数学・物理通信

7巻10号　　2017年12月

編集　新関章三・矢野　忠

2017 年 12 月 22 日

目次(Contents)

微分をして積分を求める 2

矢野　忠 [1]

How to Differentiate Parameters under the Integral Sign 2

Tadashi YANO[2]

1　はじめに

このエッセイはすでに「研究と実践」(愛数協）に掲載されたものである [1].「研究と実践」の読者は小学校の先生が中心であるので，あまりその広がりを期待できなかった．このたび，旧稿を改訂してより広い読者層を期待して,「数学・物理通信」に掲載する．

このエッセイは [2] の続きである．[2] では「積分記号の中のパラメータで微分して定積分を求める方法」[3] でいろいろな定積分を求めたが，このエッセイでは

$$\int_0^\infty x^s \mathrm{e}^{-ax^2} dx \tag{1.1}$$

を求めることを主眼とする．

2 節では 0 または正の任意の整数 $s=n$ に対する定積分 (1.1) をパラメータで微分することによって求める．3 節では任意の正の実数 s に対する定積分 (1.1) を Gamma 関数を用いて求めよう．4 節はまとめである．補遺で (2.4),(2.5) の導出を示した．

2　微分して積分を求める方法

いま n を 0 または正の整数とするとき，つぎの定積分を記号 $I(n,a)$ で

$$I(n,a) := \int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-ax^2} dx, \quad (a>0) \tag{2.1}$$

と定義する．このとき n が偶数の場合を $2n$ と表し，奇数の場合を $2n+1$ と表せば，定積分 (2.1) は

$$I(2n,a) = \int_0^\infty x^{2n} \mathrm{e}^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi}\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} a^{-(n+1/2)} \tag{2.2}$$

$$I(2n+1,a) = \int_0^\infty x^{2n+1} \mathrm{e}^{-ax^2} dx = \frac{n!}{2} a^{-(n+1)} \tag{2.3}$$

と場合分けされる．ここで，n は 0 または正の整数であり，$(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1$ と定義するが，特別に $(-1)!! = 1$ と規約する．

これがこの節で求めたい二つの定積分である [6][7]．そのために (2.2),(2.3) で $n=0$ とおいた式をまず書き下してみよう [4]．

$$I(0,a) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2} \tag{2.4}$$

$$I(1,a) = \int_0^\infty x\mathrm{e}^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} \tag{2.5}$$

---

[1] 元愛媛大学工学部

[2] yanotad@earth.ocn.ne.jp

[3] この方法はファインマン [3] がその有用性を述べて一般の人にも知られるようになった．ファインマンは [4] を読んでその方法を学んだという．またこの積分法のことは [5] でも触れられている．

[4] 2 つの定積分 (2.4),(2.5) はそれぞれ定積分の公式 (2.2),(2.3) によらなくても個別に積分できる．この導出は補遺を参照せよ．

(2.4) をパラメータ $(-a)$ で微分すれば，

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^2 \mathrm{e}^{-ax^2} dx &= \frac{\partial}{\partial(-a)} I(0,a) \\ &= \frac{1}{4a}\left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2}\end{aligned} \tag{2.6}$$

となる [5]．さらに (2.6) を $-a$ で微分すれば，

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^4 \mathrm{e}^{-ax^2} dx &= \frac{\partial^2}{\partial(-a)^2} I(0,a) \\ &= \frac{3}{8a^2}\left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2}\end{aligned} \tag{2.7}$$

このようにパラメータ $(-a)$ での微分を n 回くりかえせば，一般の偶数 $2n$ に対する定積分

$$\int_0^\infty x^{2n} \mathrm{e}^{-ax^2} dx \tag{2.8}$$

が得られる．

つぎに (2.5) をパラメータ $(-a)$ で微分すれば，

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^3 \mathrm{e}^{-ax^2} dx &= \frac{\partial}{\partial(-a)} I(1,a) \\ &= \frac{1}{2a^2}\end{aligned} \tag{2.9}$$

さらに，(2.9) を $-a$ で微分すれば，

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^5 \mathrm{e}^{-ax^2} dx &= \frac{\partial^2}{\partial(-a)^2} I(1,a) \\ &= \frac{1}{a^3}\end{aligned} \tag{2.10}$$

このようにパラメータ $(-a)$ での微分を n 回くりかえせば，一般の奇数 $2n+1$ に対する定積分

$$\int_0^\infty x^{2n+1} \mathrm{e}^{-ax^2} dx \tag{2.11}$$

が得られる．

これらの結果から，定積分 (2.1) を $n=$ 0-5 に対してまとめると

$$\begin{aligned}I(0,a) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} a^{-1/2} \\ I(1,a) &= \frac{1}{2} a^{-1} \\ I(2,a) &= \frac{\sqrt{\pi}}{4} a^{-3/2} \\ I(3,a) &= \frac{1}{2} a^{-2} \\ I(4,a) &= \frac{3\sqrt{\pi}}{8} a^{-5/2} \\ I(5,a) &= a^{-3}\end{aligned}$$

である．

[5](2.6) の 1 行目が成り立つためには，右辺にある積分と微分とが交換できると仮定されている．すなわち，偏微分の演算は積分の演算と交換できて e^{-ax^2} を $(-a)$ で偏微分できる．(2.7) 以下でも同様に仮定されている．積分と微分の演算順序の交換はいつでも無条件にはできる訳ではないが，いまの場合にはそれが可能である．その条件を数学ではきちんと議論する．詳しいことは [8] を参照せよ．

