数学・物理通信

6巻7号　　2016年9月

編集　新関章三・矢野　忠

2016 年 9 月 5 日

目次(Contents)

分数冪微積で現れた群の完備化とデルタ関数の無限和

浅田　明 [1]

Completion of a Group Arising from Fractional Calculus and Infinite Sum of Delta Functions

Akira ASADA [2]

はじめに

これは「分数冪微積で現れた群と離散デルタ・ポテンシャル」「数学・物理通信」5-6 の続編です（分数冪微積については [5] など参照)。簡単に分数冪微分で現れた群とリー環についてこれまでに得られたことのまとめた後　この群の完備化を多変数の場合をふくめて調べ、完備化がデルタ関数の無限和：$\sum_n c_n\delta_{a_n}$ の意味づけと関係があることを述べる。

目次

1　これまでのまとめと新しい結果

A: 分数冪微積で現れた群とリー環

適当な関数空間の上では $\{\dfrac{d^a}{dx^a}|a\in\mathbb{R}\}$ と $\{x^a|a\in\mathbb{R}\}$ は１径数群であり生成作用素は其々$\log(\dfrac{d}{dx})$, $\log x$ である。この２つの１径数群から生成される群 $G_{\mathbb{R}}$ と、 $\log(\dfrac{d}{dx})$ と $\log x$ から生成されるリー環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ は

$$\mathcal{R}[f(s)](\mathrm{x}) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^s}{\Gamma(1+s)}f(s)ds,$$
$$\frac{d^a}{dx^a}\mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{R}[f(s+a)](x),$$

([4] 参照）を用いると　それぞれ $\{\frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+s-a)}|a\neq 0\}$ を生成元とする乗法による自由アーベル群 $\mathsf{A}_{\mathbb{R}}$ の $\mathbb{R}=\{\tau_a|a\in\mathbb{R}\}$ による拡大; $\tau_a f(s)=f(s+a)$, および $\dfrac{d}{ds}$ と $\Psi(1+s)$ から生成されるリー環、と同型になる。形式的には $\mathsf{A}_{\mathbb{R}}$ は０でない実数全体；$\{a\in\mathbb{R}, a\neq 0\}$, を生成元とする自由アーベル群である。

$\mathcal{R}$ で変換しなければ $\mathsf{A}_{\mathbb{R}}$ は分数冪オイラー微分 $\{E_\ell^a|a\neq 0\}$, $E_\ell^a = x^a\dfrac{d^a}{dx^a}$, から生成された自由アーベル群である。

[1]asada-a@poporo.ne.jp

[2]Professor emeritus, Sinsyu University

$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ は $\Psi(1+s)$ から生成される唯一の極大イデアル $\mathfrak{a}$ をもちベクトル空間として

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\frac{d}{ds} \oplus \mathfrak{a},$$

である。$\mathfrak{a}$ は $\Psi(1+s), \Psi'(1+s), \Psi^{(2)}(1+s), \ldots$ を基底とするベクトル空間であり、$\Psi^{(n)}(1+s)$ で生成されるイデアルを $\mathfrak{a}_n$ とすれば

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_o \supset \mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_2 \supset \cdots, \quad \cap_{n\geq 0}\mathfrak{a}_n = \{0\},$$

である ([3])。$\mathfrak{a}$ に $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\Psi\ (n)(1+s)$ が完備化すればすべての $a \in \mathbb{C}$ について収束するようなノルムを入れその完備化を $\bar{\mathfrak{a}}$, $\bar{\mathfrak{a}}_n$ を $\mathfrak{a}_n$ の完備化とすれば　写像 ϑ;

$$\vartheta(f)(s) = \frac{d}{ds}(\log f(s)) = f(s)^{-1}\frac{df(s)}{ds}$$

で $\mathsf{A}_{\mathbb{R}}$ は $\bar{\mathfrak{a}}_1$ の中に同型に移される。

これらの結果は $\mathsf{A}_{\mathbb{R}}$ に少し欠落がある事を示唆している。この補充の為　変換 $\mathcal{N}$;

$$\mathcal{N}[f(s)](x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(s) ds,$$

と正則関数の原点での芽にたいし定義されているボレル変換 $\mathcal{B}$;

$$\mathcal{B}[\phi(\zeta)](z) = \frac{1}{2\pi i}\oint e^{\frac{z}{\zeta}}\frac{\phi(\zeta)}{\zeta}d\zeta$$

の逆変換

$$\mathcal{B}^{-1}[f(s)](x) = \int_0^{\infty} e^{-s} f(sx) ds$$

から得られる公式 $\mathcal{B}^{-1}[\log\zeta](z) = \log z - \gamma$ を用いた拡張を利用する。

定義から

$$\mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{N}[\frac{f(s)}{\Gamma(1+s)}](x)$$

だが　さらに $\mathcal{N}[\delta_a] = x^a$, $\mathcal{R}[\delta_a] = \dfrac{x^a}{\Gamma(1+a)}$, と拡張されたボレル変換では $\mathcal{B}[x^a] = \dfrac{x^a}{\Gamma(1+a)}$ となることから

$$\mathcal{R} = \mathcal{B} \circ \mathcal{N} \tag{1.1}$$

が成立する ([4])。(1) と $\mathcal{N}$ は逆を持ち $\ker\mathcal{B}$ は $\{x^{-n} | n \in \mathbb{N}\}$ で生成されることから $\ker\mathcal{R}$ は $\{\delta_{-n} | n \in \mathbb{N}\}$ で生成される。よって $\mathcal{R}$ の定義域として関数の空間などを取れば $\mathcal{R}$ は逆をもつ。

これらの変換をもちいれば $\mathsf{A}_{\mathbb{R}}$ にボレル変換 $\mathcal{B}$ を添加した自由アーベル群（$\mathcal{R}$ で変換すれば $\mathsf{A}_{\mathbb{R}}$ に $\Gamma(1+s)$ を添加した乗法による自由アーベル群）$\mathsf{A}_{\mathbb{R}}^{\natural}$ とその $\mathcal{R} = \{\tau_a | a \in \mathbb{R}\}$ による拡大 $G_{\mathbb{R}}^{\natural}$ が補充された群である。形式的には $\mathsf{A}_{\mathbb{R}}^{\natural}$ は実数全体;$\{a | a \in \mathbb{R}\}$, を生成元とする自由アーベル群である。

ϑ は $\mathsf{A}_{\mathbb{R}}^{\natural}$ でも定義され $\vartheta : \mathsf{A}_{\mathbb{R}}^{\natural} \to \bar{\mathfrak{a}}$ は中への同型である。

B; **完備化とデルタ関数の無限和**

次の問題の答えを探るのが　本稿の主題である。特に完備化の問題とデルタ関数の無限和 $\sum_n c_n\delta_{a_n}$ の意味づけに関係がある事が示されたのが主な結果である。

問題。$\mathsf{A}_{\mathbb{R}}^{\natural}$ に適当な位相を入れ　それによる完備化 $\bar{\mathsf{A}}_{\mathbb{R}}^{\natural}$ が

$$\vartheta : \bar{\mathsf{A}}_{\mathbb{R}}^{\natural} \cong \bar{\mathfrak{a}}$$

となるよう出来るか？　またその時 $\bar{\mathsf{A}}_{\mathbb{R}}^{\natural}$ の元を適当な関数空間の上の作用素と解釈できるか？

これにはまだ不十分な結果しか得られていないが　$\mathcal{R}$ を用いれば　無限積 $\prod_{i=1}^{\infty}(\Gamma(1+s+a_i))^{\nu_i}$ の収束問題になる。それについては

命題。$0 \le a_1 \le a_2 \le \cdots$ とする。$a_i = n_i + \beta_i, -\frac{1}{2} < \beta_i \le \frac{1}{2}$　として

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\nu_i|(n_i+1)\log(n_i+1) < \infty$$

であれば　無限積 $\prod_{i=1}^{\infty}((\Gamma(1+s+a_i))^{\nu_i}$ は $|s| < \frac{1}{2}$ で収束する。

を示すことが出来る。なお s の定義域は $-\frac{1}{2}$ より小さい負の実数をのぞいた複素数全体まで広げられる。この事から分数幂オイラー微分の無限積の意味づけもある程度出来る。

$\mathsf{A}_{\mathbb{R}}^{\natural}$ は $\mathbb{R}$ の元を生成元とする自由アーベル群である。このような群で自然なものとして $\mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{Z}}$;　$\delta_a, a \in \mathbb{R}$ を生成元とする加法による群、が挙げられる。$\mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{Z}}$ と $\mathsf{A}_{\mathbb{R}}^{\natural}$ との間の同型は写像 $\mu_{-x,\Psi}$;

$$\mu_{-x,\Psi}(T) = \exp(T\int_{-x}^{s} \Psi(1+x+t)dt),$$

$T = \sum_i n_i\delta_{a_i} \in \mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{Z}}$ で与えれる。ただし $\delta_a f(x,t) = f(x,a)$ とする。なお積分を 0 から取った $\mu_{0,\Psi}$;

$$\mu_{0,\Psi}(T) = \exp(T\int_{0}^{s} \Psi(1+x+t)dt)),$$

を使えば完全列

$$0 \to \mathbb{Z}\delta \to \mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{Z}} \xrightarrow{\mu_{0,\Psi}} \mathsf{A}_{\mathbb{R}} \to 0,$$

が得られる。

さらに $\mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C} = \mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{C}}$ の「完備化」として

$$\begin{aligned}\mathsf{D}_{\mathbb{R},\ell^1} &= \{\sum_i c_i\delta_{a_i} | \|\mathbf{c}\| = \sum_i |c_i| < \infty\}, \\ \mathsf{D}_{\mathbb{R}:\ell^1_{\mathrm{loc}}} &= \{\sum_i c_i\delta_{a_i} | \|\mathbf{c}\| < \infty, \\ &\qquad \{a_1, a_2, \ldots\} \text{ is a bounded set}\}\end{aligned}$$

を導入すれば　これらにも $\mu_{-x,\Psi}$ が定義できる。
$\mu_{-x,\Psi}(\mathsf{D}_{\mathbb{R};\ell^1})$ は $\mathsf{A}_{\mathbb{R}}^{\natural}$ の拡大と見られ $\bar{\mathsf{A}}_{\mathbb{R};\ell^1}^{\natural}$ と書く。また $\vartheta\bar{\mathsf{A}}_{\mathbb{R};\ell^1}^{\natural} = \bar{\mathfrak{a}}_{\ell^1}$ も定義される。同様に $\mathsf{D}_{\ell^1_{\mathrm{loc}}}$ から出発して $\mathsf{A}_{\mathbb{R}}^{\natural}, \mathfrak{a}$ の拡大もえられる。これらは $\mathsf{A}_{\mathbb{R}}^{\natural}, \mathfrak{a}$ の適切な「完備化」の候補である。なお　これらの位相は ℓ^1 型であり $G_{\mathbb{R}}^{\natural}$ に拡張できる。

$\mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{C}}$ の「完備化」として ℓ^p 型の

$$\mathsf{D}_{\mathbb{R};\ell^p} = \{\sum_{;} c_i\delta_{a_i} | \sum_i |c_i|^p < \infty, \sum_i |a_i|^q < \infty\},$$

$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ も考えられ $\mu_{-x;\Psi}(\mathsf{D}_{\mathbb{R},\ell^p}) = \bar{\mathsf{A}}_{\mathbb{R};\ell^p}^{\natural}$ も定義できさらに

$$\vartheta : \bar{\mathsf{A}}_{\mathbb{R};\ell^p}^{\natural} \to \bar{\mathfrak{a}}$$

