 7 の倍数である．

マジックナンバー 1001 = 7 × 11 × 13 であったことを思い出せば上で得られた $ABCDEF$ が 11 の倍数なら元の数も 11 の倍数であり，13 についても同様である．

くどいがもう一度結論をまとめておくと，桁数の大きな任意の数 X が 7,11,13 の倍数か否かを知るには，X を下から 6 桁毎に区切って，最上部は X の桁数が 6 の倍数でない限り，例えば 4 桁なら，6 桁毎に区切って並べた 6 桁の数の和にその 4 桁の数を足した数が上記の $ABCDEF$ であり，それが判別数である．具体的な大きな数について試してほしい.

ところが話はまだ先がある．1001 = 1000 + 1 だから，1000 = 1001 − 1　で

$$\begin{aligned} ABCDEF &= ABC \times 1000 + DEF \\ &= ABC \times (1001 - 1) + DEF \\ &\sim DEF - ABC \end{aligned}$$

で結局この 3 桁の数の引き算で得られた一般に 3 桁の数が（仮に負であっても問題がない）7，11，13 のどれの倍数であるか倍数でないかで知りたかった答が得られる．

いま述べた 3 桁の数も 1 や −1 でない数を使って 2 桁の数にすることも可能であるが，7，11，13 をそれぞれ個別的に扱わねばならぬのでそれは読者にお任せしよう．

4　おわりに

以上，頭の体操として考えたことなので，そんなことはすでに知られているという方もおられるかもしれない．その場合にはご寛容をお願いしたいし，それが文献としてどこにあるかをご教示いただけると幸いである．文献を探すのが面倒なので自分の頭で考えたというしだいなので.

雑誌『窮理』の紹介と創刊の経緯

The Magazine *KYUURI* and Its Publication

伊崎修通 [1]

Nobuyuki IZAKI[2]

1　はじめに

この度,『数学・物理通信』のエディターのお一人である矢野忠先生から，小誌『窮理』の紹介の機会をいただきました.

本稿が,『数学・物理通信』の読者の皆様に，小誌への興味をもって頂けるきっかけになれば幸いです.

2　創刊の経緯

私は元々科学雑誌の編集をしておりましたが，だいぶ以前から何人かの先生方と，既存の科学雑誌とは異なる形で，例えば昔の同人誌のような文化的薫りのするような雑誌があるとよいのではないかと，しばしば話をしておりました.

物理系の先生方が日頃の研究以外に，社会や日常をどのように見て，感じているのかを，随筆として書き綴ったり，今は忘れられた日本の物理学者を科学史的観点から顕彰したり，場合によっては，現在の物理学研究の状況についての批評なども一部含めたような，そのような内容を扱った雑誌を当時からイメージしておりました.

かつて，寺田寅彦や中谷宇吉郎，湯川秀樹，朝永振一郎といった先人の先生方が，随筆を通して，社会や文明批評，人生観，自然観，芸術観といった専門外の事について語ってきたように，全く同様とはいかないまでも，現代の先生方にもそのような場があるとよいのではないかと考えました.

しかし，新しく雑誌を刊行するにも，大量部数で書店までの流通ルートに乗せることは難しい状況だったため，一つは電子書籍という形態をとり，もう一つはリトルプレスという小部数出版の形をとって進めてみることにしました.

雑誌の命名においてはいくつか候補があがり，寺田寅彦の著作本や作品名などを採ったものなどもありましたが，最終的に現在の誌名である「窮理」にたどり着きました．この「窮理」という言葉には，歴史的にも深い背景がありますが，私自身，駆け出しの頃からお世話になっていた戸田盛和先生がこの言葉をお好きだったこともあり，迷わずこの誌名にしたいと思いました.

そして，雑誌を刊行していくにあたって，これだけは守っていきたいと考えたことがあります．その一つは広告を入れないこと（広告主の意向に左右されない雑誌をつくるため），もう一つは科学者の先生が描かれた絵を表紙まわりに飾っていきたいということ．この二点は大事にしていきたいと考えました.