こうやって n の小さな値のときの定積分を並べてみれば，一般の n の値のときの定積分を与える式が知りたくなってくる．それが実は (2.2),(2.3) である．

定積分の系列は n が偶数のときと奇数のときとではちがっている，すなわち，$-a$ で微分したとき，定積分の中の被積分関数の x のべき乗は 2 だけ増加する．したがって，$I(0,a)$ を $-a$ で微分して得られる $I(2n,a)$ と $I(1,a)$ を $-a$ で微分して得られる $I(2n+1,a)$ との 2 つに分けられる．

まず n が偶数のときは n を $2n$ とおきかえた定積分 $I(2n,a)$ を求めよう．$I(0,a)=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{a})^{1/2}$ であったから，関数 $a^{-1/2}$ を $(-a)$ で微分すれば，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial(-a)}a^{-1/2} &= \frac{1}{2}a^{-(1/2+1)} \\
\frac{\partial^2}{\partial(-a)^2}a^{-1/2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)a^{-(1/2+2)} \\
\frac{\partial^3}{\partial(-a)^3}a^{-1/2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)a^{-(1/2+3)} \\
&\cdots \\
\frac{\partial^n}{\partial(-a)^n}a^{-1/2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+n-1\right)a^{-(1/2+n)}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

したがって，

$$\begin{aligned}
I(2n,a) &= \int_0^\infty x^{2n}\mathrm{e}^{-ax^2}dx \\
&= \frac{\partial^n}{\partial(-a)^n}I(0,a) \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+n-1\right)a^{-(1/2+n)} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{2^n}1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)a^{-(1/2+n)} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{2^n}(2n-1)!!a^{-(1/2+n)} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}}\frac{(2n)!}{n!}a^{-(1/2+n)}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

つづいて n が奇数のとき，n を $2n+1$ とおきかえた定積分 $I(2n+1,a)$ を求めよう．$I(1,a)=\frac{1}{2a}$ であったから，関数 a^{-1} を $(-a)$ でくりかえして微分すれば，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial(-a)}a^{-1} &= a^{-2} \\
\frac{\partial^2}{\partial(-a)^2}a^{-1} &= 1\cdot2a^{-3} \\
\frac{\partial^3}{\partial(-a)^3}a^{-1} &= 1\cdot2\cdot3a^{-4} \\
&\cdots \\
\frac{\partial^n}{\partial(-a)^n}a^{-1} &= 1\cdot2\cdot3\cdots na^{-(n+1)} = n!a^{-(n+1)}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

したがって

$$\begin{aligned}
I(2n+1,a) &= \int_0^\infty x^{2n+1}\mathrm{e}^{-ax^2}dx \\
&= \frac{\partial^n}{\partial(-a)^n}I(1,a) \\
&= \frac{1}{2}n!a^{-(n+1)}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

(2.2),(2.3) の定積分を得るためにパラメータ $(-a)$ での微分をくりかえし行った．しかし，別の方法で定積分を求めることもできる．それについては 3 節で述べることにしよう．

3 Gamma 関数を用いた導出

2 節では定積分 (2.2),(2.3) をパラメータ $(-a)$ での微分をくりかえして行っていくことで求めた．だから，指数 n は正の整数に限られていたが，この節の Gamma 関数を用いる方法では指数 s は正の整数には限定されず，一般に正の実数に対して成立する [9]．したがって，2 節の結果と比べてより一般性がある．

まず Gamma 関数を次式で定義しよう [10][11]．

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}dx, \quad (s>0) \tag{3.1}$$

s はいま整数ではなく，$s>0$ の任意の実数である．

定積分の評価は後に行うことにして結果を先に与えておこう．

奇数列の定積分に対応するものは

$$I(2s+1,a) = \int_0^\infty x^{2s+1}\mathrm{e}^{-ax^2}dx = \frac{\Gamma(s+1)}{2a^{s+1}} \tag{3.2}$$

である．s が正の整数のとき，$\Gamma(s+1)=s!$ であるから

$$I(2s+1,a) = \frac{s!}{2a^{s+1}} \tag{3.3}$$

となる．

つぎに，偶数系列の定積分に対応するものは

$$I(2s,a) = \int_0^\infty x^{2s}\mathrm{e}^{-ax^2}dx = \frac{\Gamma(s+1/2)}{2a^{s+1/2}} \tag{3.4}$$

である．s が正の整数のとき

$$I(2s,a) = \frac{\sqrt{\pi}(2s)!}{2^{2s+1}s!a^{s+1/2}} \tag{3.5}$$

となる．

(3.2),(3.4) を導出するために，まず

$$\int_0^\infty x^{s-1}\mathrm{e}^{-\alpha x}dx = \frac{\Gamma(s)}{\alpha^s} \tag{3.6}$$

を (3.1) から導いておく．

(3.1) で $x=\alpha t, \alpha = a+ib$ とおけば，

$$\int_0^\infty (\alpha t)^{s-1}\mathrm{e}^{-\alpha t}d(\alpha t) = \Gamma(s),$$
$$\alpha^s\int_0^\infty t^{s-1}\mathrm{e}^{-\alpha t}dt = \Gamma(s)$$

であるから，(3.6) が成り立つ．(3.6) で $\alpha = a+ib$ であるが，いま $b=0$ とおけば，

$$\int_0^\infty t^{s-1}\mathrm{e}^{-at}dt = \frac{\Gamma(s)}{a^s} \tag{3.7}$$

が得られる．(3.7) で $t=x^2, s=r+1$ とおけば，$dt=2xdx$ であるから，

$$\int_0^\infty (x^2)^r\mathrm{e}^{-ax^2}2xdx = \frac{\Gamma(r+1)}{a^{r+1}} \tag{3.8}$$

