

数学・物理通信

6卷8号 2016年12月

編集 新関章三・矢野 忠

2016年12月1日

目次 (Contents)

1. 古典力学における倒立振り子	世戸憲治	2
2. 積分型のマクスウェル方程式	岩崎正春	10
3. 分数冪微積で現れたリー環の適切な完備化	浅田 明	15
4. 編集後記	新関章三	26
1. Inverted Pendulums in Classical Mechanics	Kenji SETO	2
2. Maxwell Equations in the Integral Form	Masaharu IWASAKI	10
3. Appropriate Completion of the Lie Algebra arising from Fractional Calculus	Akira ASADA	15
4. Editorial Comments	Shozo NIIZEKI	26

古典力学における倒立振り子

世戸 憲治*

Inverted Pendulums in Classical Mechanics

Kenji SETO*

1 はじめに

インターネットで調べてみると、倒立振り子、または、逆立ち振り子と呼ばれるものには2種類のものがあるらしい。1つは、振り子を台車の上に付け、電子制御装置を用いて、振り子が倒れる方向をセンサーでキャッチし、台車を倒れる方向に動かしていくもの、2つ目は、電子制御装置は使わずに台座を上下方向に振動させるものである。ここで取り上げる倒立振り子は、もちろん、この後者の方である。前回の論文、「量子力学における周期ポテンシャル問題 (2)」(「数学・物理通信」6巻4号)で扱った Kronig-Penney モデルにおける波動方程式は、ここで扱う Hill-Meissner 方程式と本質的に同じものなので、前回の続きとして倒立振り子の解析を試みる。また、ここでは、振り子の支点を上下に動かす代わりに、ばねを用いて振り子を上下に振動させることで倒立振り子が作れる可能性についても触れてみる。

2 方程式の導入

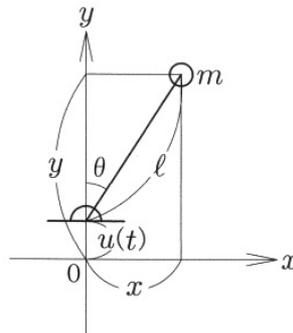


図1 倒立振り子

図1のように、静止した座標系 $O-xy$ を、 x 軸は水平方向に、 y 軸は鉛直上向きにとる。振り子の台座は、この原点 O を中心として上下方向に振動するものとし、時刻 t における動いた距離を $u(t)$ とする。質量が無視できる長さ l の軽い棒を、その傾き角は摩擦なしに動き得るようにこの台座に固定し、棒の他端には質量 m の錘をつける。錘の位置座標を (x, y) 、棒の鉛直軸から測った傾き角を θ とし、このときの錘の運動方程式を作る。

* 北海学園大学名誉教授

E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

この錘に作用する力は、棒から受ける棒の長さ方向の力^{*1} T 、および、重力が作用するので、重力加速度を g とし、

$$x \text{ 方向: } m \frac{d^2x}{dt^2} = T \sin \theta, \quad y \text{ 方向: } m \frac{d^2y}{dt^2} = T \cos \theta - mg \quad (2.1)$$

となる。また、錘の座標 (x, y) と棒の長さ ℓ 、傾き角 θ の間の幾何学的関係は、

$$x = \ell \sin \theta, \quad y = \ell \cos \theta + u(t) \quad (2.2)$$

となる。これらの式で、傾き角 θ は十分に小さいものとし、線形近似、 $\sin \theta \cong \theta$ 、 $\cos \theta \cong 1$ をしてから、(2.2) 式を方程式 (2.1) に代入し、力 T を消去すると、

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} - \frac{g}{\ell} - \frac{\ddot{u}}{\ell} \right] \theta = 0 \quad (2.3)$$

となる。ここに、 $\ddot{u} = d^2u(t)/dt^2$ を意味する。 $u(t)$ はどんな関数でもかまわないが、ここで、正弦波の形で振動する関数、

$$u(t) = u_0 \sin(\omega t) \quad (2.4)$$

とおくと、方程式は、

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} - \frac{g}{\ell} + \frac{u_0 \omega^2}{\ell} \sin(\omega t) \right] \theta = 0 \quad (2.5)$$

となり、これは Mathieu 方程式の 1 種となる^{*2}。ただし、この Mathieu 方程式を解析的に扱おうとすると非常に面倒なことになるので、ここではこれを単純化し、三角関数 $\sin(\omega t)$ の部分に符号関数 sgn を付け、

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} - \frac{g}{\ell} + \frac{u_0 \omega^2}{\ell} \text{sgn}(\sin(\omega t)) \right] \theta = 0 \quad (2.6)$$

とおくことにする。ここに、符号関数 sgn は

$$\text{sgn}(x) = 1, \text{ for } x > 0, \quad = 0, \text{ for } x = 0, \quad = -1, \text{ for } x < 0 \quad (2.7)$$

と定義したものである。

以下、この方程式を解くことになるが、数式簡素化のため時間 t を無次元化し、

$$\omega t = z \quad (2.8)$$

とおくことにすると方程式は、

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \lambda + \gamma \text{sgn}(\sin z) \right] \theta = 0 \quad (2.9)$$

となる。ここに、無次元数を

$$\lambda = -\frac{g}{\ell \omega^2}, \quad \gamma = \frac{u_0}{\ell} \quad (2.10)$$

と定義する。この周期 2π の周期項を持つ方程式 (2.9) は Hill-Meissner 方程式と呼ばれる。ここで問題にしている倒立振子の場合、 $\lambda < 0$ であるが、通常の下向き振子のときは、重力加速度の符号を変えて $\lambda > 0$ となる。また、(2.10) 式に現れる u_0 の符号は正負両方があり得るが、ここでは、 $u_0 > 0$ とし、したがって、 $\gamma > 0$ とし話を進める。

^{*1} ここでは、棒の質量をゼロとし、また、錘については質量は存在するがその大きさをゼロとするので、この振子の錘の中心に関する慣性モーメントはゼロとなる。その結果、棒が台座から受ける力は、錘の中心に力のモーメントを作らない。したがって、この力は棒の長さ方向に沿ったものとなる。

^{*2} 厳密な Mathieu 方程式は、 $[d^2/dz^2 + a - 2q \cos(2z)]\theta = 0$ と定義される。

3 方程式の解

方程式 (2.9) を解くにあたり, 変数

$$k = \sqrt{\lambda - \gamma}, \quad k' = \sqrt{\lambda + \gamma} \quad (3.1)$$

を導入しておく. 倒立振子の場合は, $\lambda < 0, \gamma > 0$ なので, k は必ず虚数になるが, このままの形で議論を進める. k' の方は, 実数の場合と, 虚数の場合があり得る.

初めに, 方程式 (2.9) を, $-\pi < z \leq 0$ の範囲で解くと, 2 個の独立解,

$$\theta_1 = \cos(kz), \quad \theta_2 = \frac{\sin(kz)}{k} \quad (3.2)$$

が存在する. 同様に, $0 < z \leq \pi$ の範囲では, 2 つの独立解,

$$\theta_1 = \cos(k'z), \quad \theta_2 = \frac{\sin(k'z)}{k'} \quad (3.3)$$

が存在する. ただし, これらの式で, k は常に虚数, k' も虚数になる場合があるので, 実際は, $\cos(kz), \sin(kz)/k$ を, それぞれ, $\cosh(|k|z), \sinh(|k|z)/|k|$ で置き換えるものとする. k' についても同じものとする.

これら 2 つの範囲にわたる独立解 θ_1, θ_2 は, $z = 0$ において, それぞれが, 関数自体とその微係数について連続になっている.

つぎに, $\pi < z \leq 2\pi$ の範囲では, 方程式自体が 1 周期前の $-\pi < z \leq 0$ のときと同じであり, (3.2) 式で求めた解の変数を z から $z - 2\pi$ に変えたものの線形結合で書けるので, $a_{i,j}$ ($i, j = 1, 2$) を定数として,

$$\theta_1 = a_{11} \cos(k(z - 2\pi)) + a_{12} \frac{\sin(k(z - 2\pi))}{k}, \quad \theta_2 = a_{21} \cos(k(z - 2\pi)) + a_{22} \frac{\sin(k(z - 2\pi))}{k} \quad (3.4)$$

と表される. ここで, $z = \pi$ での解の接続を考える. (3.3) (3.4) 式から, θ_1 について, 関数自体とその微係数が連続であるためには,

$$\cos(k'\pi) = a_{11} \cos(k\pi) - a_{12} \frac{\sin(k\pi)}{k}, \quad -k' \sin(k'\pi) = a_{11} k \sin(k\pi) + a_{12} \cos(k\pi) \quad (3.5)$$

となり, 同様に, θ_2 については,

$$\frac{\sin(k'\pi)}{k'} = a_{21} \cos(k\pi) - a_{22} \frac{\sin(k\pi)}{k}, \quad \cos(k'\pi) = a_{21} k \sin(k\pi) + a_{22} \cos(k\pi) \quad (3.6)$$

となる. (3.5) 式から a_{11} , (3.6) 式から a_{22} を求めると,

$$a_{11} = \cos(k\pi) \cos(k'\pi) - \frac{k'}{k} \sin(k\pi) \sin(k'\pi), \quad a_{22} = \cos(k\pi) \cos(k'\pi) - \frac{k}{k'} \sin(k\pi) \sin(k'\pi) \quad (3.7)$$

となる. 前々回の論文「量子力学における周期ポテンシャル問題 (1)」(「数学・物理通信」6 巻 3 号) で説明した Floquet の定理によると, $z \rightarrow \pm\infty$ で発散しない, つまり安定な解になるためには,

$$|a_{11} + a_{22}| \leq 2 \quad (3.8)$$

であることが条件となる*3. (3.7) 式を用いて, この場合の条件は,

$$\left| \cos(k\pi) \cos(k'\pi) - \frac{k^2 + k'^2}{2kk'} \sin(k\pi) \sin(k'\pi) \right| \leq 1 \quad (3.9)$$

となる. 倒立振子の装置が決まると, (2.10) 式から λ, γ が決まり, (3.1) 式から k, k' が決まるので, この条件は装置に対する条件となる. なお, 以下の節で, この条件を満たす範囲を図示することにする.