も定義できるが τ_a は働かない。、

座標系が固定されていればこれらの結果はそのまま多変数に拡張される。多変数で $G_{\mathbb{R}}$ 等に対応する群などを $G_{\mathbb{R}^n}$ などと書く。しかし $\bar{\mathsf{A}}_{\mathbb{R}^n}^{\natural}$ から $\bar{\mathfrak{a}}_{\mathbb{R}^n}$ への写像を得るには $\mathfrak{g}$ は $\Psi(1+s_1)ds_1, \ldots, \Psi(1+s_n)ds_n$ で生成されたリー環としなければいけない。この時の写像は非アーベル　ド・ラム理論で重要な $\rho = \rho_\ell$;

$$\rho_\ell(g) = g^{-1}dg$$

である ([1],[2])。

$\mathsf{D}_{\mathbb{R};\ell^p}$ の多変数版 $\mathsf{D}_{\mathbb{R}^n;\ell^p}$ なども 1 変数の時と同様に定義され同じ様な性質を持つ。

$\mathbb{R}^n$ の線形変換 T は $G^\natural_{\mathbb{R}^n}, \mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n}$ に働き $\mathbb{R}^n \cong \{\tau_{\mathbf{a}}|\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n\}$, $\mathbb{R}^n \cong \{\sum_{i=1}^n a_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}|(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n\}$ を不変にする。また

$$\mathsf{A}^\natural_{\mathbb{R}^n} \cong T^*(\mathsf{a}^\natural_{\mathbb{R}^n}),\ \mathfrak{a}_{\mathbb{R}^n} \cong T^*(\mathfrak{a}_{\mathbb{R}^n}),$$

であり　写像 ρ により $T^*(\mathsf{A}^\natural_{\mathbb{R}^n})$ は $T^*(\bar{\mathfrak{a}}_{\mathbb{R}^n})$ の中に同型に移される。よって $\mathfrak{G}$ を $GL(n, \mathbb{R}^n)$ の部分群とし $G^\natural_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{G})$ などを $\cup_{T\in\mathfrak{G}} T^*(G^\natural_{\mathbb{R}^n})$ から生成された群などとすれば

$$0 \to G^\natural_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{G}) \xrightarrow{\rho} \bar{\mathsf{A}}^\natural_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{G}),$$

が完全列になる。また $\mathfrak{G}$ が自己共役な群で M が平坦で接バンドルの構造群が $\mathfrak{G}$ であれば $\mathrm{T}M \oplus \mathrm{T}^*M$ にアソシエートした $\bar{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}^n}$ をファイバーとするバンドルが構成できる。

2　$G_{\mathbb{R}}$ と $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ の構造

定義 1。H を $\dfrac{f(s)}{\Gamma(1+s)}$ が $s \to \pm\infty$ で急減少となる関数の空間とし

$$\mathsf{H}_{a_1,\ldots,a_m} = \{f \in \mathsf{H}|f(a_i - n) = 0, n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq m\} \tag{2.1}$$

とする。

定義から $S_1 = \{a_1, \ldots, a_j\}$, $S_2 = \{b_1, \ldots, b_k\}$ とすれば

$$\mathsf{H}_{S_1} \cap \mathsf{H}_{S_2} = \mathsf{H}_{S_1 \cup S_2} \tag{2.2}$$

である。

$G_{\mathbb{R}}$ と $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ の構造は次の二つの補題からしたがう。

補題 1。$f \in \mathsf{H}_a$ であれば

$$x^a \mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{R}[\frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+s-a)} \tau_{-a} f(s)](x) \tag{2.3}$$

である。

系 $E_\ell = x^a \dfrac{d^a}{dx^a}$ を分数冪（左）オイラー微分とすれば $f \in \mathsf{H}_a$ のとき

$$E_\ell \mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{R}[\frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+s-a)} f(s)](x) \tag{2.4}$$

である。なお（右）オイラー微分 $E_r = \dfrac{d^a}{dx^a} \cdot x^a$ では

$$E_r \mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{R}[\frac{\Gamma(1+s+a)}{\Gamma(1+s)} f(s)](x)$$

となる。

補題 2。$f \in \mathsf{H}_0$ であれば

$$\log x \mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{R}[(\Psi(1+s) - \frac{d}{ds}) f(s)](x) \tag{2.5}$$

である。

補題 1 は直接計算、補題 2 は補題 1 と $\log x = \dfrac{\partial}{\partial_a} x^a|_{a=0}$ から導かれる。

なお $\Psi(s) = \dfrac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}$ の次の性質も使う。

1. $a_1,\ldots,a_m$ があい異なる実数であれば $\Psi(s+a_1),\ldots,$ $\Psi(s+a_m)$ は ($\mathbb{C}$ 上) 一次独立である。

2. $\Psi(1+s),\Psi'(1+s),\Psi^{(2)}(1+s),\ldots$ は ($\mathbb{C}$ 上) 一次独立である。

$\Psi(1+s+a)$ は $|s|<1,\ |a|<1-|s|$ のとき

$$\Psi(1+s+a)=\Psi(1+s)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\Psi^{(n)}(1+s) \tag{2.6}$$

と展開される。Ψ は全平面で一価有利型だから形式的に (7) の右辺で左辺を表しても混乱は起きない。

(4) から $f(s)\in\mathsf{A}_{\mathbb{R}}$ なら

$$f(s)=\frac{\Gamma(1+s)^{n_1+\cdots+n_k}}{(\Gamma(1+s+a_1))^{n_1}\cdots(\Gamma(1+s+a_k))^{n_k}} \tag{2.7}$$

である。よって $\vartheta f(s)$ の形式的テーラー展開は
$\sum_{n=1}^{\infty}c_n\Psi^{(n)}(1+s)$ の形になり $\vartheta f\in\bar{\mathfrak{a}}_1$ となる。

注意。$G_{\mathbb{R}}$ の忠実な表現加群は知られていない。しかし $K=(k_1,\ldots,k_m)$、$S=(a_1,\ldots,a_m)$ とし $f\in\mathsf{H}$ かつ $f(s)$ は a_i-n で k_i 位か其れ以上の位数の零点を持つような f の加群を $\mathsf{H}_{S;K}$ とすれば有限個の $g_1,\ldots,g_m\in G_{\mathbb{R}}$ の積については $\mathsf{A}_{S;K}$ を使って「忠実」に表現できる。いっぽう $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ は $\mathsf{H}_{0;\infty}=\cap_{n\geq1}\mathsf{H}_{0;n}$ で表現できる。

これらの観察から $\mathsf{A}_{\mathbb{R}}$ に $\Gamma(1+s)$ を添加した群 $\mathsf{A}_{\mathbb{R}}^{\natural}$ がより自然な群と推測される。$\mathsf{A}_{\mathbb{R}}^{\natural}$ は $\{\Gamma(1+s+a)|a\in\mathbb{R}\}$ から乗法で生成された自由アーベル群である。$\mathcal{R}$ で変換しなければ $\mathsf{A}_{\mathbb{R}}$ は分数冪オイラー微分から生成される群、$\mathsf{A}_{\mathbb{R}}^{\natural}$ はそれにボレル変換 $\mathcal{B}$ を添加した群である。しかし $\mathcal{B}$ を自然に導入することは問題として残っている。

ϑ で $\bar{\mathfrak{a}}$ に同相にうつるよう $\mathsf{A}_{\mathbb{R}}^{\natural}$ を拡大することが出来れば　その元は形式的に無限積

$$\prod_{i=1}^{\infty}(\Gamma(1+s+a_i))^{\nu_i},\ \text{or}\ \prod_{i=1}^{n}(E_{\ell}^{a_i})^{\nu_i}$$

だから　これらの無限積に意味があるかが問題になる。

なお分数冪オイラー微分の冪は

$$(E_{\ell}^{a})^{\nu}x^c=(\frac{\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+c-a)})^{\nu}x^c$$

であたえられる。形式的無限積 $\prod_{i=1}^{\infty}(E_{\ell}^{a_i})^{\nu_i}$ については

$$(\prod_{i=1}^{\infty}(E_{\ell}^{a_i})^{\nu_i})x^c=(\prod_{i=1}^{\infty}(\frac{\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+c-a_i)})^{\nu_i})x^c$$

である。従って分数冪オイラー微分の冪の無限積
$\prod_{i=1}^{\infty}(E_{\ell}^{a_i})^{\nu_i}$ は $\prod_{i=1}^{\infty}(\frac{\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+c-a)})^{\nu_i}$ がある c で収束するときには意味がある。なおこの分子は $\sum_{i=1}^{\infty}\nu_i$ が収束しなければ意味がないから $\prod_{i=1}^{\infty}(E_{\ell}^{a_i})^{\nu_i}$ が意味を持つには $\sum_i\nu_i$ が収束することが必要である。

3　$\prod_{i=1}^{\infty}(\Gamma(1+s+a_i))^{\nu_i}$ の計算

この節では a_i は実数とし　$a_i=n_i+\beta_i$、$-\frac{1}{2}<\beta_i\leq\frac{1}{2}$ とする。ただし n_i は整数である。

$$\Gamma(1+s+a_i)=(s+a_i)\Gamma(1+s+(a_i-1))$$
$$=(s+a_i)(s+a_i-1)\Gamma(1+s+(a_i-2))=\cdots$$

だから

$$\begin{aligned}&\Gamma(1+s+a_i)\\&=\prod_{j=0}^{n_i}(1+s+(a_i-j))\Gamma(1+s+\beta_i),\quad n_i>0,\end{aligned}\tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}&\Gamma(1+s+a_i)\\&=(\prod_{j=1}^{n_i}(1+s+(a_i+j)))^{-1}\Gamma(1+s+\beta_i),\quad n_i<0\end{aligned}\tag{3.2}$$

である。(9) から $0\leq a_1\leq a_2\leq\cdots$ 　であれば

$$\begin{aligned}&\prod_{i=1}^{\infty}(\Gamma(1+s+a_i))^{\nu_i}\\&=\prod_{i=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{n_i}(1+s+(a_i-j))^{\nu_i}(\Gamma(1+s+\beta_i))^{\nu_i}\end{aligned}$$

となる。$a_i=n_i+\beta_i$ だから $1+s+(a_i-j))=1+s+\beta_i+(n_i-j)$ である。よって

$$(1+s+(a_i-j))^{\nu_i}=(1+n_i-j)^{\nu_i}(1+\frac{s+\beta_i}{1+n_i-j})^{\nu_i}$$

と書ける。これから

$$\begin{aligned}&\prod_{i=1}^{\infty}(\Gamma(1+s+a_i))^{\nu_i}\\&=\prod_{i=1}^{\infty}(\prod_{j=0}^{n_i}(1+n_i-j)^{\nu_i}(1+\frac{s+\beta_i}{1+n_i-j})^{\nu_i})(\Gamma(1+s+\beta_i))^{\nu_i}\end{aligned}$$

となる。ここで両辺の対数を取れば

$$\begin{aligned}&\log(\prod_{i=1}^{\infty}(\Gamma(1+s+a_i))^{\nu_i})\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n_i}\nu_i(\log(1+n_i-j)+\log(1+\frac{s+\beta_i}{1+n_i-j}))+\\&+\sum_{i=0}^{\infty}\nu_i\log(\Gamma(1+s+\beta_i))\end{aligned}$$