したがって

$$I(2r+1,a)=\int_0^\infty x^{2r+1}\mathrm{e}^{-ax^2}dx=\frac{\Gamma(r+1)}{2a^{r+1}}$$

これで (3.2) が導出できた．

さらに (3.2) で $2s+1=2r$，すなわち，$s+1/2=r$ とおけば，$s+1=r+1/2$ であるから

$$I(2r,a)=\int_0^\infty x^{2r}\mathrm{e}^{-ax^2}dx=\frac{\Gamma(r+1/2)}{2a^{r+1/2}}$$

となる．これで (3.4) も導出された．

以上で (3.2),(3.4) の導出ができたが，s が整数のときに成り立つ (3.3),(3.5) の証明がなお必要である．(3.3) の方は s が正整数のときには

$$\Gamma(s+1)=s! \tag{3.9}$$

が成り立つことを知っていれば，(3.2) から明らかであろう．したがって，(3.3) すなわち (2.3) が示された．

(3.5) の証明には s が正整数のときに

$$\Gamma(s+1/2)=\frac{(2s)!\sqrt{\pi}}{2^{2s}s!} \tag{3.10}$$

であることを示せればよい．それには $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ であることを用いれば，

$$\begin{aligned}
\Gamma(s+1/2)&=(s+1/2-1)\Gamma(s+1/2-1)\\
&=(s+1/2-1)(s+1/2-2)\Gamma(s+1/2-2)\\
&=(s+1/2-1)(s+1/2-2)(s+1/2-3)\Gamma(s+1/2-3)\\
\cdots&\\
&=(s+1/2-1)(s+1/2-2)(s+1/2-3)\cdots(s+1/2-s)\Gamma(s+1/2-s)\\
&=\frac{1}{2^s}(2s+1-2)(2s+1-4)(2s+1-6)\cdots(2s+1-2s)\Gamma(1/2)\\
&=\frac{1}{2^s}(2s-1)(2s-3)(2s-5)\cdots3\cdot1\cdot\Gamma(1/2)\\
&=\frac{1}{2^s}(2s-1)!!\Gamma(1/2)\\
&=\frac{(2s)!\Gamma(1/2)}{2^{2s}s!}
\end{aligned}$$

ここで $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ であることを用いれば，(3.10) が証明される．これを (3.4) に代入すれば，(3.5) すなわち (2.2) が得られる．

4 おわりに

積分記号下でパラメータで微分する方法と Gamma 関数の 2 通りの方法で $\int_0^\infty x^s\mathrm{e}^{-ax^2}dx$ を求めてみた．Gamma 関数はあまり普通の人にはなじみがないが，それを使うと簡単にこの定積分が簡単に与えられるのはなんといってもありがたい．しかし，はじめからこの定積分の Gamma 関数による表現が与えられても難しいと感じるだけだろう．それが正の整数だけにしか適用できないパラメータで微分する方法での積分法を一度経験することによって少しわかりやすく感じられる．

なお，積分記号下でパラメータで微分する方法をもっと知りたい人は [1] にいくつか別の定積分の例も示しているので，参照されたい．

5　補遺　(2.4),(2.5) の導出

この補遺では注 4 で述べた，(2.4) と (2.5) の導出をしょう．

まず (2.4) を導出するために必要な定積分

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{5.1}$$

の導出のしかたはいろいろあるが，もっともよく知られているものはつぎの方法であろう．

$I = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2} dx$ とおけば，

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2} dx \int_0^\infty \mathrm{e}^{-y^2} dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} dxdy \end{aligned}$$

いま，$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と変数変換すれば，$x^2 + y^2 = r^2$ であり，積分の面積要素 (surface element) は $dxdy = rdrd\theta$ と表される．

積分変数の変域は $x \geq 0, y \geq 0$ であるから，$r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi/2$ となる．したがって，

$$I^2 = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-r^2} rdr \int_0^{\pi/2} d\theta \tag{5.2}$$

$r^2 = u$ とおけば，$rdr = \frac{1}{2}du$ であるから，

$$\begin{aligned} I^2 &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} du \int_0^{\pi/2} d\theta \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} du \\ &= \frac{\pi}{4}\left[\frac{\mathrm{e}^{-u}}{(-1)}\right]_0^\infty \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned} \tag{5.3}$$

$I > 0$ であるから，したがって

$$I = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

と (5.1) が得られる．ここで $x = \sqrt{a}u$ と変数変換すれば，

$$\begin{aligned} \sqrt{a}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-au^2} du &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ \int_0^\infty \mathrm{e}^{-au^2} du &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \end{aligned}$$

が得られるので，(2.4) が導出された．

つぎに (2.5) を導出しよう．まず $x^2 = u$ と変数変換をすれば，$xdx = \frac{1}{2}du$ であるから

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x^2} dx &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} du \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{e}^{-u}}{-1}\right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

が得られる．この積分で，$x=\sqrt{a}u$ とおけば，$dx=\sqrt{a}du$ であるから

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}dx &= \sqrt{a}\int_0^{\infty} u\mathrm{e}^{-au^2}d(\sqrt{a}u)\\ &= a\int_0^{\infty} u\mathrm{e}^{-au^2}du\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる．最後の等式から

$$\int_0^{\infty} x\mathrm{e}^{-ax^2}dx = \frac{1}{2a} \tag{5.4}$$

が得られるので，(2.5) が導出された．

(2007.4.9)(2017.11.16 改訂)