先に, k は常に虚数, k' も虚数になる場合があると述べたが, この式で k, k' の両方を虚数とすると, 絶対値の中身は,

$$\cosh(|k|\pi) \cosh(|k'|\pi) + \frac{|k|^2 + |k'|^2}{2|kk'|} \sinh(|k|\pi) \sinh(|k'|\pi) \quad (3.10)$$

となって, これは一般に 1 より大きいことになるので (3.9) の条件式が満たされなくなる. 言い換えると, (3.9) 式が満たされるためには, 虚数の k' は許されずに, 正の実数でなければならない. したがって, (3.1) 式から安定解は $\lambda + \gamma > 0$ の領域に存在することになり, この条件は (2.10) 式より, $u_0\omega^2 \geq g$ となる. これは, 台座の最大加速度が重力加速度の大きさを上回っていないなければならないことを意味し, 倒立振子は単に台座の上に載せただけではだめで, 自由に回転できるように, かつ, 浮き上がってしまわないように, 固定しなければならない.

4 数値計算によるグラフ表示

初めに, (3.9) 式における絶対値をとる前の関数を, λ, γ の関数として,

$$F(\lambda, \gamma) = \cos(k\pi) \cos(k'\pi) - \frac{k^2 + k'^2}{2kk'} \sin(k\pi) \sin(k'\pi), \quad k = \sqrt{\lambda - \gamma}, \quad k' = \sqrt{\lambda + \gamma} \quad (4.1)$$

と定義したときの数値計算例を示すことにする. この関数は, k, k' が虚数になる場合でも実関数になることに注意する.

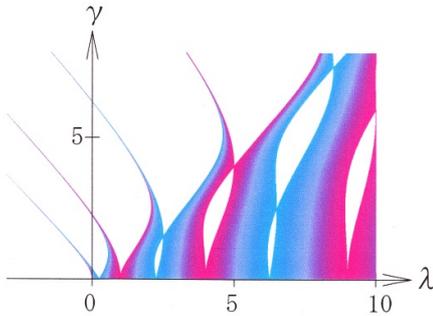


図2 λ と γ の関係

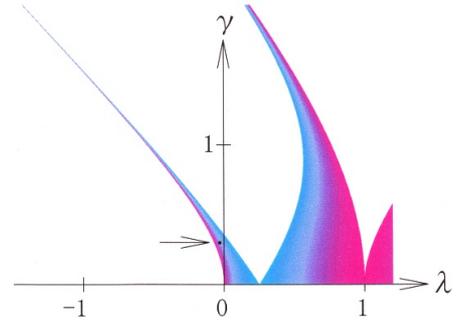


図3 λ と γ の関係 (拡大図)

上の図2は, $-3 \leq \lambda \leq 10, 0 \leq \gamma \leq 8$ の範囲で, $\lambda - \gamma$ 平面を細かな点に分割し, 各点を走査させながら関数 $F(\lambda, \gamma)$ の値を計算し, その絶対値が 1 より大きいときは何も描かず, 1 のときは赤点を描き, その値が 1 より小さくなるにつれ色を連続的に変化させ, -1 になるときに青点を描くようにしたものである. この色が付いた部分が安定領域ということになるが, 倒立振子に関しては, $\lambda < 0$ の部分が適合領域となる. この図で見る

*3 この条件は, $a_{i,j}$ ($i, j = 1, 2$) から作られる 2 行 2 列の行列を対角化したときの対角要素の絶対値が 1 となる条件である. なお, $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1$ なることが証明される.

ように $\lambda < 0$ の部分は、当然ながら $\lambda > 0$ の部分に比べ圧倒的に少なく、倒立振子を作ることはそう簡単ではないことがわかる。図 3 はこの原点付近を拡大し、 $-2 \leq \lambda \leq 1.2$, $0 \leq \gamma \leq 2$ の範囲を示したものである。

図 3 で矢印の先に印した黒点は、倒立振子を作るときの 1 つの目安として実際の値を調べてみるためのものである。このときの値は、

$$\lambda = -0.03, \quad \gamma = 0.3, \quad k = 0.5744 \times i, \quad k' = 0.5196 \quad (4.2)$$

となる。これを (2.10) 式に代入すると、 $g/(\ell\omega^2) = 0.03$, $u_0/\ell = 0.3$ となるので、 $\ell = 1\text{m}$, $g = 9.8\text{m/sec}^2$ とすると、 $u_0 = 0.3\text{m}$, $\omega \cong 18.074/\text{sec}$ となる。この ω の値を回転で作るとすると、回転数にして、秒速約 2.877 回転となる。これはかなり高速な回転であるが、錘の横方向の振動は、これに比べゆっくりとしたものである。

5 ばね付モデル

前節で扱ったモデルは、振子の支点を強制的に上下に振動させるというものであった。この役目をばねでやることにしたらどうなるであろうか。初めに、ばねを伸ばすか、縮めるかして、ばねにエネルギーを与えておくと、その後、振子に上下の振動が与えられ倒立振子ができるのではないかと考えられる。これは、ちょうど、コマに回転エネルギーを与えると、倒れずにそのままの回転を続けるのと同じようなものと考えられる。もちろん、コマは、摩擦でエネルギーを失っていくので、そのうち必ず倒れることにはなるが、ばね付倒立振子もある一定時間の間は、そのまま倒立を続けると考えられる。

5.1 ばねモデル 1

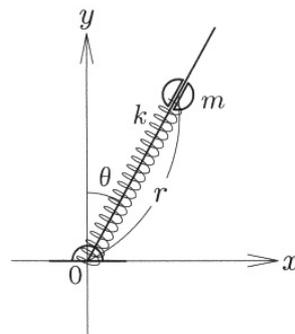


図 4 ばねモデル 1

初めに考えたモデルは、図 4 に示すようなものである。前と同じく、水平方向に x 軸、鉛直上向きに y 軸をとる。原点 O に適当な長さの棒を自由に回転できるように取り付け、この棒に沿って、自然長 r_0 、ばね定数 k のばねを、一端は原点に固定、他端に質量 m の錘を取り付ける。もちろん、この錘は、棒に沿って摩擦無しに動けるようにしておく。任意時刻 t において、棒が鉛直軸 (y 軸) となす角を θ 、原点 O から錘までの距離を r とする。このときの運動方程式を間違いなく作るには、Lagrangian 形式を採用するのがよいであろう。錘の座標 (x, y) と r, θ の関係は、

$$x = r \sin(\theta), \quad y = r \cos(\theta), \quad (5.1)$$

したがって、その速度成分は、

$$\dot{x} = \dot{r} \sin(\theta) + r \cos(\theta) \dot{\theta}, \quad \dot{y} = \dot{r} \cos(\theta) - r \sin(\theta) \dot{\theta}, \quad (5.2)$$

となるので、錘の運動エネルギー K は

$$K = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \quad (5.3)$$

となる。また、位置エネルギー U は、錘とばねの両方を考慮して、

$$U = mgr \cos(\theta) + \frac{1}{2} k (r - r_0)^2 \quad (5.4)$$

となる。したがって、Lagrangian L は

$$L = K - U = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - mgr \cos(\theta) - \frac{1}{2} k (r - r_0)^2 \quad (5.5)$$

となる。これから、2本の Euler-Lagrange 方程式、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad (5.6)$$

を作ると、

$$\begin{aligned} m \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) &= mgr \sin(\theta), \\ m \ddot{r} &= mr \dot{\theta}^2 - mg \cos(\theta) - k(r - r_0) \end{aligned} \quad (5.7)$$

となる。この第1式は、角運動量の時間微分が、重力が作る力のモーメントに等しいという式になっている。また、第2式は、質量と r 方向の加速度を掛けたものが、遠心力、重力の r 方向成分、および、ばねの力の合計となることを示す。かくして、連立非線形微分方程式が得られたわけだが、この方程式をどう扱うかが問題である。

ここで、仮に、 θ は、その時間微分も含めて、十分に小さいものとし、2次以上の項を無視するものとして、 $\sin(\theta) \cong \theta$, $\cos(\theta) \cong 1$ として、(5.7) 式を近似すると、

$$\ddot{\theta} + \frac{2\dot{r}}{r} \dot{\theta} - \frac{g}{r} \theta = 0, \quad \ddot{r} + \frac{k}{m} (r - r_1) = 0 \quad (5.8)$$

となる。ここに、 r_1 は、

$$r_1 = r_0 - \frac{mg}{k} \quad (5.9)$$

で、ばねの自然長から、重力のために下がる分を差し引いた長さである。(5.8) の第2式は単振動で解けるので、その振幅を A として、

$$r = r_1 + A \sin(\omega t), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.10)$$

となる。これを第1式に代入して解くことになるが、これは、Mathieu 方程式以上に難解なものとなる。このモデルで特徴的なことは、 θ の1階微分 $\dot{\theta}$ が存在することである。しかし、ここで、従属変数 θ を

$$\theta = \frac{r_1}{r} \phi \quad (5.11)$$

と θ から ϕ に変換すると, (5.8) の第 1 式は,

$$\ddot{\phi} - \left(\frac{g}{r} + \frac{\ddot{r}}{r} \right) \phi = 0 \quad (5.12)$$

と 1 階微分が存在しない形に変換される. もっとも, この式は, (5.7) の第 1 式から直接導く方が容易である. さらに, この式の \ddot{r} のところに (5.10) 式を代入すると,

$$\ddot{\phi} - \left(\frac{g}{r} - A\omega^2 \frac{\sin(\omega t)}{r} \right) \phi = 0 \quad (5.13)$$

となって, ここで, もし, r_1 が A に比べ十分大きく, 分母の r を r_1 とみなすことができれば, この方程式は (2.5) 式と同じ形となり, 倒立振子が成立するものと考えられる. あるいは, r を r_1 とみなさない場合でも, 3 節で扱ったように, sine 関数に符号関数 sgn を付けるやり方を採用したときは, 解析的に解くことが可能なので, 倒立振子ができるであろう.