である。$|\beta_i|\leq\frac{1}{2}$ だから $|s|<\frac{1}{2}$ であれば $|\log(1+\frac{s+\beta_i}{1+n_i-j})|\leq\log 2$ であり s が固定されれば $|1+s+\beta_i|>\epsilon>0$ と取れるから

$$|\log\Gamma(1+s+\beta_i)|\leq\max_{\epsilon<s<2}|\log(\Gamma(s))|$$

と一様有界になる。これと不等式

$$\sum_{j=0}^{n_i}|\nu_i||\log(1+n_i-j)|\leq|\nu_i|(n_i+1)\log(n_i+1)$$

から　「はじめに」に書いた命題が成立する。

注意。$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n_i}\nu_i\log(1+\frac{s+\beta_i}{1+n_i-j})$ は

$$\sum_{i=0}^{\infty}|\nu_i|n_i<\infty$$

であれば収束する。また $\sum_{i=0}^{\infty}\nu_i\log(\Gamma(1+s+\beta_i))$ は

$$\sum_{i=0}^{\infty}|\nu_i|<\infty$$

であれば収束する。

s の範囲は $s+\beta_i$ が負の整数を含まない有界領域にふくまれれば条件

$$\sum_{i=0}^{\infty}|\nu_i|(n_i+1)\log(n_i+1)<\infty \tag{3.3}$$

をみたせば収束する。特に s が $-\frac{1}{2}$ より小さい負の実数でなければ無限積 $\prod_{i=1}^{\infty}(\Gamma(1+s+a_i)^{\nu_i})$ は収束するから

命題 1。$f\in \mathsf{H}$ かつ $f(s)=0, s\le -\frac{1}{2}$ であり　さらに $s\to\infty$ で充分急速に減少すれば条件 (11) が満たされるとき $\prod_{i=1}^{\infty}(E_\ell^{a_i})^{\nu_i}\mathcal{R}[f]$ が定義できる。

問題。分数幂オイラー微分の分数幂やその無限積が現れる意味のある例があるか？

またこれらの例は $\mathfrak{a}_0$ のノルムとして $\Psi(1+s),\Psi'(1+s),\ldots$ で張られた ℓ^1 空間のノルムを入れるのが便利なことを示唆している。この場合

$$\|\sum_n\frac{a^n}{n!}\Psi^{(n)}(1+s)\|=\sum_n\frac{|a|^n}{n!}=e^{|a|}$$

だから写像 ϑ が定義できる。

4　離散デルタポテンシャルの群と $\mathsf{A}_{\mathbb{R}}^{\natural}$

X を可微分多様体 δ_a を a に台をもつデルタ関数;　$\int_X\delta_a f(x)dx=f(a)$　とする。加法により $\delta_a; a\in X$ で生成される自由アーベル群を $\mathsf{D}_{X;\mathbb{Z}}$ とする。[4],[7] などはこの群と物理との関係を示唆している。

特に $\mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{Z}}$ は対応 $\delta_a\to\Gamma(1+s+a)$ により $\mathsf{A}_{\mathbb{R}}^{\natural}$ と同型である。しかしこの対応は実質的な感じがない。以下では別の形で同型対応をつくる。

$\mathbb{R}$ のディラック関数を $\delta=\delta_0$, $\delta_c=\delta(x-c)$ とする。以下では 2 変数関数 $f(x,s)$ に対し $\delta_c f(x,t)=f(x,c)$ とする。この約束に従えば $T=\sum_k n_k\delta_{a_k}\in\mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{Z}}$ のとき

$$\int_0^s\Psi(1+x+t)dt=\log(\Gamma(1+x+s))-\log(\Gamma(1+x)),$$
$$\int_{-x}^s\Psi(1+x+t)dt=\log(\Gamma(1+x+s)-\log(\Gamma(1)),$$

だから

$$\exp(T\int_0^s\Psi(1+x+t)dt)=\prod_k(\frac{\Gamma(1+x+a_k)}{\Gamma(1+x)})^{n_k}, \tag{4.1}$$
$$\exp(T\int_{-x}^s\Psi(1+x+t)dt)=\prod_k(\Gamma(1+x+a_k))^{n_k} \tag{4.2}$$

となる。ただし積分は s を変数とする不定積分で s の動く範囲はは十分大きい ; $s>\max_k\{n_k\}$; とする。

定義２。$\mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{Z}}$ から $\mathsf{A}^{\natural}_{\mathbb{R}}$ への写像 $\mu_{0;\Psi}$ と $\mu_{-x,\Psi}$ を

$$\mu_{0;\Psi}T = \exp(T\int_0^s \Psi(1+x+t)dt), \tag{4.3}$$

$$\mu_{-x;\Psi}T = \exp(T\int_{-x}^s \Psi(1+x+t)dt) \tag{4.4}$$

で定義する。

定義と (12),(13) から

1. $\mu_{0;\Psi}$ は $\mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{Z}}$ から $\mathsf{A}_{\mathbb{R}}$ の上への準同型写像で $\ker\mu_{0;\Psi} = \{n\delta | n \in \mathbb{Z}\}$ である;

$$0 \to \mathbb{Z}\delta \to \mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{Z}} \xrightarrow{\mu_{0;\Psi}} \mathsf{A}_{\mathbb{R}} \to 0,$$

   は完全列である。

2. $\mu_{-x;\Psi}$ は $\mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{Z}}$ から $\mathsf{A}^{\natural}_{\mathbb{R}}$ への同型写像である；

$$\mu_{-x;\Psi} : \mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{Z}} \cong \mathsf{A}^{\natural}_{\mathbb{R}}.$$

$\mathsf{D}_{X;\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$ を $\mathsf{D}_{X;\mathbb{C}}$ と書く。$\mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{C}}$ に適当なノルムを入れそれによる完備化を $\bar{\mathsf{D}}_{\mathbb{R};\mathbb{C}}$ とかく。定義から $T \in \bar{\mathsf{D}}_{\mathbb{R};\mathbb{C}}$ なら形式的に

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i \delta_{a_i}$$

と書ける。$T_n = \sum_{i=1}^{n} \nu_i \delta_{a_i}$ とすれば

$$\mu_{-x;\Psi}T_n = \prod_{i=1}^{n} (\Gamma(1+s+a_i))^{\nu_i}$$

だから

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} (\Gamma(1+s+a_i))^{\nu_i} (= \prod_{i=1}^{\infty} (\Gamma(1+s+a_i))^{\nu_i})$$

が存在すれば

$$\mu_{-x;\Psi}T = \lim_{n\to\infty} \mu_{-x;\Psi}T_n (= \prod_{i=1}^{\infty} (\Gamma(1+s+a_i))^{\nu_i}) \tag{4.5}$$

で $\mu_{-x;\Psi}T$ を定義する。

なお $\mu_{0;\Psi}T$ も $\sum_{i=1}^{\infty} \nu_i$ が存在することを仮定して

$$\mu_{0;\Psi}T = \frac{\prod_{i=1}^{\infty} (\Gamma(1+s+a_i))^{\nu_i}}{\Gamma(1+s)^{\sum_{i=1}^{\infty} \nu_i}} \tag{4.6}$$

で定義できる。定義から $\ker\mu_{0;\Psi} = \mathbb{C}\delta$ である。

$\mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{Z}}$ にも τ_a が働く:$\tau_a \delta_c = \delta_{c-a}$. よって $\mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{Z}}$ の $\{\tau_a | a \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}$ による拡大が定義できる。それは $G^{\natural}_{\mathbb{R}}$ と同型な群である。

注意。ここでの議論では　$\Psi(1+s)$ の次の性質しか使っていない:

1. $\Psi(1+s)$ は原点で正則で全平面で 1 価有利型である。

2. $\Psi(1+s), \Psi'(1+s), \Psi^{(2)}(1+s), \ldots$ は 1 次独立である。

$\Psi(1+s)$ 以外でこの条件を満たす関数を用いて意味のある写像が作れるかは問題である。

5 $\mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{Z}}$ の拡大と $\mathsf{A}^{\natural}_{\mathbb{R}}$ の完備化

$\mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{Z}}\otimes\mathbb{C}=\mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{C}}$ とする。$\mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{C}}$ の拡大として $\mathbf{c}=(c_1,c_2,\ldots)$ としてベクトル空間

$$\mathsf{D}_{\mathbb{R};\ell^1}=\{\sum_i c_i\delta_{a_i}|\|\mathbf{c}\|=\sum_i|c_i|<\infty\}, \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{D}_{\mathbb{R}:\ell^1_{\mathrm{loc}}}=\{&\sum_i c_i\delta_i|\|\mathbf{c}\|<\infty,\\ &\{a_1,a_2,\ldots\}\text{ is a bounded set}\}\end{aligned} \tag{5.2}$$

を考える。

補題３。$C(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上の連続関数全体に広義一様収束で位相をいれた空間、$C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R})$ を R 上の有界連続関数全体に $\|f\|=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$ でノルムを入れたバナハ空間とする。この時

$$\mathsf{D}_{\mathbb{R};\ell^1}\subset C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R})^{\dagger},\quad \mathsf{D}_{\mathbb{R},\ell^1_{\mathrm{loc}}}\subset C(\mathbb{R})^{\dagger}, \tag{5.3}$$

である。

証明。$f\in C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R})$, $T=\sum_i c_i\delta_{a_i}$ とすれば形式的に $Tf=\sum_i c_if(a_i)$ だが $f\in C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R})$ だから $|f(x)|\le M$ となる M が存在する。よって

$$|\sum_i c_if(a_i)|\le\sum_i|c_i||f(a_i)|\le\sum_i|c_i|M=\|\mathbf{c}\|M,$$

となる。さらに $\|f-g\|\le\epsilon$ なら $|Tf-Tg|\le\|\mathbf{c}\|\epsilon$ だから $T\in\mathsf{D}_{\mathbb{R}:\ell^1}$ である。

$T=\sum_i c_i\delta_{a_i}\in\mathsf{D}_{\mathbb{R};\ell^1_{\mathrm{loc}}}$ であれば $|a_i|\le M$ となる M が存在する。$f\in C(\mathbb{R})$ であれば $|f(x)|\le N, |x|\le M$ となる N が存在するから

$$|Tf|=|\sum_i c_if(a_i)|\le\|\mathbf{c}\|N,$$

となって $T\in C(\mathbb{R})^{\dagger}$ がえられる。よって補題が成立する。

注意。このように問題に応じて広い意味での「超関数」が意味を持ったり適切な性質をもつ関数空間を設定することは数学や物理で良く行われている（たとえば [6])。

$T=\sum_{i=1}^{\infty}c_i\delta_{a_i}$ のとき $T_n=\sum_{i=1}^{n}c_i\delta_{a_i}$ とし (16) に同様に $\mu_{-x,\Psi}T$, $\mu_{0,\Psi}T$ を定義する；

$$\mu_{-x,\Psi}T=\lim_{n\to\infty}\mu_{-x;\Psi}T_n,\quad \mu_{0,\Psi}T=\lim_{n\to\infty}\mu_{0;\Psi}T_n.$$

$\mathsf{D}_{\mathbb{R};\ell^1}$, $\mu_{-x;\Psi}$ などをつかって群

$$\mathsf{A}^{\natural}_{\mathbb{R};\ell^1}=\mu_{-x;\Psi}\mathsf{D}_{\mathbb{R};\ell^1},\quad \mathsf{A}^{\natural}_{\mathbb{R};\ell^1_{\mathrm{loc}}}=\mu_{-x;\Psi}\mathsf{D}_{\mathbb{R}:\ell^1_{\mathrm{loc}}}$$