参考文献

[1] 矢野　忠，Feynman の積分法と $\int_0^{\infty} x^s\mathrm{e}^{-ax^2}dx$，研究と実践（愛数協）第 96 号（2007.12) 17-22

[2] 矢野　忠，微分をして積分を求める，研究と実践（愛数協）第 24 号　(1988.3) 2-8,
『数学散歩』（国土社，2005）93-97 に収録,『物理数学散歩』（国土社，2011）22-26 に再録,
この改訂版は，数学・物理通信，7 巻 9 号 (2017.12) 21-25

[3] R. P. ファインマン（大貫昌子 訳）,『ご冗談でしょう，ファインマンさん』I（岩波書店, 1986）122-123

[4] F. S. Woods, *Advanced Calculus*, (Ginn and Co., 1934）141-163

[5] ストロガッツ（南條郁子 訳）,『ふたりの微積分』（岩波書店，2012）44-45, 59-61

[6] 森口，宇田川，一松,『数学公式 I』（岩波書店，1956）233

[7] 高橋康，奥田和子,『公式集　量子力学とその周辺』（講談社，1988）26

[8] 高木貞治,『解析概論』改訂第 3 版（岩波書店, 1961）162-171

[9] 西田俊夫,『量子力学と演習』（槇書店，1971）285

[10] 高木貞治,『解析概論』改訂第 3 版（岩波書店, 1961）248-258

[11] 高橋健人,『物理数学』（培風館，1958）90-93

微分をして積分を求める 3

矢野　忠 [1]

How to Differentiate Parameters under the Integral Sign 3

Tadashi YANO[2]

1　はじめに

このエッセイは [1][2] の続きである． [1] では「積分記号の中のパラメータで微分して定積分を求める方法」でいろいろな定積分を求めた．また [2] では

$$\int_0^\infty x^s \mathrm{e}^{-ax^2} dx, \quad (a > 0) \tag{1.1}$$

を求めた．このエッセイでは

$$\int_0^\infty x^\alpha \mathrm{e}^{-ax} dx, \quad (a > 0) \tag{1.2}$$

を求める．ここで α は $\alpha > -1$ の実数とする．

この積分 (1.2) は Gamma 関数と密接な関係にある．それで 2 節ではまず Gamma 関数の定義から変数を変換することによって導く．つぎに 3 節では $\alpha = n$, ($n =$ 正の整数) の場合を

$$I(0, a) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax} dx = \frac{1}{a}, \quad (a > 0) \tag{1.3}$$

をパラメータ $-a$ でくり返して，微分することによって導く．4 節は (3.11) の数学帰納法による証明である．5 節はまとめである．

2　(1.2) を Gamma 関数から求める

まず Gamma 関数はつぎの積分で定義される．

$$\Gamma(\alpha + 1) := \int_0^\infty t^\alpha \mathrm{e}^{-t} dt \tag{2.1}$$

この Gamma 関数は 0 または正の整数 n に対する階乗 $n!$ の一般化された関数であることはよく知られている．

(2.1) で $t = ax$ とおけば，$dt = adx$ であるから

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha + 1) &= \int_0^\infty (ax)^\alpha \mathrm{e}^{-ax} d(ax) \\ &= a^{\alpha+1} \int_0^\infty x^\alpha \mathrm{e}^{-ax} dx\end{aligned}$$

したがって

$$\int_0^\infty x^\alpha \mathrm{e}^{-ax} dx = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{a^{\alpha+1}} \tag{2.2}$$

が導かれる．

[1] 元愛媛大学工学部
[2] yanotad@earth.ocn.ne.jp

3　微分をして積分を求める

(1.3) の $I(0,a)$ を $-a$ でくりかえして微分することによって

$$\int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-ax} dx, \quad n = \text{自然数} \tag{3.1}$$

の定積分を求めよう．

(1.3) を用いると

$$\frac{\partial}{\partial(-a)} I(0,a) = \int_0^\infty x\mathrm{e}^{-ax} dx \tag{3.2}$$

で，かつ，

$$\frac{\partial}{\partial(-a)} \left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a^2} \tag{3.3}$$

であるから

$$\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-ax} dx = \frac{1}{a^2} \tag{3.4}$$

が得られる．

つぎに

$$\frac{\partial^2}{\partial(-a)^2} I(0,a) = \int_0^\infty x^2\mathrm{e}^{-ax} dx \tag{3.5}$$

で，かつ

$$\frac{\partial}{\partial(-a)} \left(\frac{1}{a^2}\right) = \frac{2!}{a^3} \tag{3.6}$$

であるから

$$\int_0^\infty x^2\mathrm{e}^{-ax} dx = \frac{2!}{a^3} \tag{3.7}$$

が得られる．

同様に

$$\frac{\partial^3}{\partial(-a)^3} I(0,a) = \int_0^\infty x^3\mathrm{e}^{-ax} dx \tag{3.8}$$

で，かつ

$$\frac{\partial}{\partial(-a)} \left(\frac{2!}{a^3}\right) = \frac{3!}{a^4} \tag{3.9}$$

であるから

$$\int_0^\infty x^3\mathrm{e}^{-ax} dx = \frac{3!}{a^4} \tag{3.10}$$

が得られる．

これらの結果から，一般に

$$\int_0^\infty x^n\mathrm{e}^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \tag{3.11}$$

であることが推測される．これは (2.2) で $\alpha = n$，$n =$ 自然数 とおき，$\Gamma(n+1) = n!$ を用いれば，直ちに得られるが，4 節では (3.11) を数学的帰納法で証明する．