5.2 ばねモデル 2

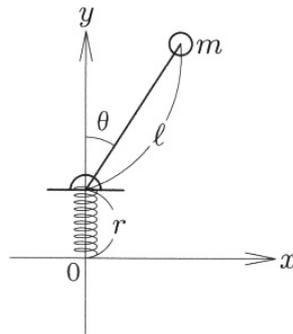


図 5 ばねモデル 2

2, 3 節で扱った倒立振子により近いものとして, つぎに考えたのが, 図 5 に示すようなものである. 原点 O から鉛直に立てた棒に沿って, 自然長 r_0 , ばね定数 k のばねを, 一端は原点に固定し, 他端は棒に沿って自由に動けるようにしておく. このばねの先に, 長さ l の棒を固定し, この棒は自由に回転できるようにしておき, 棒の先には質量 m の錘を取り付ける. 時刻 t におけるばねの長さを r , 錘が付いた棒の傾き角を θ とする. 錘の座標 (x, y) と r, θ の幾何学的関係は,

$$x = l \sin(\theta), \quad y = l \cos(\theta) + r \quad (5.14)$$

となる. これから, 速度成分は,

$$\dot{x} = l \cos(\theta) \dot{\theta}, \quad \dot{y} = -l \sin(\theta) \dot{\theta} + \dot{r} \quad (5.15)$$

となるので, 錘の運動エネルギー K は

$$K = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m (\ell^2 \dot{\theta}^2 - 2\ell \sin(\theta) \dot{\theta} \dot{r} + \dot{r}^2) \quad (5.16)$$

となり, また, 位置エネルギー U は

$$U = mg(\ell \cos(\theta) + r) + \frac{1}{2} k (r - r_0)^2 \quad (5.17)$$

となる。これから、Lagrangian L は、

$$L = K - U = \frac{1}{2}m(\ell^2\dot{\theta}^2 - 2\ell\sin(\theta)\dot{\theta}\dot{r} + \dot{r}^2) - mg(\ell\cos(\theta) + r) - \frac{1}{2}k(r - r_0)^2 \quad (5.18)$$

となり、 θ と r を独立変数とした Euler-Lagrange 方程式を求めると、

$$\begin{aligned} m\ell\ddot{\theta} &= m\sin(\theta)\dot{r} + mg\sin(\theta), \\ m\ddot{r} &= m\ell\cos(\theta)\dot{\theta}^2 + m\ell\sin(\theta)\ddot{\theta} - k(r - r_1) \end{aligned} \quad (5.19)$$

を得る。ここに、 r_1 は (5.9) 式で定義されたものである。この第 1 式は、質量と θ 方向加速度の積が、慣性力の θ 方向成分、および、重力の θ 方向成分の和となることを示す。また、第 2 式は、質量と r 方向加速度の積が、遠心力の r 方向成分、 θ 方向の慣性力の r 方向成分、および、ばねの力の合計となることを示す。これも非線形の連立微分方程式で、まともには解けそうもないが、モデル 1 のときのように、 θ に関して線形近似をすると、

$$\ddot{\theta} - \frac{g + \ddot{r}}{\ell}\theta = 0, \quad \ddot{r} + \frac{k}{m}(r - r_1) = 0 \quad (5.20)$$

となる。この第 2 式から、モデル 1 のときと同じく、 r は単振動の (5.10) 式となるので、それを第 1 式に代入すると、初めに述べた (2.3) 式と同じ形になるので、倒立振子が作られると考えられる。ただし、モデル 1 も含めて、これらはコマの運動と同じく、摩擦によってエネルギーを失うので、途中でエネルギーを補給しないかぎり、ある程度の時間の後には倒れてしまう。

6 おわりに

ここで扱った倒立振子の問題は、古典力学の傑作中の傑作とも言えるものであるが、振子を逆さにして安定させるためには、かなり微妙なバランスを保つことが必要であることがよく理解できる。この振子の支点を上下に振動させる替わりに、2 種類のばね付モデルも考えてみた。これらモデルを考えているうちに、おもちゃとして、実際に作ってみたいくなったが、いかんせん、材料をどうやって集めたらよいのかが、わからない。筆者が子供のころは、このようなガラクタ部品を扱うお店があったのだが、いまは、すべて潰れてしまい存在しない。

[謝辞]

今回もこの原稿を書くにあたって、京都大学名誉教授の中西襄先生にご精読いただき、いくつかのコメントをいただきました。ここに、謹んで感謝いたします。

積分型のマクスウェル方程式

岩崎正春¹

Maxwell Equations in the Integral Form

Masaharu IWASAKI²

1 はじめに

現在の「高校物理」においては、電磁気学の法則は積分型で学ぶ。理由は高校物理の学習では微積分を用いない建前になっているからと思われる。そこで電磁気学の法則を、電束、磁束、起電力等を用いて記述するのであるが、たいてい電磁誘導まで学びマクスウェル方程式の最終段階の「変位電流」までは言及しないようである。この小論では、この最後の方程式、つまり変位電流を含むアンペールマクスウェル方程式を積分型で導出する。我々が前提とする基本法則は次の4つである。

1. 特殊相対性原理
2. 作用反作用の法則
3. クーロン力およびローレンツ力
4. 力の重ね合わせの原理

われわれの議論の特徴は、電場と磁場をできるだけ対等に取り扱うことである。また、起電力に対応する物理量として「起磁力」が重要な役割を演じる。なお簡単のため、以下では議論はすべて真空中に限定し、物理量の単位系などの詳細は省いてある。³

2 マクスウェル方程式（1）

まず静電場、静磁場のまとめから始めよう。電荷 q から距離 r での電場（および磁場）はクーロンにより逆2乗の法則になることが示された。

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

右辺の ϵ_0 は真空の誘電率と呼ばれる定数である。これを積分型にするため、電荷を囲む半径 r の球面 S を考え、球面を貫く電気力線の総数を面積分の形で書く。

$$\Phi_E^{(S)} \equiv \epsilon_0 \int_S E dS = q$$

つぎに、この法則を一般化する。右辺は球面に限らず任意の閉曲面に対して成り立つことに注意する。ただし、積分はベクトル場に対する面積分と定義しなければならない。曲面の向きは面の外に向かって正とする。さらに閉曲面 S が電荷の外側にあればゼロになる。電荷が多数ある場合は、電場の重ね合わせの原理により、次のように一般化される。

$$\Phi_E^{(S)} = \sum_i^{(S)} q_i \tag{2.1}$$

¹miwasaki@cure.ocn.ne.jp

²Professor emeritus, Kochi University

³本稿の内容の初等的な解説は [1] の中で述べられている。

この方程式はどんな閉曲面 S についても成り立ち、右辺の和は閉曲面の内部に含まれる電荷の総和である。これをガウスの法則という。磁場に対しても電場の代わりに磁場 H に置き換えると、同様な法則が成り立つので、

$$\Phi_M^{(S)} \equiv \int_S B \, dS = 0 \quad (2.2)$$

ただし、右辺において $B = \mu_0 H$ で定義される磁束密度を導入した。 μ_0 は真空の透磁率と呼ばれる定数である。閉曲面 S から出ていく磁力線がないということは、単独磁荷は自然界に存在しないことを意味している。

さて電場と磁場は、はじめは全然無関係な物理量として個別に導入された。ところがエールステッドにより電流の周りに置かれた磁石に力（磁場）が生じることが発見され、電気と磁気とは密接に関係していることが明らかにされた。磁場の中に置かれた長さ Δs の電流は、垂直方向に次の力を受ける。

$$F = BI\Delta s \quad (2.3)$$

電流の代わりに速度 v の点電荷 q の流れを考えると、点電荷が磁場から受ける力はその方向まで含め

$$F = qv \times B \quad (2.4)$$

と表され、よく知られたローレンツ力となる。この力の反作用として、直線電流 I の周りには磁場が発生し、それは次のように表されることをアンペールは示した。

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

右辺の r は直線電流からの距離である。この法則を積分型で書くため、「起磁力」と呼ばれる量を導入しよう。電流に垂直な任意の平面上に、電流の通る点を中心に半径 r の円 C を描く。 C には適宜「向き」を付けているとする。起磁力とは単位磁荷を円 C に沿って一回りしたときの仕事量と定義する。

$$V_M^{(C)} \equiv \oint_C H \, dl = I \quad (2.5)$$

この起磁力は、あとで出てくる電場における起電力に対応する量である。起磁力という言葉は電磁気学ではあまり使われないが、この小論では非常に重要な役割を果たすキーワードになる。⁴

同様に上の方程式を一般化しよう。起磁力 $V_M^{(C)}$ は円の半径によらないが、実は電流を含む任意の閉曲線であれば等式は成立している。もちろん、そのためには右辺の定義式をベクトル場の線積分に置き換える必要がある。同時に、閉曲線 C を縁とする曲面 S の向きも次のように定義する。 C の向きに沿って右ねじを回したとき、ねじが進む向きを曲面 S の正の向きとする。これにともない、電流が曲面の正の向きに進むとき、電流も正にとる。また、閉曲線が電流の外側にあれば、起磁力はゼロになることが分かる。つまり、アンペールの法則は次のように拡張される。

$$V_M^{(C)} = \sum_i^{(S)} J_i \quad (2.6)$$

右辺の和は曲面 S を貫く電流についてとるものとする。これをアンペールの法則と呼ぶ。

3 マクスウェル方程式（2）

次の段階として、電磁場が時間とともに変動する場合を考えよう。まずファラデーにより発見された電磁誘導について考えてみよう。図1のようにループ状の導線に向かって磁石のN極を近づけると、導線に電流が流れる。この現象が電磁誘導である。

⁴日本語で書かれた本では高橋秀俊著『電磁気学』[2]にこの言葉が出てくる

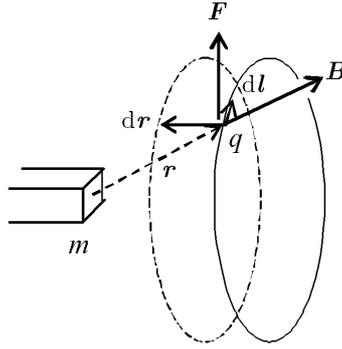


図 1: 電磁誘導

われわれは磁石が静止し、導線が磁石に向かって速度 \boldsymbol{v} で運動する座標系でこの現象を考察する。(特殊相対性原理を使っていることに注意) 図 1 で描かれているように、磁石を点磁荷 m 、そこから位置 \boldsymbol{r} の導線上に仮想電荷 q を考える。微小時間 Δt の間に電荷が導線とともに $\Delta \boldsymbol{r}$ 動いたとする。このとき電荷は、ローレンツ力 $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ を受けるから、導線上の微小区間 $\Delta \boldsymbol{l}$ 内に電位差を生ずる。それらを寄せ集めると、閉曲線 C 内に発生する電位差 (起電力) は次のようになる。

$$V_E^{(C)} = \sum (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \Delta \boldsymbol{l} = \sum (\Delta \boldsymbol{l} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{B}$$