を定義する。定義から $f(s)\in\mathsf{A}^{\natural}_{\mathbb{R};\ell^1}$ であれば $f(s)=\prod_{i=1}^{\infty}(\Gamma(1+s+a_i))^{c_i}$, $\|\mathbf{c}\|=\sum_{i=1}^{\infty}|c_i|<\infty$ であり，$f(s)\in\mathsf{A}^{\natural}_{\mathbb{R};\ell^1_{\mathrm{loc}}}$ であれば　さらに $|a_i|\le N, i=1,2,\ldots$ となる $N>0$ が存在する。

補題４。写像 $\vartheta:\mathsf{A}^{\natural}_{\mathbb{R}:\ell^1_{\mathrm{loc}}}\to\bar{\mathfrak{a}}$ が定義できる。

証明。形式的には

$$\vartheta(\prod_{i=1}^{\infty}(\Gamma(1+s+a_i))^{c_i})=\sum_{i=1}^{\infty}c_i\Psi(1+s+a_i)$$

となる。$\bar{\mathfrak{a}}$ では $\Psi(1+s+a_i)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(a_i)^n}{n!}\Psi^{(n)}(1+s)$ だから $\bar{\mathfrak{a}}$ の元としては

$$\begin{aligned}\vartheta(\prod_{i=1}^{\infty}(\Gamma(1+s+a_i))^{c_i} &= \sum_{i=1}^{\infty}c_i(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_i)^n}{n!}\Psi^{(n)}(1+s)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\sum_{i=1}^{\infty}c_i(a_i)^n)\Psi^{(n)}(1+s)\end{aligned}$$

である。ここで $|a_i|\le N$ をつかうと

$$|\sum_{i=1}^{\infty}c_i(a_i)^n|\le\sum_i|c_i|N^n\le\|\mathbf{c}\|N^n,$$

となる。よって $f(s)=\prod_{i=1}^{\infty}(\Gamma(1+s+a_i))^{c_i}\in\mathsf{A}^{\natural}_{\mathbb{R};\ell^1_{\mathrm{loc}}}$ とすれば ϑf の $\bar{\mathfrak{a}}$ での基底 $\Psi^{(n)}(1+s)$ による展開を $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{b_n}{n!}\Psi^{(n)}(1+s)$ とすれば $|b_n|\le\{\mathbf{c}\|N^n$ である。よって $\vartheta f\in\bar{\mathfrak{a}}$ となって 補題が成立する。

補題 3 は $\mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{Z}}$ の拡大に入れる位相としては ℓ^1 型が適切なことを改めて示唆している。従って $\mathfrak{a}^{\natural}$ に入れる位相も ℓ^1 型が適切なことが推測される（§3 参照)。しかし次節で述べるように ℓ^2 型を含む $\ell^p,p>1$ 位相も意味があるようである。

注意。$\mathfrak{a}$ に ℓ^2 型の位相を入れれば核関数 $\sum_n\lambda_n\Psi^{(n)}(1+s)\Psi^{(n)}(1+t)$ が $(s,t)=(0,0)$ の近傍で収束するには

$$\lambda_n=\frac{\rho^n}{(n!)^2},\quad|\rho|<1,$$

と取るのが良い。この場合

$$e_n(s)=\frac{\rho^n}{n!}\Psi^{(n)}(1+s),\ n=0,1,2,\ldots,$$

を正規直交規定にとるのが適切だがそうすると $\|\Psi^{(n)}(1+s)\|=\dfrac{n!}{|\rho|^n}$ となるから $\sum_n\dfrac{a^n}{n!}\Psi(1+s)$ は $|a|<|\rho|$ の時に限り収束するので写像 $\vartheta:\mathsf{A}^{\natural}_{\mathbb{R};\ell^1_{\mathrm{loc}}}\to\bar{\mathfrak{a}}$ は $\mathsf{A}^{\natural}_{\mathbb{R};\ell^1_{\mathrm{loc}}}$ の一部でしか定義できない。

6 $\ell^p,p>1$ 型位相

定義 3。$C^1(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上の C^1-級関数の全体に広義 C^1-収束；$\lim_{n\to\infty}f_n=f,\lim_{n\to\infty}f'_n=f'$，収束はともに $\mathbb{R}$ で広義一様、の時 $f_n\to f,$ で位相を入れた空間 $C^1_0(\mathbb{R})=\{f\in c\ 1(\mathbb{R}),f(0)=0\}$ とする。

補題 5。$f(x)\in C^1_0(\mathbb{R})$ であれば $\sum_n|a_n|^p<\infty,\ p\ge1$ のとき $\sum_n|f(a_n)|^p<\infty$ である。

証明 $f(x)\in C^1_0(\mathbb{R})$ であれば ϵ が十分小さければ $M>0$ があって

$$|f(x)|\le M|x|,\quad|x|<\epsilon. \tag{6.1}$$

となる。$\sum_n|a_n|^p<\infty$ だから $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ である。よってある N があって $n>N$ なら $|a_n|<\epsilon$ となる。この事と (21) から、

$$\mathbf{a}=(a_1,a_2,\ldots),\quad\|\mathbf{a}\|_p=(\sum_n|a_n|^p)^{1/p}$$

として

$$
\begin{aligned}
&\sum_n |f(a_n)|^p = \sum_{n=1}^N |f(a_n)|^p + \sum_{n>N} |f(a_n)|^p \\
&\le \sum_{n=1}^N |f(a_n)|^p + \sum_{n>N} M^p |a_n|^p \le \sum_{n=1}^N |f(a_n)|^p + M^p(\sum_N |a_n|^p) \\
&\le \sum_{n=1}^N |f(a_n)|^p + M^p(\|\mathbf{a}\|)^p < \infty
\end{aligned}
$$

となって補題が成立する。

命題２。$T = \sum_n c_n \delta_{a_n}$ とする。$p > 1$, $\sum_n |c_n|^p < \infty$, $\sum_n |a_n|^q < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ であれば $T \in C_0^1(\mathbb{R})^\dagger$ である。

証明。$\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots), \mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots)$, $f(\mathbf{a}) = (f(a_1), f(a_2), \ldots)$ とすれば　仮定と補題５から $\mathbf{c} \in \ell^p(\mathbb{N})$, $f(\mathbf{a}) \in \ell^q(\mathbb{N})$ である。よって $\ell^p(\mathbb{N})$ と $\ell^q(\mathbb{N})$ の元のペアリングを $\langle \cdot, \cdot \rangle$ とすれば

$$
Tf(x) = \langle \mathbf{c}, f(\mathbf{a}) \rangle
$$

となって命題が成立する。

命題２から

$$
\mathsf{D}_{\mathbb{R};\ell^p} = \{\sum_i c_i \delta_{a_i} | \sum_i |c_i|^p < \infty,\ \sum_i |a_i|^q < \infty\} \tag{6.2}
$$

とすれば

$$
\mathsf{D}_{\mathbb{R};\ell^p} \subset C_0^1(\mathbb{R})^\dagger \tag{6.3}
$$

である。

$p \ne 2$ なら $p \ne q$ だから $\mathsf{D}_{\mathbb{R};\ell^p}$ の記号は便宜的だが $p = 2$ であればそういう問題はない。

注意。$\sum_i |a_i|^p < \infty$ なら $b \ne 0$ のとき $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n |a_i + b|^p = \infty$ だから τ_b は $\mathsf{D}_{\mathbb{R};\ell^p}$ には働かない。

$\mathsf{D}_{\mathbb{R};\ell^p}$ をつかって

$$
\mathsf{A}^\natural_{\mathbb{R};\ell^p} = \mu_{-x;\Psi} \mathsf{D}_{\mathbb{R};\ell^p}
$$

を定義する。$\tau_a, a \ne 0$ は $\mathsf{A}^\natural_{\mathbb{R}:\ell^p}$ に働かないから $\mathsf{A}^\natural_{\mathbb{R};\ell^p}$ の $\mathbb{R} = \{\tau_a | a \in \mathbb{R}\}$ による拡大は定義できない（$G^\natural_{\mathbb{R};\ell^p}$ は定義できない)。

命題３。写像 $\vartheta : \mathsf{A}^\natural_{\mathbb{R};\ell^2} \to \bar{\mathfrak{a}}$ が定義できる。

証明。$f(s) \in \mathsf{A}^\natural_{\mathbb{R};\ell^2}$ であれば　形式的に

$$
f(s) = \prod_{i=1}^\infty \Gamma(1 + s + a_i)^{c_i},
$$

$\sum_i |a_i|^2 < \infty$,$\sum_i |c_i|^2 < \infty$ である。よって形式的には $\bar{\mathfrak{a}}$ の「元」としては

$$
\begin{aligned}
\vartheta f(s) &= \sum_{i=1}^\infty c_i \Psi(1 + s + a_i) = \sum_{i=1}^\infty c_i (\sum_{n=0}^\infty \frac{a_i^n}{n!} \Psi^{(n)}(1 + s)) \\
&= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} (\sum_{i=1}^\infty c_i a_i^n) \Psi^{(n)}(1 + s)
\end{aligned}
$$

となる。以下 $\mathbf{a}^n = (a_1^n, a_2^n, \ldots)$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots)$, $M = \sup_i\{|a_1|, |a_2|, \ldots\}$, $\mathbf{a} = M\mathbf{b}$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots), b_i = \dfrac{a_i}{M}$ と書く。

$\|\mathbf{a}\|_q = M\|\mathbf{b}\|_q$ だから $\|\mathbf{b}\|_q < \infty$ であり $|b_i| \le 1, i = 1, 2, \ldots$ だから $\|\mathbf{b}^n\|_q \le \|\mathbf{b}\|_q$, $\mathbf{b}^n = (b_1^n, b_2^n, \ldots,$ だから

$$\|\mathbf{a}^n\|_q \le M^n\|\mathbf{b}^n\|_q \le M^{n-1}\|\mathbf{a}\|_q$$

となる。よってヘルダーの不等式 ([8]) から

$$\begin{aligned}|\sum_{i=1}^{\infty} c_i a_i^n| = |\langle \mathbf{c}, \mathbf{a}^n\rangle| &\le \|\mathbf{c}\|_p \|\mathbf{a}^n\|_q \\ &\le M^n \|\mathbf{c}\|_p \|\mathbf{a}\|_q\end{aligned}$$

である。従って $\vartheta f(s)$ は $\bar{\mathfrak{a}}$ の元として収束する。よって命題が成立する。

この命題では $\mathfrak{a}$ の位相については $\sum_{n=0}^{\infty} C_n \Psi^{(n)}(1+s)$ が $|C_n| \le M\dfrac{L^n}{n!}$ であれば収束する事しか要求していない。この要求を満たす内積、たとえば

$$(\Psi^{(n)}(1+s), \Psi^{(m)}(1+s)) = \delta_{n,m} K_n. \quad |K_n| \le n!^{1-\epsilon}$$

が自然に $\mathfrak{a}$ に定義できるかは問題である。

注意。数列 $c_1, c_2, \ldots$ が有界で $a_1, a_2, \ldots$ が $\sum_i |a_i| < \infty$ であれば $T = \sum_i c_i T_{a_i}$ から出発して同じ議論（結論）がえられる。この場合も T は $C_0^1(\mathbb{R})$ に働くので T を利用して $G_{\mathbb{R}}^{\natural}$ 等の「完備化」は得られない。

7 多変数の場合

変換 $\mathcal{R}$ の $\mathbb{R}^n$ への拡張 $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\mathbf{X}}$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ は

$$\mathcal{R}_{\mathbf{x}}[f(\mathbf{s})](\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i^{s_i}}{\Gamma(1+s_i)} f(\mathbf{s})\ d\mathbf{s},$$

$\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$, $d\mathbf{s} = ds_1 \cdots ds_n$、だから

$$\mathcal{R}_{x_i}[f(\mathbf{s})](\mathbf{x}) = \int_{s_i=-\infty}^{s_i=\infty} \frac{x_i^{s_i}}{\Gamma(1+s_i)} f(\mathbf{s}) ds_i$$