4　(3.11) の証明

(3.11) で $n=1$ とおけば

$$\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-ax}dex = \frac{1}{a^2} \tag{4.1}$$

となる．これは (3.4) であるから，(3.11) が $n=1$ のときに成り立つ．

つぎに $n=k$ のときに

$$\int_0^\infty x^k\mathrm{e}^{-ax}dx = \frac{k!}{a^{k+1}} \tag{4.2}$$

が成り立つとするとき，

$$\frac{\partial}{\partial(-a)}\int_0^\infty x^k\mathrm{e}^{-ax}dx = \frac{\partial}{\partial(-a)}\left(\frac{k!}{a^{k+1}}\right) \tag{4.3}$$

が成り立つ．

(4.3) の左辺は

$$\frac{\partial}{\partial(-a)}\int_0^\infty x^k\mathrm{e}^{-ax}dx = \int_0^\infty x^{k+1}\mathrm{e}^{-ax}dx \tag{4.4}$$

となり，右辺は

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial(-a)}\left(\frac{k!}{a^{k+1}}\right) &= (k+1)k!a^{-k-2} \\ &= \frac{(k+1)!}{a^{k+2}}\end{aligned} \tag{4.5}$$

となる．

したがって

$$\int_0^\infty x^{k+1}\mathrm{e}^{-ax}dx = \frac{(k+1)!}{a^{k+2}}$$

が得られる．これで (3.11) が $n=k+1$ に対して成り立つことが示された．以上から数学的帰納法によって (3.11) が成り立つ．

5　おわりに

積分記号下でパラメータで微分する方法と Gamma 関数の 2 通りの方法で定積分 $\int_0^\infty x^\alpha\mathrm{e}^{-ax}dx$ を求めた．

Gamma 関数から求める方法は単なる変数変換をしたにすぎない．そして，この求め方には α が自然数であるという制約はない．一方，パラメータ $-a$ で微分する方法での積分はちょっと面倒でかつ n が自然数の場合だけにしか適用できないが，それでも微分をして確かに定積分を求めたという安心感がある．

(2017.11.28)

参考文献

[1] 矢野　忠，微分をして積分を求める，研究と実践（愛数協）第 24 号　(1988.3) 2-8,
『数学散歩』（国土社，2005）93-97 に収録,『物理数学散歩』（国土社，2011）22-26 に再録,
この改訂版は，微分をして積分を求める 1，数学・物理通信，7 巻 9 号 (2017.12) 21-25

[2] 矢野　忠，Feynman の積分法と $\int_0^\infty x^s\mathrm{e}^{-ax^2}dx$，研究と実践（愛数協）第 96 号（2007.12) 17-22,
この改訂版は，微分をして積分を求める 2，数学・物理通信，7 巻 10 号 (2017.12) 2-8

カルダノ変換と平方完成

矢野　忠 [1]

Cardano Transformation and Completion of the Square

Tadashi YANO [2]

1　はじめに

『数理科学』2015 年 4 月号 [1] に 3 次方程式の簡約化のためのカルダノ変換は「2 次式についてはカルダノ変換は平方完成にほかならない」と書いてあるのに気がついた．中学校または高等学校で学ぶ 2 次関数とか 2 次方程式に関係した「平方完成」は数学教育の分野ではよく知られている [2]．しかし，それを 3 次方程式の 2 次の項を消去するために使われるカルダノ変換と関係づけて考えることはちょっと興味深いので，ここで述べてみたい．

2　カルダノ変換と平方完成

3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ についてカルダノ変換を考えよう．いま $x = t + e$ とおいて 3 次方程式に代入すれば，

$$(t+e)^3 + a(t+e)^2 + b(t+e) + c = 0$$
$$t^3 + (a+3e)t^2 + (b+2ae+3e^2)t + (c+be+ae^2+e^3) = 0$$

いま $a + 3e = 0$ とおけば，

$$t^3 + (b+2ae+3e^2)t + (c+be+ae^2+e^3) = 0$$

と 2 次の項 t^2 の項が消去されて 3 次方程式が解きやすくなる．このような変換をカルダノ変換という [3]．

では，このカルダノ変換 $x = t + e$ を 2 次関数に適用すればどうなるか．

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ &= a(t+e)^2 + b(t+e) + c \\ &= at^2 + (2ae+b)t + (ae^2+be+c) \end{aligned} \tag{2.1}$$

いま $2ae + b = 0$ とおけば，2 次関数の 1 次の項 t の項が消去される．すなわち，(2.1) から t の 1 次の項のない

$$y = at^2 + (ae^2+be+c) \tag{2.2}$$

が得られる．

変換式 $x = t+e$ では，e は任意定数であるが，2 次関数の変数 t の 1 次の項を消去するように選べば，$e = -\frac{b}{2a}$ となる．さらに，この e の値 $e = -\frac{b}{2a}$ を $ae^2 + be + c$ に代入すれば

$$ae^2 + be + c = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \tag{2.3}$$

[1] 元愛媛大学工学部

[2] yanotad@earth.ocn.ne.jp

[3]『数学辞典』（岩波書店）にはカルダノ変換という用語は載っていない．だからあまり普遍性のある用語ではないかも知れない．

となる．

変数を t ではなく，元の変数 x にもどすために $t = x - e = x + b/2a$ を (2.2) に代入し，かつ (2.3) も用いれば

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \tag{2.4}$$

が得られて，これは普通に求められている，これは 2 次関数の平方完成である．

したがって，平方完成は最高次の項の次の次数の項を消去する方法であったことがわかった．この平方完成のテクニックは 2 次関数のグラフの平行移動とも関係していることはよく知られている．

3　おわりに

別に珍しいことはなにもない．2 次関数の平方完成をカルダノ変換で行ったというだけである．だが，異なった見方ができることが役に立つことがあるかもしれない．

なお，3 次方程式の解の公式の導出は遠山啓著『数学入門』上 [3] にわかりやすく述べられているが，これについてこの説明を敷衍して述べたことがある [4].