右辺の和は導線上の微小区間の和 (積分) である。一方、曲面 S を貫く磁束を $\Phi_M^{(S)}$ とすると、時間 Δt の間の変化は

$$\Delta \Phi_M^{(S)} = \sum (\Delta \boldsymbol{r} \times \Delta \boldsymbol{l}) \cdot \boldsymbol{B} = \sum (\boldsymbol{v} \times \Delta \boldsymbol{l}) \cdot \boldsymbol{B} \Delta t$$

と書ける。上の 2 つの式を比べると次の等式が得られる。

$$V_E^{(C)} = - \frac{\Delta \Phi_M^{(S)}}{\Delta t} \quad (3.1)$$

これがファラデーの電磁誘導の法則であり、磁束の時間変化がその周りに電場を生ずることを示している。この電場は静電場と異なり、端点を持たずループ状に発生する。

さて、電場と磁場を入れ替えて同じことをすればどうなるだろうか？つまり、電荷をループ状の導線に向かって運動させれば導線に磁場が発生するであろうか？これを図 2 に示す。

こんどは導線が静止し、電荷 q が導線に向かって速度 \boldsymbol{v} で運動する座標系で考える。このとき導線上に置かれた仮想磁荷 m は、電荷 q にローレンツ力 $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ を及ぼす。ここで作用反作用の法則を用いる。つまり、磁荷は電荷から力 $-\boldsymbol{F}$ を受けるので、導線上に磁場が生ずる。微小区間 $\Delta \boldsymbol{l}$ の間に生じる磁位差を寄せ集める (起磁力) と次のようになる。

$$V_M^{(C)} = - \sum q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \Delta \boldsymbol{l} = \sum q(\boldsymbol{v} \times \Delta \boldsymbol{l}) \cdot \boldsymbol{B}$$

もし仮想磁荷を使いたくなければ、上式を次のように変形する。

$$V_M^{(C)} = \sum \frac{q}{4\pi\Delta t} \left(\frac{\Delta \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}}{r^3} \right) \cdot \Delta \boldsymbol{l} \quad (3.2)$$

この表式は、電流素片が導線上に作る磁場 (ビオ-サバールの法則) による起磁力を表している。

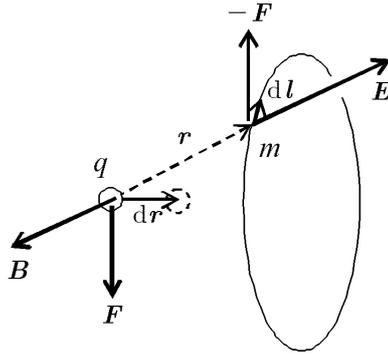


図 2: 双対電磁誘導

一方，曲面 S を貫く電荷 q の作る電束を $\Phi_E^{(S)}$ とすると，時間 Δt の間の電束の変化は図 1 と同様に次式で与えられる．

$$\Delta\Phi_E^{(S)} = \sum (-\Delta\mathbf{r} \times \Delta\mathbf{l}) \cdot \varepsilon_0 \mathbf{E} = \sum (\Delta\mathbf{l} \times \Delta\mathbf{r}) \cdot \frac{q\mathbf{r}}{4\pi r^3}$$

上の 2 つの式を比べることにより，結局次の式を得る．

$$V_M^{(C)} = \frac{\Delta\Phi_E^{(S)}}{\Delta t} \quad (3.3)$$

予想通り，電場の時間変化はその周りに磁場を生ずることが分かる．これを双対電磁誘導と呼ぶ．もちろん電流があれば前節のアンペールの法則より起磁力が生まれるので，起磁力に対する法則は次のように一般化される（アンペール-マクスウェル方程式）．

$$V_M^{(C)} = \sum_i^{(S)} I_i + \frac{\Delta\Phi_E^{(S)}}{\Delta t} \quad (3.4)$$

右辺第 2 項は電荷の流れではないが，ちょうど電流の同じ役割をしているという意味で真空の「変位電流」と呼ばれている．

4 まとめ

ここで今までに得られた積分形で書かれたマクスウェルの方程式⁵をもう一度まとめておこう．

- (1) $\Phi_E^{(S)} = \sum_i^{(S)} q_i$
- (2) $\Phi_M^{(S)} = 0$
- (3) $V_E^{(C)} = -\frac{\Delta\Phi_M^{(S)}}{\Delta t}$
- (4) $V_M^{(C)} = \sum_i^{(C)} I_i + \frac{\Delta\Phi_E^{(S)}}{\Delta t}$

方程式 (3) と (4) の起電力，起磁力はもともとループ状の導線の中で定義された量であった．しかし，それらは電場と磁場さえ与えられたなら導線のあるなしにかかわらず定義できる．そこで上式を空間のあらゆる場所で成り立つ方程式と見なす．実際 (3) と (4) から真空中において電場と磁場が周期的に変動する解の

⁵左辺の線積分にストークスの定理を用いると，これらから良く知られた微分型のマクスウェル方程式が出てくる．

存在を示すことができる。さらに、この波動（電磁波）とその速度をこの枠組みで求めることができるが、詳細については文献 [1] に初等的解法がある。

最後に (1) ~ (4) の方程式から簡単に導くことができる重要な性質に触れておこう。(3) および (4) の閉曲線 C とそれを縁とする任意の曲面 S に着目し、S を球状に膨らませ縁 C を一点に近づける極限をとると起電力、起磁力はゼロになるから次式を得る。

$$\frac{\Delta \Phi_M^{(S)}}{\Delta t} = 0 \quad (4.1)$$

$$\sum_i^{(S)} I_i + \frac{\Delta \Phi_E^{(S)}}{\Delta t} = 0 \quad (4.2)$$

第2式の右辺に (1) を代入すると次式を得る。

$$-\sum_i^{(S)} I_i = \frac{\Delta \sum_i^{(S)} q_i}{\Delta t} \quad (4.3)$$

左辺は閉曲面の中へ流入する電荷を表し、右辺はその中に蓄積する電荷の時間変化を表している。つまり、電荷保存則が得られたわけである。この式を (4.2) へ戻してやると

$$\frac{\Delta(\Phi_E^{(S)} - \sum_i^{(S)} q_i)}{\Delta t} = 0$$

となり、(4.1) と合わせてガウスの法則が時間がたっても成り立つことを保証している。換言すれば、ガウスの法則 (1) と (2) は運動方程式 (3) と (4) の初期条件を与えている。

「はじめに」で述べたように、高校物理では (1) ~ (3) までの方程式を学ぶ。これに最後の (4) まで含めるとより一貫した理論体系を学ぶことになるのではないだろうか。

参考文献

- [1] 岩崎正春, 「物理学の初歩」(星雲社, 2013) .
- [2] 高橋秀俊, 「電磁気学」(裳華房, 1959) .

分数冪微積で現れたリー環の適切な完備化

浅田 明¹

Appropriate Completion of the Lie Algebra arising from Fractional Calculus

Akira ASADA²

はじめに

数学・物理通信 5-6の「分数冪微積であらわれた群と離散デルタ・ポテンシャル」 6-7の「分数冪微積で現れた群の完備化とデルタ関数の無限和」で1経数群 $\{\frac{d^a}{dx^a} | a \in \mathbb{R}\}$ と $\{x^a | a \in \mathbb{R}\}$ から生成された群 $G_{\mathbb{R}}$ とそれらの生成作用素である $\log(\frac{d}{dx})$ と $\log x$ から生成されたリー環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ について報告してきたが これはその続編である. これまでの報告で $G_{\mathbb{R}}$ と $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ の関係をしらべる上で $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ に適当な位相をいれてそれによる完備化を考えることが重要なことは示されたが どのような完備化が適切かはわからなかった. 今回適切な完備化の候補となるものが見つかったのでそれを報告する.

目次

- §1. 積分変換 \mathcal{R} . 群 $G_{\mathbb{R}}$, リー環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ と δ 関数の無限和
- §2. 空間 $\text{Exp}(\mathbb{C})$, $\text{Ent}(\mathbb{C})$ とその双対空間
- §3. δ_a のテイラー展開
- §4. $\iota_{\Psi} f(\delta)$ の計算
- §5. 多変数の場合

1 積分変換 \mathcal{R} , 群 $G_{\mathbb{R}}$, リー環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ と δ 関数の無限和

この節では準備としてこれまで得られたことから必要な所と残された問題などをまとめて説明する. なお分数冪微積については [6], 微分の対数については [8] 参照.

積分変換 \mathcal{R} を

$$\mathcal{R}[f(s)](x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^s}{\Gamma(1+s)} f(s) ds, \quad (1.1)$$

で定義する ([3]). C^{∞} -級で $\frac{f(s)}{\Gamma(1+s)}$ が急減少の関数の空間を \mathbf{H} とすれば $f \in \mathbf{H}$ のとき

$$\frac{d^a}{dx^a} \mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{R}[\tau_a f(s)](x), \quad \tau_a f(s) = f(s+a), \quad (1.2)$$

である. ただし $x < 0$ のとき $x^s = |x|^s e^{ia\pi}$ などとさだめるか または $\mathcal{R}[f](x)$ を $\mathbb{C}^{\times} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ の上の多価関数とみる.

\mathcal{R} は超関数にたいしても定義でき $\delta_a : \delta_a(s) = \delta(s-a)$ とすれば

$$\mathcal{R}[\delta_a](x) = \frac{x^a}{\Gamma(1+a)},$$

である. これから 積分変換

$$\mathcal{N}[f(s)](x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(s) ds, \quad (1.3)$$

¹asada-a@poporo.ne.jp

²Professor emeritus, Sinsyu University

と一般化ボレル変換: $\mathcal{B}[s^a](x) = \frac{x^a}{\Gamma(1+a)}$ の線形拡張, を使って

$$\mathcal{R} = \mathcal{B} \circ \mathcal{N} \quad (1.4)$$

と分解される ([3], ボレル変換については [7] 参照). この分解から $\text{Ker}\mathcal{R}$ は $\{\delta_{-n}; n \in \mathbb{N}\}$ で張られることが解る. よって \mathcal{R} を関数の空間に働く変換とすれば逆を持つ. これから $G_{\mathbb{R}}, \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ が関数空間に働いているとすれば

$$G_{\mathbb{R}}^b = \mathcal{R}G_{\mathbb{R}}\mathcal{R}^{-1}, \quad \mathfrak{g}^b = \mathcal{R}\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}\mathcal{R}^{-1},$$

が定義できる. 簡単の為 $G_{\mathbb{R}}^b, \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^b$ と $G_{\mathbb{R}}, \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ と同一視することがある.