とすれば

$$\mathcal{R}_{\mathbf{x}} = \mathcal{R}_{x_i} \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{x_n} \tag{7.1}$$

である。$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$、$\dfrac{\partial^{\mathbf{a}}}{\partial x^{\mathbf{a}}} = \dfrac{\partial^{a_1}}{\partial x_1^{a_1}} \cdots \dfrac{\partial^{a_n}}{\partial x_n^{a_n}}$ とすれば f が適当な条件を満たせば

$$\frac{\partial^{\mathbf{a}}}{\partial x^{\mathbf{a}}} \mathcal{R}_{\mathbf{x}}[f(\mathbf{s})](\mathbf{x}) = \mathcal{R}[\tau_{\mathbf{a}} f(\mathbf{s})](\mathbf{x}),$$

$\tau_{\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{a})$, である。

$\mathcal{N}_{\mathbf{x}}$ 等を同様に定義すれば

$$\mathcal{R}_{\mathbf{x}} = \mathcal{B}_{\mathbf{x}} \circ \mathcal{N}_{\mathbf{x}}, \tag{7.2}$$

$$\mathcal{R}_{\mathbf{x}} = (\mathcal{B}_{x_1} \circ \mathcal{N}_{x_1}) \circ \cdots \circ (\mathcal{B}_{x_n} \circ \mathcal{N}_{x_n}) \tag{7.3}$$

である。これらから $\{\dfrac{\partial^{a_1}}{\partial x_1^{a_1}}, \ldots, \dfrac{\partial^{a_n}}{\partial x_n^{a_n}} | (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n\}$ と $\{x_1^{a_1}, \ldots, x_n^{a_n} | (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n\}$ で生成される群 $G_{\mathbb{R}^n}$ は $\{\dfrac{\Gamma(1+s_1)}{\Gamma(1+s_1-a_1)}, \ldots, \dfrac{\Gamma(1+s_n)}{\Gamma(1+s_n-a_n)}|$

$(a_1,\dots,a_n)\in\overbrace{\mathbb{R}^\times\times\cdots\times\mathbb{R}^\times}^{n}\}$, $\mathbb{R}^\times=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, から乗法で生成される群 $\mathsf{A}_{\mathbb{R}^n}$ を $\{\tau_{\mathbf{a}}\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n\}\cong\mathbb{R}^n$ で拡大した群と同型である。$\mathcal{R}_{\mathbf{x}}$ で変換しなければ $\mathsf{A}_{\mathbb{R}^n}$ は

$$E^a_{i:\,\ell}=x_i^a\frac{\partial^a}{\partial x_i^a}$$

として $\{E^{a_1}_{1:\ell},\dots,E^{a_n}_{n;\ell}|(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n\}$ から生成された群である。

$\mathsf{A}^\natural_{\mathbb{R}}$ の多変数化 $\mathsf{A}^\natural_{\mathbb{R}^n}$ は $\{\Gamma(1+s_i+a_i)|1\le i\le n,(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n\}$ から乗法で生成された自由アーベル群と同型であり $\mathcal{R}_{\mathbf{x}}$ を経由しなければ　これは $\mathsf{A}_{\mathbb{R}^n}$ に $\mathcal{B}_{x_1},\dots,\mathcal{B}_{x_n}$ を添加した群である。定義から

補題６。$f(\mathbf{s})\in\mathsf{A}^\natural_{\mathbb{R}^n}$ であれば

$$f(\mathbf{s})=f_1(s_1)\cdots f_n(s_n)$$

と変数分離される。とくに総ての s について $f(\mathbf{s})\neq 0$ であれば $\rho f=\rho_\ell f=f^{-1}df$ として

$$\rho f(\mathbf{s})=\sum_{i=1}^n f_i(s_i)^{-1}\frac{df_i(s_i)}{ds_i}ds_i \tag{7.4}$$

である。

一方 $\log(\dfrac{\partial}{\partial x_1}),\dots,\log(\dfrac{\partial}{\partial x_n})$ と $\log x_1,\dots,\log x_n$ で生成されたリー環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n}$ は $\dfrac{\partial}{\partial x_1},\dots,\dfrac{\partial}{\partial x_n}$ と $\Psi(1+s_1),\dots,\Psi(1+s_n)$ から生成されたリー環と同型である。しかし補題３から $\mathsf{A}^\natural_{\mathbb{R}^n}$ からの写像を得るためには $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n}$ の生成元としては $\Psi(1+s_i)$ でなく $\Psi(1+s_i)ds_i$ を取らなければいけない。この場合でも

$$\begin{aligned}&\Psi(1+s_i)ds_i,\Psi(1+s_j)ds_j]\\=&\Psi(1+s_i)\Psi(1+s_j)ds_i\wedge ds_j-\\&-(-1)^{1\times1}\Psi(1+s_j)\Psi(1+s_i)ds_j\wedge ds_i=0\end{aligned}$$

だからリー環の構造は変わらない。以下では $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n}$ は $\Psi(1+s_i)ds_i, 1\le i\le n$ で生成されたものとする。

生成元をこう取り替えれば $\rho:\mathsf{A}^\natural_{\mathbb{R}^n}\to\bar{\mathfrak{a}}_{\mathbb{R}^n}$ が中への同型になる：

$$0\to\mathsf{A}^\natural_{\mathbb{R}^n}\xrightarrow{\rho}\bar{\mathfrak{a}}_{\mathbb{R}^n}$$

が完全列になる。

この生成元の取り替えは $\rho:\mathsf{A}^\natural_{\mathbb{R}^n}\to\bar{\mathfrak{a}}_{\mathbb{R}^n}$ が定義されるための便宜的なものに見える。実質的な意味を探るのは課題である。しかし ρ は非アーベル　ド・ラム理論で重要なので $\mathsf{A}^\natural_{\mathbb{R}^n}$ や $\bar{\mathfrak{a}}_{\mathbb{R}^n}$ 等が非アーベル　ド・ラム理論 ([1],[2]) と関係していることを示唆しているのかもしれない。

写像 $\mu_{0;\Psi},\mu_{-x,\Psi}$ の高次元化として自由アーベル群 $\mathsf{D}_{\mathbb{R}^n;\mathbb{Z}}$ から $\mathsf{A}_{\mathbb{R}^n}$、$\mathsf{A}^\natural_{\mathbb{R}^n}$ への写像 $\mu_{\mathbf{0};\Psi},\mu_{-\mathbf{x};\Psi}$ は

$$\mu_{\mathbf{0};\Psi}T=\exp(T\sum_{i=1}^n\int_0^{s_i}\Psi(1+x_i+t_i)dt_i), \tag{7.5}$$

$$\mu_{-\mathbf{x};\Psi}T=\exp(T\sum_{i=1}^n\int_{-x_i}^{s_i}\Psi(1+x_i+t_i)dt_i) \tag{7.6}$$

で定義できる。特に $\mu_{-\mathbf{x};\Psi}:\mathsf{D}_{\mathbb{R}^n;\mathbb{Z}}\cong\mathsf{A}^\natural_{\mathbb{R}^n}$ である。$\mathsf{D}_{\mathbb{R}^n;\mathbb{C}}$ の完備化やそれに関連した $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}^n}$ の位相に関する５節・６節での議論を移すことは次節で扱う。

問題。X が $\mathbb{R}^n$ でない場合 $\mu_{-\mathbf{x};\Psi}$ のような写像が定義できるか？　例えば $X=T^n$; n-次元トーラスであれば出来るか？。$\mathsf{D}_{T^n;\mathbb{Z}}$ には T^n が作用するから T^n による拡大が定義できる。この拡大の元は何らかの意味での作用素としての解釈ができるか？

8 $\mathsf{D}_{\mathbb{R}^n;\mathbb{C}}$ の位相

$\mathbb{R}^n$ のベクトル列 $\mathbf{a}=(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots)$ にたいし

$$\|\mathbf{a}\|_p=(\sum_i\|\mathbf{a}_i\|^p)^{1/p}$$

と置く。また $\mathsf{D}_{\mathbb{R};\ell^p}$ の高次元版として $\mathbf{a}=(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots)$、

$$\mathsf{D}_{\mathbb{R}^n;\ell^p}=\{\sum_i c_i\delta_{a_i}|\|c\|_p<\infty,\|\mathbf{a}\|_q<\infty\} \tag{8.1}$$

とする。ただし $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ である。

補題 7。$\mathbb{R}^n$ の全微分可能な関数 $f(\mathbf{x})$ が $f(0)=0$ であれば　任意の $\epsilon>0$ に対して $L>0$ があって

$$|f(\mathbf{x})|\le L\|\mathbf{x}\|,\quad \|\mathbf{x}\|<\epsilon \tag{8.2}$$

となる。

証明。df が連続だから $|x_i|<\epsilon.i=1,\ldots,n$ であれば $M>0$ があって

$$|\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}|<M,\quad i=1,\ldots,n$$

となる。また $f(0)=0$ だから

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^n\int_0^{x_i}\frac{\partial}{\partial t}f(\overbrace{0,\ldots,0}^{i-1}t,x_{i+1},\ldots,x_n)dt\\ =&\sum_{i=1}^n f(\overbrace{0,\ldots,0}^{i-1},x_i,\ldots,x_n)-f(\overbrace{0,\ldots,0}^{i},x_{i+1},\ldots,x_n))\\ =&f(\mathbf{x})\end{aligned}$$

である。よって $|x_i|<\epsilon$、$i=1<\ldots,n$ であれば

$$|f(\mathbf{x})|\le M(|x_1|+\cdots,|x_n|)$$

となる。一方

$$\begin{aligned}(\sum_{i=1}^n|x_i|)^2=&\sum_{i=1}^n x_i^2+2\sum_{i<j}x_ix_j\le\sum_{i=1}^n x_i^2+\sum_{i<j}(x_i^2+x_j^2)\\ =&\sum_i x_i^2+(n-1)\sum_i x_i^2=n\sum_i x_i^2\end{aligned}$$

だから $\|\mathbf{x}\|_1\le\sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_2$ である。よって補題が成立する。

命題 4。$\mathbb{R}^n$ で全微分可能で原点で 0 となる関数全体に C^1 一位相を入れた空間を $C_0^1(\mathbb{R}^n)$ とすれば $T\in\mathsf{D}_{\mathbb{R}^n;\ell^p}$ であれば

$$T\in C_0^1(\mathbb{R}^n)^\dagger, \tag{8.3}$$

である。

証明。$\sum_i\|\mathbf{a}_i\|^q<\infty$ だから任意の $\delta>0$ にたいし $\sum_{i>N}\|\mathbf{a}_i\|<\epsilon$ となる N がある。このとき $\|\mathbf{a}_i\|<\epsilon$ がすべての $i>N$ にたいし成立すると仮定できるから (31) によって

$$\sum_{i>N}|f(\mathbf{a}_i)|\le L\sum_{i>N}\|\mathbf{x}_i\|,$$

である。よって　$\sum_i \|f(\mathbf{x}_i\|^q < \infty$ となるから $\|\mathbf{c}\|_p < \infty$ により $Tf(\mathbf{x}) = \sum_i c_i f(\mathbf{a}_i)$ は存在する。したがって命題が得られる。