（2017.11.27）

参考文献

[1] 木村俊一，代数学の天才たち,『数理科学』4 月号　(2015.4)　 15-21

[2] 矢野　忠，２次式と平方完成，数学・物理通信，5 巻 9 号 (2015.12) 19-23

[3] 遠山　啓,『数学入門』上（岩波新書，1960）213-216

[4] 矢野　忠，虚数とカルダノ方程式，数学・物理通信，5 巻 3 号 (2015.6) 3-20

中学入試問題を解く

矢野　忠[1]

Solving an Entrace Examination Problem for Secondary School

Tadashi YANO[2]

1　はじめに

これはどこにも発表をしたことがないエッセイである.「数学・物理通信」などには投稿してはいけない種類の文書かも知れない．書いたのは 2011 年 11 月のことだからもう 6 年も前のことになる．愛数協の機関誌「研究と実践」にも発表しようとは考えたこともなかった．ただ，まとめておきたいとは考えていたので，まとめてファイルの中にしまってあった．この私立中学校の入試問題のことを聞かれた S さんにだけはまとめたエッセイを渡したと思う．それ以上のことをする気持ちはなかった．だが，ちょっと気持ちの変化があったので，この「数学・物理通信」に埋め草として投稿する．これからもこのようなエッセイは多分投稿されることはないだろうし，投稿されてもあまり掲載するつもりもない．以上を前置きとする。

先日学習会（月 1 回の愛数協の学習会のこと）に出たら，S さん[3]から「この問題が解けたら教えてください」といって，問題をもらった[4]．それはある私立中学校の入試問題らしかった[5].

すぐにその日の昼食後の 20 分くらいをかけて代数で解いたが，これを代数で解くのではなく算数で解くのはまだできていない．試験という制約を無視すれば，代数で解いてなんら悪いところはないのだが，入試問題であればそうも行かないのであろう.

それで，S さんの宿題はまだできてはいないのだが，それについて書いてみよう.

まず，2 節で代数を用いて解き，3 節では算数まがいの方法で解く．これは本当は代数で解いているのだが，それを算数的に解釈をして解くという方法である．4 節はまとめである．5 節は付録であり，本文での話の筋をはっきりさせるためにテクニカルな代数計算はすべて付録 1-7 に述べた．代数計算のしかたをこの付録から学んでほしい[6].

2　問題を代数で解く

まず S さんから与えられた問題はつぎのようである.

（問題）　A, B, C, D の 4 人がはじめいくらかづつのお金を持っていて，B は C よりも 250 円多く持っていました．まず，A は所持金の $\frac{1}{7}$ を D に，B は所持金の $\frac{1}{19}$ を C にあげました．さらに，A は

[1]元愛媛大学工学部

[2]yanotad@earth.ocn.ne.jp

[3]大洲の小学校に当時勤めておられた新川雄也さん．現在は大東文化大学非常勤講師である.

[4]問題をもらったのはもちろん私だけではない．他の人も数人いたのだが，誰かほかの人が解いてくれたとは S さんからは聞いていない.

[5]私には私立中学校の数学の入試問題などはやさしくても解けないのが普通である．この問題はたまたま解けたにすぎない.

[6]これは偉そうないい方である．小学校の先生が主な相手だと思って勘弁してほしい.

C に，B は D にそれぞれ残りの所持金の $\frac{1}{6}$ をあげました．さらに，A は B に残りの所持金の $\frac{1}{5}$ をあげたところ，4 人の所持金はすべて同じになりました．このとき次の問いに答えなさい．
(1) A と B とのはじめの所持金の比を，もっとも簡単な整数の比で表しなさい．(式と計算)
(2) A のはじめの所持金は何円ですか．(式と計算)
(3) D のはじめの所持金は何円ですか．(式と計算)

(解答 1) 各操作を行う段階に分けて考えることにしよう．

(第 1 段階)
A, B, C, D の 4 人の人がいてそれぞれの人のはじめの所持金をそれぞれ x, y, z, w 円とする．そのときに B は C よりも 250 円多く持っていたというから

$$y = z + 250 \tag{2.1}$$

が成り立っている．

(第 2 段階)
A は所持金の $\frac{1}{7}$ を D に，B は所持金の $\frac{1}{19}$ を C にあげたから，そのことを式に表すと

$$\begin{aligned} A &: \ x - \frac{1}{7}x \\ B &: \ y - \frac{1}{19}y \\ C &: \ z + \frac{1}{19}y \\ D &: \ w + \frac{1}{7}x \end{aligned}$$

となる．これが第 2 段階である．

(第 3 段階)
つぎに，A は C に，B は D にそれぞれの $\frac{1}{6}$ をあげたから，A の手元と B の手元にはそれぞれの所持金の $\frac{5}{6}$ が残っている．したがって，それぞれの所持金は

$$\begin{aligned} A &: \ \frac{5}{6}\left(x - \frac{1}{7}x\right) \\ B &: \ \frac{5}{6}\left(y - \frac{1}{19}y\right) \\ C &: \ z + \frac{1}{19}y + \frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{7}x\right) \\ D &: \ w + \frac{1}{7}x + \frac{1}{6}\left(y - \frac{1}{19}y\right) \end{aligned}$$