$G_{\mathbb{R}}^b$ の中には $\{\frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+s-a)} | a \in \mathbb{R}^\times\}: \mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, から (乗法で生成される) 自由アーベル群 $A_{\mathbb{R}}^b$ が極大正規部分群として含まれ

$$G_{\mathbb{R}}^b \cong \mathbb{R} \times A_{\mathbb{R}}^b, \quad \mathbb{R} = \{\tau_a | a \in \mathbb{R}\},$$

となる. $G_{\mathbb{R}}$ では $A_{\mathbb{R}}^b$ に対応する部分群 $A_{\mathbb{R}}$ は分数冪 E オイラー微分 $E_\ell^a = x^a \frac{d^a}{dx^a}$ から生成される群である.

また $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^b$ は $\frac{d}{ds}$ と $\Psi(1+s)$ が生成されるリー環である ([4]). $\Psi(1+s)$ から生成される部分環 \mathfrak{a} は極大イデアル \mathfrak{l} で $\Psi^{(n)}(1+s)$ から生成される部分イデアル \mathfrak{a}_n を含む.

$$\mathfrak{g}^b = \mathcal{R} \oplus \mathfrak{a},$$

だが \mathfrak{a} に $\sum_n \frac{a^n}{n!} \Psi^{(n)}(1+s)$ が収束するような位相を入れ それによる完備化を $\bar{\mathfrak{a}}$ とすれば

$$\vartheta: A_{\mathbb{R}}^b \rightarrow \bar{\mathfrak{a}}, \quad \vartheta f = f^{-1} \frac{df}{ds},$$

は中への同型である. その像は \mathfrak{a}_1 の完備化に含まれる. また $\Psi^{(n)}(1+s)$, $n \geq 1$ は ϑ の像に現れない. [5] ではこれが現れるような拡大を与えているが ϑ が上への同型にはならないなどまだ不十分だった.

これは $G_{\mathbb{R}}$ には欠落があることを示唆している. これを補うため ボレル変換を $G_{\mathbb{R}}$ に添加するのが適切であると主張して それに従って拡大された群を $G_{\mathbb{R}}^b$ とする. $G_{\mathbb{R}}^b$ の対応する拡大では $\Gamma(1+s)$ を添加することにあたる. $A_{\mathbb{R}}^b$ の拡大としては $\{\Gamma(1+s+a) | a \in \mathbb{R}\}$ から生成される乗法による自由アーベル群を考えることになる. 簡単のためこの群を $A_{\mathbb{R}}^b$ と書く.

群として $A_{\mathbb{R}}^b$ は $\{\delta_a | a \in \mathbb{R}\}$ から加法で生成される自由アーベル群 $D_{\mathbb{R};\mathbb{Z}}$ と同型だが この同型は $\mu_{-x, \Psi}$;

$$\mu_{-x, \Psi} T = \exp\left(T \int_{-x}^x \Psi(1+x+t) dt\right), \quad (1.5)$$

であたえられる ([4]). ただし T は $f(x, t)$ の変数 t に働くとする (x はパラメーター). $\vartheta \circ \mu_{-x, \Psi} = \iota_\Psi$ は

$$\iota_\Psi T = T_t \Psi(1+x+t), \quad (1.6)$$

である. とくに $T = \delta_a$ で a が負の整数でなければ $\iota_\Psi \delta_a = \Psi(1+x+a)$ となる. しかし $\Psi^{(n)}(1+s)$, $n \geq 1$ は $\vartheta: A_{\mathbb{R}}^b \rightarrow \bar{\mathfrak{a}}$ の像には現れない.

ここでは ι_Ψ の像に $\Psi^{(n)}(1+s)$, $n \geq 1$ が現れる $D_{\mathbb{R};\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$ の拡大として δ -関数の無限和 $\sum_n c_n \delta^n$, $\sum_n c_n x^n$ は有限指数型関数, の空間 $\text{Exp}(\mathbb{C})_\delta$ を用いることを提案する. 広義一様収束の位相を入れた整関数の空間を $\text{Ent}(\mathbb{C})$ とすれば

$$\text{Exp}(\mathbb{C})_\delta = \text{Ent}(\mathbb{C})^\dagger$$

だから $\text{Exp}(\mathbb{C})_\delta$ の元は一般化関数と解釈でき $\delta_a = \sum_n (-1)^n \frac{a^n}{n!} \delta^{(n)}$ が成り立つ. この同一視で

$$D_{\mathbb{R};\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C} \subset \text{Exp}(\mathbb{C})_\delta$$

となる。また $\mu_{-x, \Psi}$ は $\text{Exp}(\mathbb{C})_\delta$ の上でも定義できる。これから

$$A_{\mathbb{C}; \text{exp}}^{\natural} = \mu_{-x; \Psi}(\text{Exp}(\mathbb{C})_\delta), \quad \mathfrak{a}_{\text{exp}} = \vartheta(A_{\mathbb{C}; \text{exp}}^{\natural}), \quad (1.7)$$

と定義する。また $A_{\mathbb{C}; \text{exp}}^{\natural}$ の $\mathbb{C} = \{\tau_a | a \in \mathbb{C}\}$ による拡大を $G_{\mathbb{C}; \text{exp}}^{\natural}, \mathbb{C} \frac{d}{ds} \oplus \mathfrak{a}_{\text{exp}}$ にリ一環の構造を入れたものを $\mathfrak{g}_{\text{exp}}$ とする。本稿の目的は次の主張の妥当性を示すことである。

主張. $G_{\mathbb{C}; \text{exp}}^{\natural}, \mathfrak{g}_{\text{exp}}$ が $G_{\mathbb{R}}, \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ の適切な完備化である。

ただしこの主張は分数幂微積を（多価の）解析関数の上の作用素と見て得られているので非解析的関数への作用を考える場合では不十分かもしれない。

多変数の場合も同じだが出発点になる群は \mathbb{C}^n 上の整関数の双対空間ではなく $\text{Exp}(\mathbb{C})_\delta$ の n -直和 $\text{Exp}(\mathbb{C})_\delta|_{x=s_1} \oplus \cdots \oplus \text{Exp}(\mathbb{C})_\delta|_{x=s_n}$, となる（この記法の正確な定義は5節で与える）。したがって座標変換はおおきく制限される。またこの形を見るとここでの話は多変数と言っても本質的には1変数の話の形式的拡張でしかない。

2 空間 $\text{Exp}(\mathbb{C}), \text{Ent}(\mathbb{C})$ とその双対空間

全平面 \mathbb{C} 上の有限指数型関数と整関数の空間をそれぞれ $\text{Exp}(\mathbb{C}), \text{Ent}(\mathbb{C})$ と書く。位相は以下のように入れる。

$\text{Exp}(\mathbb{C})$ の位相. $f \in \text{Exp}(\mathbb{C}), K$ は \mathbb{C} のコンパクト集合として $U(f; K, \epsilon, C, c, \delta) = \{g | |f(x) - g(x)| < \epsilon, x \in K, |g(x)| \leq Ce^{c|x|}(\delta + |f(x)|)\}, C \geq 1, c, \delta > 0$ を f の近傍とする。

$\text{Ent}(\mathbb{C})$ の位相. $f \in \text{Ent}(\mathbb{C})$ として $U(f, K, \epsilon) = \{g | |f(x) - g(x)| < \epsilon, x \in K\}$ を f の近傍とする。

これらの位相はそのまま使うより次の収束条件として使うのが便利である。

$\text{Exp}(\mathbb{C})$ の関数列の収束. $\text{Exp}(\mathbb{C})$ の関数列 $\{f_n(x)\}$ はすべての $f_n(x)$ が $|f_n(x)| \leq Ce^{c|x|}$ と評価され $f(x)$ に広義一様収束するとき $\text{Exp}(\mathbb{C})$ するの位相で $f(x)$ に収束する。またこの収束で $\text{Exp}(\mathbb{C})$ は完備である。

$\text{Ent}(\mathbb{C})$ の関数列の収束. $\text{Ent}(\mathbb{C})$ の位相での関数列の収束は広義一様収束である。この位相で $\text{Ent}(\mathbb{C})$ は完備である。

この収束条件から多項式環 $\mathbb{C}[x]$ は $\text{Exp}(\mathbb{C}), \text{Ent}(\mathbb{C})$ の中でそれらの位相によって稠密である。

補題 1. $f(x) \in \text{Exp}(\mathbb{C}), g(x) \in \text{Ent}(\mathbb{C}), f(x) = \sum_n a_n x^n, g(x) = \sum_n b_n x^n$ とすれば $\sum_n n! a_n b_n$ は収束する。

証明. $f(x)$ は有限指数型だから $|a_n| \leq C \frac{M^n}{n!}$ がすべての n で成立する $C > 0, M > 0$ がある。よって

$$\left| \sum_n n! a_n b_n \right| \leq C \left(\sum_n M^n |b_n| \right),$$

である。 $\sum_n |b_n| x^n$ は整関数だから $\sum_n |b_n| M^n$ は収束する。よって $(\sum_{n=N}^L n! a_n b_n \rightarrow 0$ となって) 補題が成立する。

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots), \mathbf{ab} = (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots)$ 等と書き

$$\rho(\mathbf{a}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}. \quad r(\mathbf{a}) = \frac{1}{\rho(\mathbf{a})},$$

とする。ただし $\rho(\mathbf{a}) = 0$ のとき $r(\mathbf{a}) = 0, \rho(\mathbf{a}) = \infty$ のとき $r(\mathbf{a}) = 0$ とする。 $\sum_n a_n x^n$ が整関数であれば $\rho(\mathbf{a}) = 0$ である。

補題 2. 次が成立する。

1. \mathbf{ab} が $\rho(\mathbf{a}) < \infty$ となるすべての \mathbf{a} について収束すれば $\rho(\mathbf{b}) = 0$ である.

2. $\rho(\mathbf{b}) = 0$ となるすべての \mathbf{b} について \mathbf{ab} が収束すれば $\rho(\mathbf{a}) < \infty$ である.

証明. $\mathbf{a} = (t, t^2, \dots)$ であれば $\rho(\mathbf{a}) = |t|$ である. $\rho(\mathbf{ab})$ は収束するから $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n t^n = 0$ である. よって任意の $t > 0$ について $\limsup_{n \rightarrow \infty} |b_n|^{1/n} < t$ である. よって 1 が成立する.