$C_0^1(\mathbb{R}^n)$ には $\tau_{\mathbf{a}}$ は働かないから $\mu_{-\mathbf{x};\Psi}$ を用いて $\mathsf{A}^{\natural}_{\mathbb{R}^n}$ の完備化を考えることは出来るが $G^{\natural}_{\mathbb{R}^n}$ の完備化を考えることはできない。他方

$$\begin{aligned}
\mathsf{D}_{\mathbb{R}^n;\ell^1} =& \{\sum_i c_i \delta_{\mathbf{a}_i} | \|\mathbf{c}\|_1 < \infty\}, && (8.4)\\
\mathsf{D}_{\mathbb{R}^n;\ell^1_{\mathrm{loc}}} =& \{\sum_i c_i \delta_{\mathbf{a}_i} | \|\mathbf{c}\|_1 < \infty, \\
& \{\|\mathbf{a}_1\|, \|\mathbf{a}_2\|, \ldots\} \text{ is a bounded set}\} && (8.5)
\end{aligned}$$

とすれば

$$\mathsf{D}_{\mathbb{R}^n;\ell^1} \subset C_b(\mathbb{R}^n)^{\dagger}, \quad \mathsf{D}_{\mathbb{R}^n,\ell^1_{\mathrm{loc}}} \subset C(\mathbb{R}^n)^{\dagger}, \tag{8.6}$$

だから $\tau_{\mathbf{x}}$ が $\mathsf{D}_{\mathbb{R}^n;\ell^1}$,$\mathsf{D}_{\mathbb{R}^n;\ell^1_{\mathrm{loc}}}$ に働く。よって $\mu_{-\mathbf{x};\Psi}$ を用いて $G^{\natural}_{\mathbb{R}^n}$ の完備化を考えることができる。

9　線形変数変換

$T \in GL(n,\mathbb{R})$ とすれば　T は $\{\tau_{\mathbf{a}} | \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n\}$ と $\{\sum_{i=1}^n a_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} | (a_1, \ldots, , a_n) \in \mathbb{R}^n\}$ を全体として不変にする。一方 T は $\mathsf{A}^{\natural}_{\mathbb{R}^n}$, $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}^n}$ に働き同型な群（リー環）に移すが固定はしない。

定義 4。$\mathfrak{G} \subset GL(n,\mathbb{R})$ する。$\cup_{T\in\mathfrak{g}} T\mathsf{A}^{\natural}_{\mathbb{R}^n}$ から生成された群を $\mathsf{A}^{\natural}_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{G})$ とする。リー環 $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{G})$ も同様に定義する。

$\tau_{\mathbf{a}}$ は $\mathsf{A}^{\natural}_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{G})$ に働くから $\{\tau_{\mathbf{a}} | \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n\} \cong \mathbb{R}^n$ による $\mathsf{A}^{\natural}_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{G})$ の拡大が定義できる。この群を $G^{\natural}_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{G})$ とする。リー環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{G})$ も同様に定義する。

定義から $T \in \mathfrak{G}$ であれば T の作用は $G^{\natural}_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{G})$ を動かさない。また適当なノルムによる $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}^n}$ の完備化を $\bar{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{g})$ とすれば ρ は $\mathsf{A}^{\natural}_{\mathbb{R}^n}$ から $\bar{\mathfrak{a}}_{\mathbb{R}^n}$ の中への同型である：

$$0 \to \mathsf{A}^{\natural}_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{G}) \xrightarrow{\rho} \bar{\mathfrak{a}}_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{G})$$

は完全列である。

$\mathfrak{G}$ は自己共役（$SO(n)$ など）とし M は接バンドル $ TM $ が $\mathfrak{G}$-バンドルとなる平坦な多様体とする。加群として

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{G}) = \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{a}_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{G})$$

$\mathbb{R}^n = \{\sum_{i=1}^n a_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} | (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n\}$ だから $\mathbb{R}^n$ の部分は TM(のファイバー)、$\mathfrak{a}_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{G})$ は T^*M にアソシエートしたバンドルのファイバーになる。従って $TM \oplus T^*M$ にアソシエートした $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{G})$ をファイバーとしたバンドル $\mathfrak{g}_M(\mathfrak{G})$ が構成できる。なおこのバンドルはファイバーが $\bar{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}^n}$ に拡張したバンドル $\bar{\mathfrak{g}}_M(\mathfrak{G})$ に拡大できる。

このバンドルの幾何学的意味や $G^{\natural}_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{g})$ について同様の構成が出来るかは今後の課題である。

「はじめに」に書いたように「分数冪微分で現れた群と離散デルタ・ポテンシャル」「数学・物理通信」5-6 (2015) 2-15 の続きで予備知識もそれで十分ですが　「数学・物理通信」には他に「分数冪微分に関連した積分変換とその応用」5-3 (2015) 22-34 などの関連した投稿もあります。

「数学・物理通信」の投稿以外で関連した文献をまとめておきます。

参考文献

[1] Andersson, S.I.: Nonabelian Hodge theory via heat flow, Lect. Notes in Math. 1209, eds. Naveira, A.M. Ferénandez, A. Mascaró, F. 8-36. Berlin 1986

[2] Asada, A. : Non Abelian de Rham theory, Prospect of Math. Sci. eds. Mitui,T. Nagasaka, K. Kano, K. 13-40, World Sci. 1988.

[3] Asada, A.: Lie algebra generated by logarithm and logarithm of differentiation, Balkan J. Geom. and Its Appl. 16(2011), 1-11.

[4] Asada, A.: Extended Borel transform and fractional calculus, Fractional Calculus: History, Theory and Applications, eds. Daou, R. Xavier, M. Nova Publishers, 2014. An integral transform arising from fractional calculus, Fractional Dynamics, eds. Cario, C. Yang, X.J. 61-77. de Gruyter, 2016. Canarutto, D.: Frölicher smoothness geometries, quantum jet bundles and BRS symmetry, J. Geom. Phys. 88 (2015), 113-128.

[5] Hermann, R.: Fractional Calculus- An Introduction for Physicists, World Sci. 2011.

[6] Holland, J. Hollands, S. Kopper, Ch.: The operator product expansion converges in massless ϕ_4^4-thoery, Commun. Math. Phys. 342 (2016), 385-440.

[7] Yang, C.N.: Some exact results for many body-problem in one dimension with repulsive delta-function integration, Phys. Rev. Lett. 19 (1969), 1312-1315.

[8] Yosida, K.: Functional Analysis, Berlin, Tokyo, 1967.

Bessel 関数と一次元格子振動 (2)

世戸 憲治 *

Bessel Function and One-Dimensional Lattice Oscillation (2)

Kenji SETO*

1　はじめに

前回の「Bessel 関数と 1 次元格子振動」(「数学・物理通信」6 巻 6 号) では，半無限の一次元格子について，端の点を強制的に振動させた場合について，Bessel 関数を用いた解析をした．今回は，端の点に初期変位，あるいは，初速度を与えた場合について，Bessel 関数を用いた解析をする．

2　方程式の導入

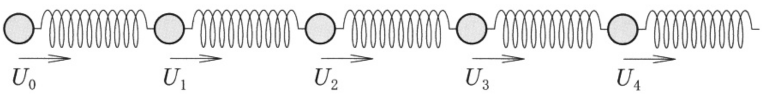

図 1　　1 次元格子モデル

図 1 に示すように，質量 m の錘と，ばね定数 k のばねを交互に接続した系を考える．ここでは，これら錘とばねは無限個存在するものと仮定し，全体として半無限の形状をなすものとする．錘には左から右に向かって番号を付け，$n = 0, 1, 2, \cdots$ とする．振動しているときの時刻 t における n 番目の錘の変位を $U_n(t)$ とし，この錘の運動方程式を考える．この錘には，ばねによって，右から $k(U_{n+1} - U_n)$ の力を受け，左から $-k(U_n - U_{n-1})$ の力を受けるので，その運動方程式は，$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し，

$$m\frac{d^2}{dt^2}U_n = k(U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}), \quad n = 1, 2, 3, \cdots, \tag{2.1}$$

また，$n = 0$ に対しては，左のばねは存在しないので，

$$m\frac{d^2}{dt^2}U_0 = k(U_1 - U_0) \tag{2.2}$$

となる．

以下では，この 0 番目の錘に初期変位を与えた場合，および，初速度を与えた場合について，Bessel 関数を用いた解析を試みる．

* 北海学園大学名誉教授　　　　　　E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

3 Bessel 関数による解法

Bessel 関数 $J_\nu(z)$ の微分公式は,

$$J'_\nu = -\frac{1}{2}(J_{\nu+1} - J_{\nu-1}) \tag{3.1}$$

と書ける．ここで，プライムは z 微分を表す．これを 2 度繰り返すと,

$$J''_\nu = \frac{1}{4}(J_{\nu+2} - 2J_\nu + J_{\nu-2}) \tag{3.2}$$

となる．この式は方程式 (2.1) を解くために使える．そこで，(2.1) 式の $U_n(t)$ を

$$U_n(t) = J_{2n}(\omega t) \tag{3.3}$$

とおいて方程式に代入すると,

$$\omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \overset{\text{def}}{=} \omega_0 \tag{3.4}$$

であれば満たされる．したがって，$J_{2n}(\omega_0 t)$ は解となる．

以下，具体的な初期条件を与えたときの解を求めてみよう．

[$\boldsymbol{U_0(0) = \ell}$, $\boldsymbol{\dot{U}_0(0) = 0}$ とした場合]

初めに，初期条件として，U_0 の初期変位を

$$U_0(0) = \ell, \quad \dot{U}_0(0) = 0, \qquad \big[U_n(0) = 0, \quad \dot{U}_n(0) = 0, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots\big] \tag{3.5}$$

と与えた場合を解析する．ここに，ℓ は長さの次元を持つ量，また，上付ドットは時間微分を表す．このときの解を,

$$U_n(t) = \sum_{r=0}^{\infty} C_r J_{2(n+r)}(\omega_0 t), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{3.6}$$

とする．ここに，C_r は r に依存した定数である．この式は，$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，方程式 (2.1) を満たし，また，初期条件の $U_n(0) = 0$, $\dot{U}_n(0) = 0$ も満たしている．これを方程式 (2.2) に代入すると,

$$\sum_{r=0}^{\infty} C_r J_{2(r-1)}(\omega_0 t) = \sum_{r=0}^{\infty} C_r J_{2r}(\omega_0 t) \tag{3.7}$$

となる．この式は，(3.6) 式で形式的に $n = -1$ としたときの U_n を U_{-1} としたとき，$U_{-1}(t) = U_0(t)$ としたものである．この式から，$J_{-2}(z) = J_2(z)$, および，次数の異なる Bessel 関数の独立性を用いると,

$$C_1 = C_0, \quad C_n = 0, \quad n = 2, 3, 4, \cdots \tag{3.8}$$

を得る．したがって，(3.6) 式は,

$$U_n(t) = C_0\big[J_{2n}(\omega_0 t) + J_{2n+2}(\omega_0 t)\big], \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{3.9}$$

となる．これに初期条件 (3.5) 式を当てはめると，$J_0(0) = 1$ より，$C_0 = \ell$ となるので，最終的に解は,

$$U_n(t) = \ell\big[J_{2n}(\omega_0 t) + J_{2n+2}(\omega_0 t)\big], \qquad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{3.10}$$

と求められる．あるいは，この解は，Bessel 関数の公式

$$J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} J_\nu(z) \tag{3.11}$$

を用いると，1 個の Bessel 関数で

$$U_n(z) = \frac{2\ell(2n+1)}{\omega_0 t} J_{2n+1}(\omega_0 t), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{3.12}$$

と書き直すこともできる．時間 t が大きいときの漸近形を見るにはこの方が都合がよい．

[$U_0(0) = 0$, $\dot{U}_0(0) = v_0$ とした場合]