となる．これが第 3 段階である．

(第 4 段階)

さらに，A は B に残りの所持金の $\frac{1}{5}$ をあげたから，A の手元には $\frac{4}{5}$ が残っている．ここで，C と D とは第 3 段階と同じで変らない．したがって，それぞれの所持金は

$$\begin{aligned}
A:&\ \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\left(x-\frac{1}{7}x\right)\\
B:&\ \frac{5}{6}\left(y-\frac{1}{19}y\right)+\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{6}\left(x-\frac{1}{7}x\right)\\
C:&\ z+\frac{1}{19}y+\frac{1}{6}\left(x-\frac{1}{7}x\right)\\
D:&\ w+\frac{1}{7}x+\frac{1}{6}\left(y-\frac{1}{19}y\right)
\end{aligned}$$

となる．これが第 4 段階である．

それぞれの所持金を表す式はそれぞれより簡単な式になるが，わざと問題に書かれた通りに書いてある．

さてこれらの操作の結果として A, B, C, D の 4 人の所持金は同じになるというから

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\left(x-\frac{1}{7}x\right)=\frac{5}{6}\left(y-\frac{1}{19}y\right)+\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{6}\left(x-\frac{1}{7}x\right)=z+\frac{1}{19}y+\frac{1}{6}\left(x-\frac{1}{7}\right)=w+\frac{1}{7}x+\frac{1}{6}\left(y-\frac{1}{19}y\right) \tag{2.2}$$

が成り立つ．この (2.1) と (2.2) とが与えられた条件のすべててある．

後はこれを解くという式の計算である．これまでまったく式を簡単にするということはしなかった．これからは式 (2.2) を簡単にして行こう．

$$\frac{4}{6}\left(x-\frac{1}{7}x\right)=\frac{5}{6}\left(y-\frac{1}{19}y\right)+\frac{1}{6}\left(x-\frac{1}{7}x\right)=z+\frac{1}{19}y+\frac{1}{6}\left(x-\frac{1}{7}x\right)=w+\frac{1}{7}x+\frac{1}{6}\left(y-\frac{1}{19}y\right)$$

さらに式を簡単にしていくと

$$\frac{4}{6}\left(1-\frac{1}{7}\right)x=\frac{5}{6}\left(1-\frac{1}{19}\right)y+\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{7}\right)x=z+\frac{1}{19}y+\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{7}\right)x=w+\frac{1}{7}x+\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{19}\right)y$$

これを続けて簡単にすると最終的に

$$\frac{4}{7}x=\frac{15}{19}y+\frac{1}{7}x=z+\frac{1}{19}y+\frac{1}{7}x=w+\frac{1}{7}x+\frac{3}{19}y \tag{2.3}$$

となる．わざわざ計算の手順を示したが，これは教育的な意味で示したのでもちろん答案には書く必要がない．だが，どういう風に計算するかを知ってもらうためにわざと書いた．

さらに全体に 7 をかけて

$$4x=\frac{15\times 7}{19}y+x=7z+\frac{7}{19}y+x=7w+x+\frac{3\times 7}{19}y \tag{2.4}$$

問 (1) は A と B とのはじめの所持金の比を，もっとも簡単な整数の比で表すことであったから，x と y との比を求めればよい．(2.4) から

$$4x=x+\frac{15\times 7}{19}y$$

から，

$$3x = \frac{15 \times 7}{19}y$$

であるから

$$\frac{x}{35} = \frac{y}{19} \tag{2.5}$$

となるので，$x : y = 35 : 19$ が求める比である．

問 (2) は A のはじめの所持金 x 円を求めることであるが，直ちに求めることはできないので，まず B と C とのはじめの所持金 y 円と z 円を求めることにしよう．

それには (2.4) から

$$\frac{15 \times 7}{19}y + x = 7z + \frac{7}{19}y + x \tag{2.6}$$

を用いる．これから y と z との比を求めることができる．計算は付録 1 に記すのでここでは省略するが，

$$\frac{y}{19} = \frac{z}{14} \tag{2.7}$$

となる [7]．これを (2.1) と連立させれば，$z = 700$ が得られ，これから $y = 950$ となる [8]．したがって，(2.5) から

$$x = 950 \times \frac{35}{19} = 1750$$

と求められる．

問 (3) は D のはじめの所持金 w 円を求めることであった．それには (2.4) から

$$\frac{15 \times 7}{19}y + x = 7w + x + \frac{3 \times 7}{19}y \tag{2.8}$$

を用いる．これから

$$w = \frac{12}{19}y = 600 \tag{2.9}$$

が求められる [9]．すなわち D のはじめの所持金は 600 円であった．

以上で問題は解けたわけだが，これは中学校の入試問題であってこのような連立方程式を使って解くのは禁じ手であろう．そうすると，代数を使わずに算数で解かなくてはならない．

3　問題を算数で解く

算数で解くといったが，まったく算数で解くことなど思いつかないので，上の代数で解く方法を参考にして解き方を考えてみよう．

(解答 2)　代数では A, B, C, D の 4 人のはじめの所持金を x, y, z, w 円としたが，この節では名前と同じ記号で表して A, B, C, D 円としよう．人の名前との違いは所持金を各人の名前を表す文字のイタリック体で表していることである．