$\rho(\mathbf{a}) = \infty$ であれば (a_1, a_2, \dots) の部分列 $(a_{n_1}, a_{n_2}, \dots)$ があつて $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_{n_k}|^{1/n_k} = \infty$ となる. よって任意の $\epsilon > 0$ について

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |a_{n_k}^\epsilon|^{1/n_k} = \infty$$

である. 数列 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots)$ を $\begin{cases} b_{n_k} = |a_{n_k}|^{-\epsilon}, \\ b_n = 0, n \notin \{n_1, n_2, \dots\} \end{cases}$ とすれば $\rho(\mathbf{b}) = 0$ で \mathbf{ab} は $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n b_n| = \infty$ だから発散する. よって 2 が成立する.

冪級数 $h(x) = \sum_n c_n x^n$ にたいし $h(\delta) = \sum_n c_n \delta^{(n)}$ とおく. 冪級数の空間 F にたいし

$$F_\delta = \{h(\delta) | h(x) \in F\}$$

と置く. 殆どの $h(\delta)$ はシュワルツの意味での超関数ではないが適当な関数空間の上の一般化関数 (解析汎関数) になる場合がある.

定理 1. 次が成立する.

$$\text{Exp}(\mathbb{C})_\delta = \text{Ent}(\mathbb{C})^\dagger, \quad \text{Ent}(\mathbb{C})_\delta = \text{Exp}(\mathbb{C})_\delta. \quad (2.1)$$

証明. $f(x) = \sum_n a_n x^n \in \text{Exp}(\mathbb{C}), g(x) = \sum_n b_n x^n \in \text{Ent}(\mathbb{C})$ とすれば補題 1 により

$$f(\delta)g(x) = \sum_n (-1)^n n! a_n b_n, \quad g(\delta)f(x) = \sum_n (-1)^n n! a_n b_n,$$

である. よって

$$\text{Exp}(\mathbb{C})_\delta \subset \text{Ent}(\mathbb{C})^\dagger, \quad \text{Ent}(\mathbb{C})_\delta \subset \text{Exp}(\mathbb{C})^\dagger$$

となる.

$\mathbb{C}[x]$ は $\text{Exp}(\mathbb{C}), \text{Ent}(\mathbb{C})$ で稠密だからこれらの空間の上の線形汎関数 T は $Tx^n, n = 0, 1, 2, \dots$ で定まる. $Tx^n = c_n$ であれば $Tx^n = (-1)^n \frac{c_n}{n!} \delta^{(n)} x^n$ だから

$$T = h(\delta), \quad h(x) = \sum_n (-1)^n \frac{c_n}{n!} \delta^{(n)},$$

と書ける. これと補題 2 の 1 から $\text{Exp}(\mathbb{C})^\dagger \subset \text{Ent}(\mathbb{C})_\delta$ が 2 から $\text{Ent}(\mathbb{C})^\dagger \subset \text{Exp}(\mathbb{C})_\delta$ が導かれ定理が成り立つ.

(8) から $f(\delta), f(x)$ は有限指数型関数, は整関数の空間の上の一般化関数と見ることができる. また $f(x)$ が整関数であれば $f(\delta)$ は有限指数型関数の空間の上の一般化関数である.

定理 1 は δ -関数とその微分の空間が適当な整関数の空間の上の一般化関数の空間になるような空間の中で $\text{Exp}(\mathbb{C})_\delta$ がある意味で極小であることを示している.

注意. ボレル変換 \mathcal{B} ;

$$\mathcal{B}[f(x)](s) = \frac{1}{2\pi i} \oint e^{\frac{s}{x}} \frac{f(x)}{x} dx,$$

により原点での正則関数の芽の環（原点での収束冪級数の環） \mathcal{O} は $\text{Exp}(\mathbb{C})$ と同型になる；

$$\mathcal{B} : \mathcal{O} \cong \text{Exp}(\mathbb{C}).$$

よって定理 1 は \mathcal{O} と $\text{Ent}(\mathbb{C})$ との双対性

$$(f(x), g(x)) = \frac{1}{2\pi i} \oint f(x)g\left(\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x}, \quad f(x) \in \mathcal{O}, \quad g(x) \in \text{Ent}(\mathbb{C}),$$

の言い換えである。またこの双対性では $\delta^{(n)}$ は $\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{x}\right)$ で表現される。

3 δ_a のテイラー展開

$g(x) \in \text{Ent}(\mathbb{C})$ であれば任意の $a \in \mathbb{C}$ について

$$g(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} g^{(n)}(0),$$

だから

$$\delta_a g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^n}{n!} \delta^{(n)} g(x), \quad (3.1)$$

である。よって $\text{Ent}(\mathbb{C})$ や $\text{Exp}(\mathbb{C})$ の上の一般化関数として $\delta_a(x) = \delta(x - a)$ は

$$\delta_a = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^n}{n!} \delta^{(n)}, \quad (3.2)$$

とテイラー展開される。 $f_a(x) = e^{-ax}$ とすれば (7) は $\delta_a = f_a(\delta)$ と書ける。より一般に $f_{a,k}(x) = x^k e^{-ax}$ とすれば

$$\delta_a^{(k)} = f_{a,k}(\delta), \quad (3.3)$$

である。(3),(4), から

命題 1. $\{\delta_a^{(k)} \mid a \in \mathbb{C}, k = 0, 1, 2, \dots\}$ で生成される \mathbb{C} -ベクトル空間を $D_{\mathbb{C};\mathbb{C}}^d$ とすれば 写像

$$\delta_a^{(k)} \rightarrow f_{a,k}(\delta) \quad (3.4)$$

により $D_{\mathbb{C};\mathbb{C}}^d$ は $\text{Exp}(\mathbb{C})_\delta$ の部分加群とみなせる。

$D_{\mathbb{C};\mathbb{C}}^d$ は部分加群として実数全体から生成される自由アーベル 1 群 $D_{\mathbb{R};\mathbb{Z}}$ ；

$$D_{\mathbb{R};\mathbb{Z}} \cong \left\{ \sum_k n_k \delta_{a_k} \mid n_k \in \mathbb{Z}; a_k \in \mathbb{R} \right\},$$

を含む。 $D_{\mathbb{R};\mathbb{Z}}$ は $\left\{ \frac{d^a}{dx^a} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ と $\{x^a \mid a \in \mathbb{R}\}$ で生成される群の最大アーベル部分群 $A_{\mathbb{R}}$ に $\Gamma(1+s)$ を添加した群 $A_{\mathbb{R}}^{\natural}$ と同型でこの同型は写像 $\mu_{-x, \Psi}$ ；

$$\mu_{-x, \Psi} T = \exp\left(T \int_{-x}^x \Psi(1+x+t) dt\right),$$

で与えられる。また 1 経数群 $\left\{ \frac{d^a}{dx^a} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ と $\{x^a \mid a \in \mathbb{R}\}$ の生成作用素 $\log\left(\frac{d}{dx}\right)$ と $\log x$ で生成されるリー環の極大イデアルの適当な完備化 \bar{a} と $A_{\mathbb{R}}^{\natural}$ の間には中への同型写像

$$\vartheta : A_{\mathbb{R}}^{\natural} \rightarrow \bar{a}, \quad \vartheta f = f - 1 \frac{df}{dx},$$

がある.

無限積 $\prod_{k \geq 0} \exp(c_k \Psi^{(k-1)}(1+x))$; $\Psi^{(-1)}(1+x) = \log \Gamma(1+x)$, 無限和 $\sum_{k \geq 0} c_k \Psi^{(k)}(1+x)$ に意味がある
とすれば写像 $\mu_{-x; \Psi}$ は $\text{Exp}(\mathbb{C})_\delta$ の上で定義できる. またその像に対して ι_Ψ が定義できる. $\iota_\Psi = \vartheta \circ \mu_{-x; \Psi}$ と
おけば

$$\iota_\Psi T = T_t \Psi(1+x+t), \quad (3.5)$$

である. とくに $T = f(\delta)$, $f(x) = \sum_n c_n x^n$ であれば

$$\iota_\Psi T = \sum_n c_n (-1)^n \Psi^{(n)}(1+x) \quad (3.6)$$

となる. $c_n = \frac{a^n}{n!}$ のとき さらに $|a| < 1$ であれば

$$\iota_\Psi T = \Psi(1+x-a), \quad |x| < 1 - |a|,$$

となるが この右辺は x, a の 2 変数関数として \mathbb{C}^2 で一価有理型だから 解析接続により すべての x, a につ
いて

$$\iota_\Psi f_{a,k}(\delta) = \Psi(1+x-a) \quad (3.7)$$

と約束出来る. 以下ではこの約束を使う.

注意. $\text{Ent}(\mathbb{C})$ 上の一般化関数としては $\sum_n (-1)^n \frac{a^n}{n!} \delta^{(n)} = \delta_a$ だが $\Psi(1+s+x)$ は整関数ではないのでこの
議論は使えない.

なお ϕ が原点で正則, 全平面で 1 価有理型であれば

$$i_\phi T = T_t \phi(1+x+t)$$

として同じ約束が使える. 意味のある ϕ が Ψ のほかに有るかは問題である.

定義 1. \mathfrak{a} の拡大 $\mathfrak{a}_{\text{exp}}$ を

$$\mathfrak{a}_{\text{exp}} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Psi^{(n)}(1+x) \mid \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \in \text{Exp}(\mathbb{C}) \right\} \quad (3.8)$$

で定義する.

定義から 加群として

$$\iota_\Psi : \text{Exp}(\mathbb{C})_\delta \cong \mathfrak{a}_{\text{exp}} \quad (3.9)$$

である. $\mathfrak{a}_{\text{exp}}$ の位相はこの同型と $\text{Exp}(\mathbb{C}) \cong \text{Exp}(\mathbb{C})_\delta$ から $\text{Exp}(\mathbb{C})$ の位相を移したものとする.

定義 2. $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ の拡大 $\mathfrak{g}_{\text{exp}}$ を

$$\mathfrak{g}_{\text{exp}} = \mathbb{C} \frac{d}{dx} \oplus \mathfrak{a}_{\text{exp}} \quad (3.10)$$

で定義する. 積は $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ と同様

$$\left[\frac{d}{dx}, \Psi^{(n)}(1+x) \right] = \Psi^{(n+1)}(1+x), \quad [\Psi^{(n)}(1+x), \Psi^{(m)}(1+x)] = 0,$$

で定義する.