そのような気持ちもありまして，戸田先生の絵を表紙に使わせて頂くことになり，また，誌名の題字は，書に造詣の深い方のアドバイスにより，中国唐代の書家 ちょ遂良（ちょすいりょう）の『雁塔聖教序』（がんとうしょうぎょうじょ）から採った字を採用して，スタートすることになりました.

このような経緯で本誌創刊の船出をしましたが，年間 2〜3 回の不定期刊行で模索しながらの航海という状況で現在に至っております.

[1]窮理舎代表; http://kyuurisha.com/

[2]izaki@kyuurisha.com

3　内容紹介

誌名の「窮理」については上にも書きましたが，ご参考までに小誌の奥付紹介にもある，その大まかな歴史的背景を下記しておきます.

「窮理」とは,「理を窮め性を尽くし以て命に至る」という周易 説卦伝の冒頭に由来する言葉で，江戸時代の儒学者や蘭学者たちによって，現在の物理学に近い内容を指すものとして用いられました．幕末・明治期になると，緒方洪庵や福沢諭吉らによって「窮理」はさらに西洋科学の根幹学問として広められ，これが次第に「物理」に代わっていったという歴史的背景があります．長い歴史の中で，それぞれの時代の思潮に育てられながら，日本の将来を託すべき新しい文明精神の指標として，窮理の思想はつくられてきました.

このような歴史的背景の下，21 世紀の現代に，新たに，本来あるべきその哲学的思索の道を切り拓くべく，上のような経緯も踏まえ，本誌を創刊いたしました.

先人の物理学者に倣って，科学の視点に立ちながらも，社会や文明，自然，芸術，人生，思想，哲学など，幅広い事柄について自由に語る場をつくっていきたいと考えております.

また，表紙まわりの絵や音楽に関する連載にも象徴されますように，小誌は，科学者の先生方の芸術的な表現の場としても寄与していければと願っております.

創刊に際しての巻頭言は，江沢洋先生にご執筆いただき，メッセージ性のある力強いお言葉を頂戴しました.

そのお言葉を今後の大きな原動力にしつつ，多くの分野の方々にご執筆いただきながら，広く読書家の方々と共有できる雑誌にしていけるよう邁進してまいる所存です.

4　最後に

小誌へ随筆をご寄稿されたい方は，お手数でなければ，私宛のメールアドレスまでご一報ください．内容や分量，形式，掲載の可否など，詳細につきましてご相談させて頂きます.

また，小誌のご購入を希望される方は，冒頭の窮理舎ホームページをご参照のほどお願い申し上げます.

編集後記

6月になったので6巻4号を発行します．次号の6巻5号は通巻で50号となるので記念号として発行します.

今回の編集中に経験したまちがいに編集者としてショックを受けました．これはすでに掲載済だった原稿をこの号に取り込んで編集しようとしていたことです．それも一つの原稿ならば，単なる勘違いということもあるでしょうが，２つもの原稿をすでに掲載済であることを忘れてまだ掲載していないと思い込んで編集しようとしていたのです.

具体的に申しますと武藤先生の「フィボナッチ数列の拡張」と森田さんの「複素四元数の行列表現とDirac スピノール」がこれにあたります．森田さんはすでにいくつかの投稿をされているのでそれを間違えただけなら私としてそんなにショックを受けませんが，武藤先生の「フィボナッチ数列の拡張」のほうもまだ掲載していなかったと思い込んだのがショックでした.

掲載済の原稿はどこかその掲載号を記したファイルに保存することも世戸さんとか中西先生の投稿原稿に関しては一時していましたが，常にそれをすることもなかなか難しく今回のようなことが起きました．著者に間違えた編集で草稿をお送りしたら，そこで間違いが当然発見されるでしょうが，それでは編集者としては申し訳がないような気がしています.

ということで，こういうことがこれから起こるかもしれないことを示した状況でした．なにかいいアディアがあれば，ご提案をお願いします.

（矢野　忠）