つぎに，初期条件として，U_0 の初速度を

$$U_0(0) = 0, \quad \dot{U}_0(0) = v_0, \qquad \big[U_n(0) = 0, \quad \dot{U}_n(0) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \cdots\big] \tag{3.13}$$

と与えた場合を解析する．ここに，v_0 は速度の次元を持つ量である．このときの解を，

$$U_n(t) = \sum_{r=0}^{\infty} C_r J_{2(n+r)+1}(\omega_0 t), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{3.14}$$

とする．この式は，$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し，方程式 (2.1)，および，初期条件の $U_n(0) = 0$, $\dot{U}_n(0) = 0$ を満たしている．これを方程式 (2.2) に代入すると，

$$\sum_{r=0}^{\infty} C_r J_{2r-1}(\omega_0 t) = \sum_{r=0}^{\infty} C_r J_{2r+1}(\omega_0 t) \tag{3.15}$$

となるが，$J_{-1}(z) = -J_1(z)$, および，次数の異なる Bessel 関数の独立性から，

$$C_n = 2C_0, \quad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{3.16}$$

となる．したがって，(3.14) 式は，

$$U_n(t) = C_0 J_{2n+1}(\omega_0 t) + 2C_0 \sum_{r=1}^{\infty} J_{2(n+r)+1}(\omega_0 t) \tag{3.17}$$

となる．これに，初期条件である $U_0(0) = 0$, $\dot{U}_0(0) = v_0$ を課すと，$C_0 = 2v_0/\omega_0$ と決まるので，解は，

$$U_n(t) = \frac{2v_0}{\omega_0}\Big[J_{2n+1}(\omega_0 t) + 2\sum_{r=1}^{\infty} J_{2(n+r)+1}(\omega_0 t)\Big], \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{3.18}$$

と求められる．この和が求まると良いのだが，残念ながらこれは公式集には載っていない．しかし，この解を t で微分し，(3.1) 式を用いると，無限和は消えてしまい

$$\dot{U}_n(t) = v_0\big[J_{2n}(\omega_0 t) + J_{2n+2}(\omega_0 t)\big] \tag{3.19}$$

となる．これは (3.10) 式と，係数を除いて，同じ形である．その理由は，(2.1) (2.2) 式は同次線形方程式なので，時間で微分すると，

$$m\frac{d^2}{dt^2}\dot{U}_n = k(\dot{U}_{n+1} - 2\dot{U}_n + \dot{U}_{n-1}), \quad n = 1, 2, 3, \cdots, \quad m\frac{d^2}{dt^2}\dot{U}_0 = k(\dot{U}_1 - \dot{U}_0) \tag{3.20}$$

と，U_n がすべて $\dot{U}_n$ に置き換わったものになる．これを，初期条件 $\dot{U}_0(0) = v_0$ の基に解くことは，元の (2.1) (2.2) 式を初期条件 $U_0(0) = \ell$ の基に解くことと，まったく，同じ手順になるからである．

(3.19) 式を t で積分すると，$U_n(t)$ は，積分は付くが無限和を含まない

$$U_n(t) = v_0 \int_0^t dt \big[J_{2n}(\omega_0 t) + J_{2n+2}(\omega_0 t) \big] \tag{3.21}$$

という形で表すこともできる．ただし，Bessel 関数の不定積分は，

$$\int J_\nu(z) dz = 2 \sum_{r=0}^{\infty} J_{\nu+2r+1}(z) \tag{3.22}$$

となるので，積分を実行してしまうと，(3.18) 式に逆戻りしてしまう．ここで，時間 t が十分大きな場合は，積分公式

$$\int_0^\infty J_\nu(ax) dx = \frac{1}{a}, \qquad \nu > -1,\ \ a > 0 \tag{3.23}$$

により，

$$U_n(t) \xrightarrow{t\to\infty} \frac{2v_0}{\omega_0} \tag{3.24}$$

とその漸近形が求められる．これから，0 番目の錘に初速度を与えた場合は，最終的に有限の大きさの変位が，すべての錘にわたって残ってしまうことが分かる．

[$\boldsymbol{U_0(0) = \ell}$, $\boldsymbol{\dot{U}_0(0) = v_0}$ とした場合]

最後に，初期条件として，U_0 の初期変位と初速度を

$$U_0(0) = \ell, \quad \dot{U}_0(0) = v_0, \qquad \big[U_n(0) = 0, \quad \dot{U}_n(0) = 0, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots \big] \tag{3.25}$$

と与えた場合は，方程式の線形性から，これまで求めた (3.10) と (3.21) 式の和

$$U_n(t) = \Big[\ell + v_0 \int_0^t dt \Big] \big[J_{2n}(\omega_0 t) + J_{2n+2}(\omega_0 t) \big], \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{3.26}$$

が解となる．

[数値計算によるグラフ表示]

ここでは，これまでの結果に基づいて数値計算した例を示す．数値計算をするにあたって，パラメータを

$$\omega_0 = 1, \quad \ell = 1, \quad v_0 = 1 \tag{3.27}$$

と設定することにする．次ページの図 2 は初期変位を与えた (3.10) 式に基づくもの，また，図 3 は初速度を与えた (3.21) 式に基づくものである．これらの図では，水平右方向に n の値を 0 から 20 まで，斜め上方向に時間 t を 0 から 35 まで，上方向に変位 U_n をとり立体的に描いたものである．

これら両図から，$n = 0$ で受けた初期変位，あるいは，初速度が波動として伝播していく様子がうかがえる．特に，初期変位を与えた図 2 では，時間がたつと元の位置に戻っていくが，初速度を与えた図 3 では，(3.24) 式で示したように，時間が経つと有限の大きさの変位が残ってしまうことが見て取れる．

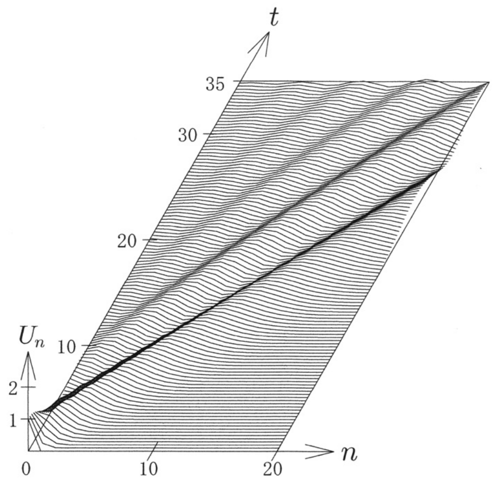

図 2　初期変位を与えた場合

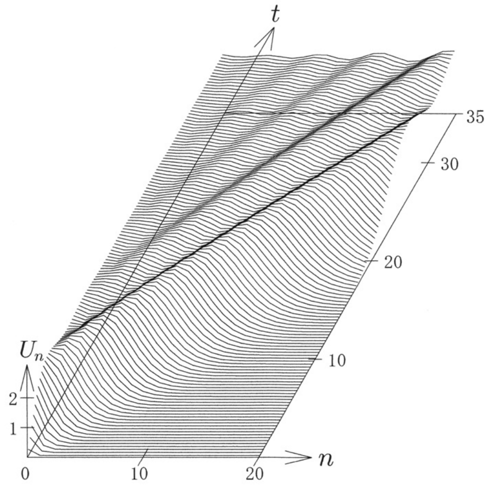

図 3　初速度を与えた場合

4　おわりに

今回のものは，前回に比べると計算自体は，はるかに簡単であるが，論理の推考に意外な時間をとられてしまった．初めにこれを書いたときは，(3.18) 式まで求まった段階で，初期変位を与えたときの解 (3.10) 式は僅か 2 個の Bessel 関数しか含んでいないのに，初速度を与えたときの解 (3.18) 式は，何故に無限個の Bessel 関数を含んでしまうのか不思議であった．この段階で，例によって中西先生に相談してみたところ，これを時間で微分することで，(3.10) 式と同じ形の解になることを教えていただいた．したがって，(3.19) 式から (3.22) 式までは，中西先生からのご教示によるものである．

今回のものは，半無限の 1 次元格子としたので，Bessel 関数できれいに解くことができた．しかし，これが，有限長の格子の場合は，とてつもなく難しい問題になってしまう．

[謝辞]

今回も，京都大学名誉教授の中西襄先生に原稿段階で読んでいただき，「おわりに」のところに書いたように大変有意義なアドバイスをいただきました．ここに，謹んで感謝申し上げます．

比と比例式を考える

矢野　忠[1]

Ratios and Proportions

Tadashi YANO[2]

1　はじめに

線分 AB 上の点 C があって，

$$AC : CB = m : n \tag{1.1}$$

が成り立つとき，点 C の点の座標 c を得る式は，点 A の座標 a と点 B の座標 b とによって

$$c = \frac{na + mb}{m + n} \tag{1.2}$$

で与えられるとき，これを内分点という．これをどのように導くかに関心が生じて，何年かぶりに内分点の求め方を復習した．そのときに，比例式から内分点の式を得るのに，比と比例式の知識を用いた．そこで，このテーマについてまとめておきたいと思い始めた．ところが，私のもっている数学の本の中で，比と比例式のような数学の初等的なことをとり扱っている本があまり多くはないことに気がついた．

比と比例式は小学校の算数の中で教えられるのか，中学校の数学の中で教えられるのかもはっきりしない．

このエッセイでは比と比例式について文献でどう記述しているかを比較しながら，見てみよう．

2　比と比例式

まず矢野健太郎『代数入門』[1] から見ていこう．

> 数 a の数 b に対する割合を a 対 b の比といって $a : b$ で表すが，これは
>
> $$a : b = \frac{a}{b} \tag{2.1}$$
>
> の意味である．$a : b$ は a 対 b とよむが，この場合，a を比の前項，b を比の後項という．また，上式において，左辺を比とよび，右辺をその比の値という．
>
> つぎに比例については，二つの比 $a : b$ と $c : d$ とが等しいことを表す式
>
> $$a : b = c : d \tag{2.2}$$
>
> を比例式という．そして，この関係を満足する a, b, c, d は比例するという．
>
> 上の比例式において，a, b, c, d を順に比例式の第一項，第二項，第三項，第四項とよび，a, b, c に対して d を，a, b, c の第四比例項とよぶ．また b と c とを比例式の内項，a と d を比例式の外項とよぶ．
>
> $$a : b = c : d \quad \text{であれば，} \; ad = bc \tag{2.3}$$
>
> すなわち，比例式においては内項の積は外項の積に等しい．

[1]元愛媛大学工学部
[2]yanotad@earth.ocn.ne.jp

なぜなら，$a:b=c:d$ は

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \tag{2.4}$$

を意味するから，この式の両辺に bd をかければ

$$ad=bc \tag{2.5}$$

この書『代数入門』では比と比の値とは同じと定義している．気象庁長官をされていた，和達清夫氏が『数学ティータイム』[2] の中で彼の中学校時代の数学の宮本久太郎先生が

> 比を教えるにあたって,「＜比＞とは＜割る＞ことと同じだと思ってよろしい」と冒頭にのべたことであった．それまで私は比という言葉は，なにかばくぜんと数量を比べるという意味や，比例という言葉につながって，めんどうなものであると思っていたのに，ただ＜割る＞というのと同じだといわれて，非常に明快で安心感が与えられた．
>
> また
>
> 「これからは比の値はいくらとはいわず，ただ比はいくらといいます．それはこの白墨の値はいくらといちいちいわないのと同じです」

と書いている．

厳密にいうと確かに「＜比＞を＜割る＞ことと同じとする」のは比が含んでいる意味を正確にはとらえ損ねているかもしれないし，数学的には間違っているかもしれないが，なかなかの割り切り方だと思う [3]．