$\mathfrak{a}_{\text{exp}}$ と同様 $A_{\mathbb{R}}^{\natural}$ の拡大 $A_{\mathbb{C}; \text{exp}}^{\natural}$ を

$$A_{\mathbb{C}; \text{exp}}^{\natural} = \left\{ \prod_{n=0}^{\infty} \exp(c_n \Psi^{(n-1)}(1+x)) \mid \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \in \text{Exp}(\mathbb{C}) \right\} \quad (3.11)$$

で定義する. ただしこの無限積 $\prod_{n=0}^{\infty} \exp(c_n \Psi^{n-1})(1+x)$; $\sum_n c_n x^n \in \text{Exp}(\mathbb{C})$, が収束するか, 収束した場合

$$f(x) \rightarrow \mathcal{R}\left[\prod_{n=0}^{\infty} \exp(c_n \Psi^{(n-1)}(1+s))f(s)\right](x),$$

が意味のある作用素になるかは今後の問題である.

定義から

$$\mu_{-x;\Psi} : \text{Exp}(\mathbb{C})_{\delta} \cong \mathbf{A}_{\mathbb{C};\text{exp}}^{\sharp} \quad (3.12)$$

である. $\mathbf{A}_{\mathbb{C};\text{exp}}^{\sharp}$ の位相はこの同型を使って定義する. 定義から

$$\vartheta : \mathbf{A}_{\mathbb{C};\text{exp}}^{\sharp} \cong \mathfrak{a}_{\text{exp}} \quad (3.13)$$

である.

$\tau_a : \tau_a f(x) = f(x+a)$ は $\mathbf{A}_{\mathbb{C};\text{exp}}^{\sharp}$ に働くので $\mathbb{C} = \{\tau_a | a \in \mathbb{C}\}$ による $\mathbf{A}_{\mathbb{C};\text{exp}}^{\sharp}$ の拡大 $G_{\mathbb{C};\text{exp}}^{\sharp}$ が定義できる. この群は $G_{\mathbb{R}}^{\sharp}$ の拡大である. $\vartheta(\tau_a f(x)) = a \frac{d}{dx} + \vartheta f(x)$ とすれば

$$\vartheta(G_{\mathbb{C};\text{exp}}^{\sharp}) = \mathfrak{g}_{\text{exp}}, \quad (3.14)$$

となる. ただしこれは代数的な同型ではない.

$f(x)$ が整関数であれば

$$\tau_a(f(\delta)) = (\tau_a)f(\delta) \quad (3.15)$$

で平行移動作用素 τ_a の作用が定義できる. よって $\text{Exp}(\mathbb{C})_{\delta}$ の $\mathbb{R} = \{\tau_a | a \in \mathbb{R}\}$ による拡大

$$\text{Exp}(\mathbb{C})_{\delta}^{\sharp} = \mathbb{R} \times \text{Exp}(\mathbb{C})_{\delta},$$

が定義でき 写像 $\mu_{-x;\Psi} : \text{Exp}(\mathbb{C})_{\delta} \cong \mathbf{A}_{\mathbb{R};\text{exp}}^{\sharp}$ は

$$\mu_{-x;\Psi} \tau_a f(\delta) = \tau_a(\mu_{-x;\Psi} f(\delta)),$$

と定義して $\text{Exp}(\mathbb{C})_{\delta}^{\sharp}$ から $G_{\mathbb{R};\text{exp}}^{\sharp}$ への同型が得られる. これらをまとめて次の定理が得られた.

定理 2. 次の同相写像がある.

$$\mu_{-x;\Psi} : \text{Exp}(\mathbb{C})_{\delta}^{\sharp} \cong G_{\mathbb{R};\text{exp}}^{\sharp}, \quad \vartheta : G_{\mathbb{R};\text{exp}}^{\sharp} \cong \mathfrak{g}. \quad (3.16)$$

ここで $\mu_{-x;\Psi}$ は代数的同型だが ϑ は代数的写像ではない.

同型 (20), (21) と $\text{Exp}(\mathbb{C})_{\delta}$ の極小性から $\mathfrak{a}_{\text{exp}}$ が \mathfrak{a} の適切な完備化と言っても良いと思われる.

4 $l_{\Psi} f(\delta)$ の計算

形式的には $l_{\Psi} f(\delta)$ は $f(x) \in \text{Exp}(\mathbb{C})$ のとき定義できるが これが関数になるかは問題である. この節ではそれについて考える.

定義から形式的には

$$l_{\Psi} f(\delta) = \sum_n (-1)^n c_n \Psi^{(n)}(1+x), \quad f(x) = \sum_n c_n x^n, \quad (4.1)$$

だから この右辺の収束が問題になる.

命題 2. $f(x)$ が整関数のポレル変換; $f(x) = \sum_n \frac{b_n}{n!} x^n$, $g(x) = \sum_n b_n x^n$ は整関数であれば $\iota_\Psi f(\delta)$ は $|x| < 1$ で収束する.

証明. 形式的には

$$\iota_\Psi f(\delta) = \sum_n (-1)^n \frac{b_n}{n!} \Psi^{(n)}(1+x)$$

である. $\Psi(1+x)$ は $|x| < 1$ で正則だから $|y| = 1 - \epsilon$, $\epsilon > 0$ であれば $\Psi(1+x)$ は $|x-y| < \epsilon$ で y を中心としたテイラー展開ができる. よって

$$|\Psi^{(n)}(1+y)| \leq n! C R^n,$$

となる $C > 0, R > 0$ がある. 仮定から $\sum_n (-1)^n b_n R^n$ は収束するから命題が成り立つ.

約束 (15) を認めると $f(x) = \sum_n c_n e^{2n\pi x}$ とフーリエ展開されれば形式的に

$$\iota_\Psi F(\delta) = \sum_n c_n \Psi(1+x-2n\pi i) = c_0 \Psi(1+x) + \sum_{n \neq 0} c_n \Psi(1+x-2n\pi i)$$

である. x が実数であれば $\Psi(1+x-2n\pi i)$ は実軸上で連続だから数列 $\{c_n | n \in \mathbb{Z}\}$ が適当な収束条件をみたせば収束する. よって適当な収束条件と約束 (15) のもとに

$$\iota_\Psi f(\delta) = c_0 \Psi(1+x) + \sum_n c_n \Psi(1+x-2n\pi i), \quad (4.2)$$

$f(x) = \sum_n c_n e^{2n\pi i x}$, である.

$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s) e^{-2\pi i s x} ds$ の時同じ計算が出来れば

$$\iota_\Psi f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s) \Psi(1+x+2\pi i s) ds$$

となる. $f(x)$ が有限指数型であればペイリー-ウイナーの定理 ([9], [10] Chap.VI) から $g(s)$ の台はコンパクトだからこの右辺の積分は有界な区間での積分になる. よって $\iota_\Psi f(x)$ は $x \neq 0$ で連続になる.

有限指数型関数 $f(x)$ は原点の近傍で正則な関数 $g(s)$ によって

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=c} \frac{g(s)}{s} e^{\frac{x}{s}} ds,$$

$g(s)$ は $\{s | |s| \leq c\}$ で正則, と書ける. 約束 (15) を形式的に使えば

$$\iota_\Psi f(\delta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=c} \frac{g(s)}{s} \Psi(1+x-\frac{1}{s}) ds \quad (4.3)$$

と書けることが示唆される. しかし $\Psi(1+x+\frac{1}{s})$ は $x+\frac{1}{s} = -n, n \in \mathbb{N}$ に極 (と留数) をもつから この右辺の積分は c の選び方に関係する. 従って (27) の形の意味のある表示を得られるかは問題である.

5 多変数の場合

この節では $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ などの記法を使う. $\{\frac{\partial^{a_1}}{\partial x_1^{a_1}}, \dots, \frac{\partial^{a_n}}{\partial x_n^{a_n}} |$

$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n\}$ と $\{x_1^{a_1}, \dots, x_n^{a_n} | \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n\}$ から生成される群を $G_{\mathbb{R}^n}$, それらの生成作用素 $\{\log(\frac{\partial}{\partial x_1}), \dots, \log(\frac{\partial}{\partial x_n})\}$ と $\{\log x_1, \dots, \log x_n\}$ で生成されたリ-環を $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n}$ とすれば

$$G_{\mathbb{R}^n} = (G_{\mathbb{R}}|_{x=s_1}) \times \dots \times (G_{\mathbb{R}}|_{x=s_n}), \quad (5.1)$$

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n} = (\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}|_{x=s_1}) \oplus \dots \oplus (\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}|_{x=s_n}), \quad (5.2)$$

だから 1 変数の場合の結果が多変数の場合も使える。しかしこの分解は座標系に依存するから座標変換は殆ど使えない。

(28), (29) から

$$A_{\mathbb{C}^n;\text{exp}}^{\natural} = (A_{\mathbb{C};\text{exp}}^{\natural}|_{x=s_1}) \times \cdots \times (A_{\mathbb{C};\text{exp}}^{\natural}|_{x=s_n}), \quad (5.3)$$

$$\mathfrak{a}_{\mathbb{C}^n;\text{exp}} = (\mathfrak{a}_{\text{exp}}|_{x=s_1})ds_1 \oplus \cdots \oplus (\mathfrak{a}_{\text{exp}}|_{x=s_n})ds_n, \quad (5.4)$$

と置き $G_{\mathbb{R}^n}$, $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n}$ の完備化 $G_{\mathbb{C}^n;\text{exp}}^{\natural}$, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}^n;\text{exp}}$ を $\mathbb{C}^n \cong \{\tau_{\mathbf{a}}|\mathbf{a} \in \mathbb{C}^n\}$ による $A_{\mathbb{C}^n;\text{exp}}^{\natural}$ の拡大と $\mathbb{C}^n \cong \{\sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial}{\partial s_i} | \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n\}$ として $\mathbb{C}^n \oplus \mathfrak{a}_{\mathbb{C}^n;\text{exp}}$ にリー環の構造を入れた物と定義する。1 変数の場合と違って $\mathfrak{a}_{\mathbb{C};\text{exp}}$ は 1-形式の空間だが こうすると ϑ は多変数のとき $\rho: \rho g = g^{-1}dg$ と定義できる。このように定義すれば

$$\rho: A_{\mathbb{C}^n;\text{exp}}^{\natural} \cong \mathfrak{a}_{\mathbb{C}^n;\text{exp}}, \quad (5.5)$$