つぎに武藤　徹『新しい数学の教科書 II』 [5] を見てみよう．そこでは

> $a:b=c:d$ とは $a \div b = c \div d$ とまったくおなじです．そこで
>
> $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \tag{2.6}$$
>
> が成り立ちます．

と書かれていて，比のとらえ方は『代数入門』と変わらない [4]．

3 番目には志賀浩二『中高一貫数学コース　数学 3』[6] を見てみよう．ここでは

> 正の数 a,b に対して，比
>
> $$a:b \tag{2.7}$$
>
> で表したものは a と b とのつりあいの関係で，この関係は a を k 倍し，b を k 倍しても変わらないと考えたものです．それを
>
> $$a:b=ka:kb \tag{2.8}$$
>
> で表します．
>
> 比は数ではありません．

---

[3] $a:b=\frac{a}{b}$ と表すことはライプニッツに起原し，ヨーロッパ大陸の国々では比と割り算とが同じ記号で表されるようになったという [3]．こういう歴史性までみると興味深い．補遺を見よ．

また，遠山啓の『教師のための数学入門』[4] にはつぎのように書かれている．

> 今でも $2:3$ は $\frac{2}{3}$ に等しいのか，違うかという疑問がでてくるところをみると，$2:3$ という比の定義そのものからして，アイマイなのだといってよいだろう．もし $2:3$ が $\frac{2}{3}$ と全く等しいのであったら，ことさらに $2:3$ という別の記号を使う必要はないはずであるし，また $2:3$ が $\frac{2}{3}$ と異なるのであったら，最初にどのように定義するかを徹底的に考えてみるべきである．

彼は例として「3m で 70g の針金は，8m ではいくらか」という問題を解くときに，まずは針金 1m の質量を求めてそれから 8m の針金の質量を求めるという「帰一法」という考えを紹介している．

[4] ドイツ，フランス，オランダ等のヨーロッパ大陸の国々では割り算は $a \div b$ の代わりに $a:b$ と書くのが一般的である．これは日本やイギリスやアメリカとは違う．

比の値というのは比 $a:b$ に対して，分数 $\frac{a}{b}$ を対応させることです．$a:b=c:d$ ならば，c,d は a,b を適当に k 倍した値として

$$c = ka, \quad d = kb \tag{2.9}$$

と表されますから

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \tag{2.10}$$

となり，比に対して比の値は 1 つに決まります.

この書では，$a:b$ に対して，分数 $\frac{a}{b}$ を対応させるという風に考えています.

4 番目に松坂和夫『数学読本 1』[7] を見てみよう.

2 つの 0 でない数 a,b に対して，$a:b$ という記号を考え，これを a と b との比ということ，$\frac{a}{b}$ をこの比の値ということは，よくご存知でしょう．記号 $a:b$ は "a 対 b" と読まれます.

2 つの比 $a:b$ と $c:d$ は $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ が成り立つときに等しいと定めます．すなわち，

$$a:b=c:d \iff \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \tag{2.11}$$

です．この意味で "比" と "比の値" とはしばしば同じ意味で用いられます.

$a:b=c:d$ または $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ のような式，あるいはもっと一般に

$$a_1:b_1 = a_2:b_2 = \cdots = a_n:b_n \tag{2.12}$$

または

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} \tag{2.13}$$

のような式は比例式とよばれます．比例式を取り扱うときには，通常，とくにことわらないかぎり，すべての分子および分母が 0 でないものと考えて，その式を処理することになっています.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \tag{2.14}$$

であることを

$$a:b:c = a':b':c' \tag{2.15}$$

と書きます．記号 $a:b:c$ は "a 対 b 対 c" と読み，a,b,c の連比といいます．同じようにして 4 つ以上の数の連比を考えることができます.

この書では

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \tag{2.16}$$

が成り立つときに，

$$a:b=c:d \tag{2.17}$$

を定義している．したがって，比は比の値の方からその意味がはっきりするようにしている．このやり方がもっとも疑点が生じないかと思われるが，ちょっともってまわった感じがするので，本当は正しくないのかもしれないが，和達清夫さんの先生の，宮本先生のように「比とは比の値のことをいうが，比の値とはいわない」と宣言してもらう方がわかりやすいような気がする.

最後にインターネットの Wikipedia の比 [8] の説明を見てみよう.

比（ひ，英 : ratio）とは 2 つ（または 3 つ以上）の数の関係を表したもの．数 a,b について，その比を $a:b$ で表され,「a 対 b」とよむ．a を前項，b を後項（こうこう）という．また，前項と後項を入れ替えた $b:a$ を元の比の逆比または反比という．3 数以上の場合も $a:b:c$ のように表し，特に連比（れんぴ）という.

（中略）

$a:b$ において（$b \neq 0$ のとき）a/b のことを比の値という．同じ比のものは同じ比の値をもつ．例えば，8:6 の比の値 8/6 は約分すると 4/3 となり，4:3 の比の値 4/3 に等しい．比の値 a/b をそのまま比ということもある．

比の値は，b を単位量とした a の大きさを表すので，割合と同じ意味をもつ．また $a:b = a/b:1$ なので比の値は後項を 1 としたときの前項と言いかえることができる．後項を 100 とした前項を百分率，またはパーセントという．

（後略）

同じ Wikipedia の比例式 [9] の説明では

（前略）

（定義）

$a:b = x:y$，すなわち，二つの比 $a:b$ が $x:y$ に等しいとは，b に対する a の割合が，y に対する x の割合に等しいことであると定義すると，これはすなわち

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y} \tag{2.18}$$

なる分数の等式が成り立つことである．これは

$$a:b = x:y \iff \frac{a}{b} = \frac{x}{y} \tag{2.19}$$

あるいは

$$a:b = x:y \iff \frac{a}{x} = \frac{b}{y} \tag{2.20}$$

と定義しても同じことである．このように定義される比の等式 $a:b = x:y$ または $a/b = x/y$ を比例式という．また連比が等しいとは

$$a_1:a_2:\cdots:a_n = x_1:x_2:\cdots:x_n \iff \frac{a_1}{x_1} = \frac{a_2}{x_2} = \cdots = \frac{a_n}{x_n} \tag{2.21}$$

と定義され，比の場合と同様に等式

$$a_1:a_2:\cdots:a_n = x_1:x_2:\cdots:x_n \tag{2.22}$$

または

$$\frac{a_1}{x_1} = \frac{a_2}{x_2} = \cdots = \frac{a_n}{x_n} \tag{2.23}$$

のことを比例式とよぶ．

（後略）

このインターネットの比例式の等しいことの定義でも左辺と右辺の比の値が等しいことが使われている．

3 連比の場合

$a:b:c = 15:18:28$ のような連比が出て来たら，どうしたらよいだろうか．一つの考えは

$$a:b = 15:18, \quad b:c = 18:28 \tag{3.1}$$

のように分けて考えれば

$$\frac{a}{b} = \frac{5}{6}, \tag{3.2}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{9}{14} \tag{3.3}$$

から

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{6} = p, \quad p = \text{定数} \tag{3.4}$$

$$\frac{b}{9} = \frac{c}{14} = q, \quad q = \text{定数} \tag{3.5}$$

として処理をすればよいかと思う.

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k, \quad k = \text{定数} \tag{3.6}$$

が成り立つときに比例式 $a : b : c = x : y : z$ が成り立つ．逆もまた真であるが，この逆の命題は理解が難しい.

『算数なっとく辞典』[10] に「2:3 は 2/3 か」という項目があり，そこには 2:3 は 2/3 として分数に表すことができたとしても，2:3:4 とたとえば 3 つの数の比（連比）となると一つの分数では表せないと書いてある．それはそうだが，普通に連比が現れるときに 2:3:4 と単独で現れることはなく，$2 : 3 : 4 = x : y : z$ みたいな形で必ず現れるともどこか別の本には書かかれていて，それなら上の処理によって

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \tag{3.7}$$

のように表されるので，それほど困ることはないのではなかろうか.

また，2:3 は一つの分数で表せたのに，2:3:4 は一つの分数では表せないことは確かだが，二つの分数として表すことはできる．たとえば，2/3 と 4/3 とである．4 つの数の連比なら，3 つの分数で表すことができる．表し方は一義的ではないが，それでもその分数の取り方によって比が変わることはない．このことを押さえておきたい.

4　おわりに

インターネットをちょっと検索してみれば，私立高校の入試問題の演習問題としてかどうかはわからないが，比と比例式についてほんとうに多くの問題がその解き方とともに提供されている.

解き方の基本は比から，その比の値を考えて，分数式で表された比例式を導き，それを等式の性質にしたがって計算を進めればよいと思われる.

比例式のままでは内項の積が外項の積に等しいという，その論理がわからないルールに依拠することになり，望ましくはない.

補遺　ライプニッツの意見

比と割り算の記号を同じとしたことについてのライプニッツの意見を『数字と数学記号の歴史』[3] ではつぎのように引用している.

> 私は比と比例に特殊な記号を用いることに賛成しかねる．比に対しては割り算の記号で十分であり，同様に比例に対しては = で十分である．この見解のもとに私は比 $a : b$ を，a を b で割るときになすように $\frac{a}{b}$ で表す．また，私は比例，すなわち，二つの比の相当を示すのに二つの割り算または分数が等しいことで表す。すなわち，比 $a : b$ が $c : d$ に同じであることは $a : b = c : d$ または $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ と書けば十分である.

(2016.9.3)

参考文献

[1] 矢野健太郎,『代数入門』(岩波書店，1955.9) 72-81

[2] 遠山啓，矢野健太郎　編,『数学ティータイム』（日本評論社，1965.2) 30-36

[3] 大矢真一，片野善一郎,『数字と数学記号の歴史』（裳華房，1978.8）79-82

[4] 遠山啓,『教師のための数学入門』（国土社，1990.12）170-172

[5] 武藤　徹,『新しい数学の教科書 II』 図形編（文一総合出版）154-157

[6] 志賀浩二,『中高一貫数学コース　数学 3』（岩波書店，2003.1）164-167

[7] 松坂和夫,『数学読本 1』（岩波書店，1989.10）148-150

[8] https://ja.wikipedia.org/wiki/比

[9] https://ja.wikipedia.org/wiki/比例式

[10] 銀林　浩　編,『算数・数学なっとく辞典』（日本評論社，1994.8）148-150

編集後記

あれほど暑かった 8 月も終わり，9 月になった．6 巻 7 号を発行する．皆様におかれましてはご健勝のことと存じます.

いま,「数学・物理通信」の同人と認定される方々にのみ原稿の投稿資格を限定したいと，考えている.

同人ではなくても，同人の方からのご推薦があれば，原稿を掲載できるようにはしたい．そのことを明記した新しい投稿規定（案）をつくっているが，その投稿規定は数号先に発表する.

例外的に同人と同人から推薦があった以外の原稿を受け付けることもありうるが，原則的には「数学・物理通信」の同人に投稿資格を限定したい.

同人以外の一般の方々からの投稿がときどきあり，その原稿の掲載可否を判定するのに，編集者として頭を悩ませるような事態になってきた．このことが投稿規定を変更したい理由である.

論文審査は基本的にしないといまの投稿規定にあるので，一般の方々からの投稿が，ときどきある．実績として，いままでに掲載をお断りした論文と掲載をした論文とはほぼ半々である．編集者以外からの意見を聞いたこともあるが，基本的には編集者の一存で掲載の可否を決定している.

このことについてご意見があれば，編集者宛てに，メールでお寄せ下さい.

（矢野　忠）