である。 ρ は非アーベル ド・ラム理論 ([1],[2]) で基本的な作用素だから 分数冪微積と非アーベル ド・ラム理論とは関係があるかもしれない。なおこの計算ができるのは $A_{\mathbb{C}^n;\text{exp}}^{\natural}$ の要素が変数の分離された関数であることによる事を注意する。

定義から $\text{Exp}(\mathbb{C}^n) = \text{Exp}(\mathbb{C})|_{x=s_1} \oplus \cdots \oplus \text{Exp}(\mathbb{C})|_{x=s_n}$, $\text{Exp}(\mathbb{C})_{\delta}^n$ を同様に定義すれば

$$\mathfrak{a}_{\mathbb{C}^n;\text{exp}} \cong \text{Exp}(\mathbb{C})_{\delta}^n \quad (5.6)$$

である。 $\text{Exp}(\mathbb{C}^n)$ の元を $f(x_1) \oplus \cdots \oplus f_n(x_n)$, $\text{Exp}(\mathbb{C})_{\delta}^n$ の元を $f_1(\delta) \oplus \cdots \oplus f_n(\delta)$ 等と書く。この記法では $f(s_i)$ が定数関数であっても $f_i(s_i)$, $f_i(\delta)$ は「添え字 i によって区別されていることを注意する。なおこの区別は $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}^n;\text{exp}}$ では ds_1, \dots, ds_n でもなされている ($\mathfrak{a}_{\mathbb{C}^n;\text{exp}}$ には定数はふくまれないから不必要だが)。

\mathbb{C}^n の上の有限指数型関数の空間を $\text{Exp}(\mathbb{C}^n)$, 整関数の空間を $\text{Ent}(\mathbb{C}^n)$ とする。 $\text{Exp}(\mathbb{C})_{\delta}$ 等を多変数の場合に拡張するため $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$, $k_i = 0, \text{or } \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ として

$$\mathbf{x}^{\mathbf{k}} = (x_1^{k_1}, \dots, x_n^{k_n}),$$

として $\text{Ent}(\mathbb{C}^n)$ 等に働く作用素 $\delta_{\mathbf{k}}$ を

$$\delta_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}^{\mathbf{m}}) = \begin{cases} (-1)^{k_1+\cdots+k_n} k_1! \cdots k_n!, & \mathbf{m} = \mathbf{k}, \\ 0, & \mathbf{m} \neq \mathbf{k}, \end{cases} \quad (5.7)$$

で定義する。そしてこの記号を用いて

$$f(\delta) = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}}, \quad f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}} \quad (5.8)$$

として

$$\text{Exp}(\mathbb{C}^n)_{\delta} = \{f(\delta) | f(\mathbf{x}) \in \text{Exp}(\mathbb{C}^n)\}, \quad (5.9)$$

$$\text{Ent}(\mathbb{C}^n)_{\delta} = \{f(\delta) | f(\mathbf{x}) \in \text{Ent}(\mathbb{C}^n)\} \quad (5.10)$$

と定義すれば

$$\text{Exp}(\mathbb{C}^n)_{\delta} = \text{Ent}(\mathbb{C}^n)^{\dagger}, \quad \text{Ent}((\mathbb{C}^n)_{\delta}) = \text{Exp}(\mathbb{C}^n)^{\dagger} \quad (5.11)$$

である。また $\text{Exp}(\mathbb{C}^n)$ の部分空間 $(\text{Exp}(\mathbb{C}^n))_s$ を

$$(\text{Exp}(\mathbb{C}^n))_s = \left\{ \sum_{i=1}^n f_i(x_i) | f_i(x) \in \text{Exp}(\mathbb{C}) \right\}$$

で定義すれば写像 σ ;

$$\sigma(f_1(x)|_{x=x_1} \oplus \cdots \oplus f_n(x)|_{x=x_n}) = f_1(x_1) + \cdots ; f_n(x_n)$$

によって

$$\sigma(\text{Exp}(\mathbb{C})|_{x=x_1} \oplus \cdots \oplus \text{xp}(\mathbb{C})|_{x=x_n}) = ((\text{Exp}(\mathbb{C})^n)_s)_\delta \quad (5.12)$$

である. 定義から

$$\text{Ker}\sigma \cong \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n | x_1 + \cdots + x_n = 0\}$$

である. よって $\text{Exp}(\mathbb{C})_\delta^n \neq (\text{Exp}(\mathbb{C}^n)_s)_\delta$ である.

注意. 2節の終わりに注意したように (38) の双対は \mathbb{C}^n の原点での正則関数の芽の環 (原点での収束冪級数の環) \mathcal{O}^n と $\text{Ent}(\mathbb{C}^n)$ との双対

$$\begin{aligned} & (f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})) \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|x_1|=\epsilon_1, \dots, |x_n|=\epsilon_n} f(x_1, \dots, x_n) g\left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}\right) \frac{dx_1}{x_1} \cdots \frac{dx_n}{x_n}, \end{aligned}$$

の書き換えである (多変数の場合も

$$\mathcal{B}[\mathcal{O}^n] = \text{Exp}(\mathbb{C}^n)$$

が成り立つ). この場合 $\delta_{\mathbf{k}}$ は

$$\delta_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}} \left(\frac{1}{x_1 \cdots x_n} \right)$$

で表現される. ただし

$$\text{Exp}(\mathbb{C})_\delta^n \cong \text{Ent}(\mathbb{C})^\dagger|_{x=x_1} \oplus \cdots \oplus \text{Ent}(\mathbb{C})^\dagger|_{x=x_n}$$

だから この双対性がそのまま多変数での議論に使える訳ではない.

$\text{Exp}(\mathbb{C}^n)$ の部分空間としての $(\text{Exp}(\mathbb{C})^n)_s$ は座標系に関してさだまる. したがって多変数の場合分数冪微積の座標変換は線形変換でも殆ど使えない. これをどう克服するかは今後の問題である.

定義から $T \in \text{Exp}(\mathbb{C})_\delta^n$ は $T = \oplus_{i=1}^n f_i(\delta)$, $f_i(x) \in \text{Exp}(\mathbb{C})$ と便宜的に書いてよい. この記法を使うと $\text{Exp}(\mathbb{C})_\delta^n$ から $A_{\mathbb{C};\text{exp}}^\natural$ への写像 $\mu_{-\mathbf{x};\text{exp}}$ は

$$\mu_{-\mathbf{x};\Psi}(\oplus_{i=1}^n f_i(\delta)) = \prod_{i=1}^n \mu_{-x_i;\Psi} f_i(\delta),$$

で与えられる. これから3節での議論はそのまま多変数の場合に適用できる. よって次の定理がえられる.

定理3. 次の同相写像がある.

$$\mu_{-\mathbf{x};\Psi} : (\text{Exp}(\mathbb{C})_\delta^\natural)^n \cong G_{\mathbb{C}^n;\text{exp}}^\natural, \quad \rho : G_{\mathbb{C}^n;\text{exp}}^\natural \cong G_{\mathbb{C}^n;\text{exp}}^\natural. \quad (5.13)$$

ここで $\mu_{-\mathbf{x};\Psi}$ は代数的同型だが ρ は代数的写像ではない. しかし

$$\rho : A_{\mathbb{C}^n;\text{exp}}^\natural \cong \mathfrak{a}_{\mathbb{C}^n;\text{exp}}$$

は代数的同型である.

参考文献

- [1] Andersson, S.I.: Vector bundle connections and lifting of partial differential equation, *Differential Geometric Methods in Mathematical Physics*, Lect. Notes in Math. 905, 119-132, Berlin, 1982. Hodge theory via heat flow, *Lect. Notes in Math.* 1209, 8-36. Berlin, 1986.
- [2] Asada, A.: Curvature forms with singularities and non-integral characteristic classes, *Lect. Notes in Math.* 1139, 152-168. Berlin, 1985. Non Abelian de Rham theory, *Prospect of Math. Sci.* eds. Mitui, T. Nagasaki, K. Kano, K. 13-40. World Sci. 1988.
- [3] Asada, A.: Extended Borel transform and fractional calculus, *Fractional Calculus: History, Theory and Applications*, eds. Daou, R. Xavier, M. Nova Publishers, 2014. An integral transform arising from fractional calculus, *Fractional Calculus with Applications to Dynamical System.* eds. Cario, C. Yang, X.J. De Gruiter, 2016.
- [4] Asada, A.: Groups and Lie algebra arising from fractional calculus, *Proc. IMBIC 3.* eds. Adhikari, A. Adhikari, M.R. 1-12. Kolkata, 2014. Discrete delta potentials and the group arising from fractional calculus, *Proc. IMBIC 4.* 70-84. Kolkata, 2015.
- [5] Asada A.: Completion of the group and Lie algebra arising from fractional calculus, to appear.
- [6] Herrman, R.: *Fractional Calculus: An Introduction to Physicists*, World Sci. 2012.
- [7] Maltineau, A.: Sur les fonctionnelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel, *J. Ann. Math.* 11(1963), 1-164.
- [8] Naklanishi, N.: Logarithm type functions of the differential operators, *Yokoham J. Math.* 55(2010), 149-163.
- [9] Paley, R.E.A.C. Wiener, N.: *Fourier Transforms in the Complex Domain*, A.M.S. 1934.
- [10] Yosida, K.: *Functional Analysis*, Berlin, 1968.

編集後記

師走を直前に、このサーキュラーの発行地である松山は、小春日和の日があったり、本格的な寒波が到来したりと、11月末に特有な不安定な天候が続いております。

読者の方々にはお元気で目前のお仕事に精進されておられることと存じます。おかげさまで、私たち編集者の二人とも元気でサーキュラーの発行に取り組んでいます。

今号の6巻8号では数学系の1編と物理関係の2編の計3編ですが、いずれも力作で興味深い内容です。

まず、数学の論文はいつもご投稿をいただき浅田 明先生の継続的な研究の一環であり、いままでは未解決だった部分を独自に開発した手法で解決して今回の成果が得られたものです。この方面に関心を寄せる研究者も決して少なくないと思います。

つぎに、物理学関連の論文に目を転じると、2編のいずれを見ても斬新な考えが窺えます。物理学者にとっては、倒立振子は珍しい現象や用語ではないのかもしれませんが、私にとっては聞きなれない用語で、音楽で拍子をとるのに使うメトロノームくらいしか思い浮かばない始末です。

(新関章三)