[7]計算の詳細は付録 1 を参照せよ．
[8]計算の詳細は付録 2 を参照せよ．
[9]計算の詳細は付録 3 を参照せよ．

まず，問題に「B の所持金は C よりも 250 円多い」とあるから，$B - C = 250$ が成り立つ．そのことに注目して B の所持金と C の所持金がどのように変っていくかを調べて，最後の両者の所持金の差がやはり 250 円であることを使えばよい．

分かりやすいように代数の解法と同じように段階に分けて考えよう．

（第 1 段階）はじめの所持金は

$$A, \quad B, \quad C, \quad D$$

である．

（第 2 段階）この段階では A はその 1/7 を D に，B は 1/19 を C にあげるから

$$\frac{6}{7}A, \quad \frac{18}{19}B, \quad C + \frac{1}{19}B, \quad D + \frac{1}{7}A$$

（第 3 段階）この段階では第 2 段階での A の所持金の 1/6 を C にあげ，B の所持金の 1/6 を D にあげるから

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7}A, \quad \frac{5}{6} \cdot \frac{18}{19}B, \quad C + \frac{1}{19}B + \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{7}A, \quad D + \frac{1}{7}A + \frac{1}{6} \cdot \frac{18}{19}B$$

（第 4 段階）この段階では第 3 段階の A の所持金の 1/5 を B にあげるから

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7}A, \quad \frac{5}{6} \cdot \frac{18}{19}B + \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7}A, \quad C + \frac{1}{19}B + \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{7}A, \quad D + \frac{1}{7}A + \frac{1}{6} \cdot \frac{18}{19}B$$

となる．この第 4 段階では C と D との所持金は第 3 段階とは変っていない．

さて，ここまではじめの所持金の前にかかっている分数を約分して簡単にしなかったが，その約分をすると

$$\frac{4}{7}A, \quad \frac{5 \times 3}{19}B + \frac{1}{7}A, \quad C + \frac{1}{19}B + \frac{1}{7}A, \quad D + \frac{1}{7}A + \frac{3}{19}B$$

B と C とが A からもらったお金は同額なので B の所持金の 15/19 は C のはじめの所持金と B の所持金の 1/19 を足したものに等しい．式で表すと

$$\frac{15}{19}B = C + \frac{1}{19}B$$

である．この式を書く必要はないが，参考のために書いた．

これから B の所持金の 14/19 倍が C のはじめの所持金に等しいから，B と C の所持金の比は 19 : 14 である．すなわち

$$\frac{14}{19}B = C \tag{3.1}$$

である [10]．したがって B と C との所持金の差は

$$B - C = \left(1 - \frac{14}{19}\right)B = 250 \tag{3.2}$$

であり，また B の所持金の 14/19 が C の所持金であるから

$$B = 50 \times 19 = 950$$
$$C = 50 \times 14 = 700$$

が求められる [11]．

[10] 付録 4 に代数計算を示す．
[11] 付録 5 に代数計算を示す．

またAの所持金の4/7はBの所持金15/19にAの所持金の1/7をたしたものとに等しいから，結局Aの所持金の3/7がBの所持金の15/19に等しい．したがってAの所持金はBの所持金の35/19である．したがって

$$950 \times \frac{35}{19} = 1750$$

となる[12]．これで問（1）と（2）とが解けた．AとBとの所持金の比は35 : 19であり，Aの所持金は1750円である．
問（3）はDの所持金はCの所持金からBの所持金の2/19を引いたものであるから[13]

$$700 - 950 \times \frac{2}{19} = 600 \tag{3.3}$$

であり，Dのはじめの所持金は600円であった．

4　おわりに

ここでは算数で問題を解くといいながら，問 (1), (2), (3) を解くのに結局，考えの基礎に代数を使っている．

さて，中学受験をするときにはどうしたらいいのだろうか．もし私が自分の子どもを受験させるとして，自分の子どもに教えているのならば，代数を教えてそれを考え方のもとに使いながら算数的に解釈をさせて問題を解かせるという3節で示した方法をとるであろう．

それが無理なら受験に失敗してもこの問題を捨てるという選択をさせる．そしてその他の箇所で凡ミスをしないように注意深く検討するという方針をとらすであろう．それでも志望の学校に入学できないようならば，潔くあきらめさせる．

だが，こういう試験問題をうまく解く方法を教える先生もいるのかもしれない．そういう先生に出会えればそれはそれで幸せかもしれないが，やはり小学生といえども代数を学ぶのが正道であろう．

入試問題を解く中学受験生がいるわけだが，一方でこういう問題を考えた出題者の先生がいる．どういうふうにしてこの問題をつくったのだろうか．その問題をつくる秘密を知りたいという気がする．多分，代数的に考えて問題をつくり，それを算数でも解けるかと検討したのではなかろうか．それにしても人を選別するための試験問題をつくることは気が重い．

5　付録

付録 1

$$\frac{15 \times 7}{19}y + x = 7z + \frac{7}{19}y + x \tag{2.6}$$

から，x を両辺から消去し，両辺を7でわれば

$$\frac{15}{19}y = z + \frac{1}{19}y$$

が得られるが，同類項を簡約すれば

$$\frac{14}{19}y = z$$

この式の両辺を14でわれば，(2.7) が得られる．

[12]付録6に代数計算を示す．
[13]付録7に代数計算を示す．

付録 2

$$y = z + 250 \tag{2.1}$$

と

$$\frac{y}{19} = \frac{z}{14} \tag{2.7}$$

の連立方程式の解き方は 2 通り考えられる．

第 1 の解法は，いま，もし

$$\frac{y}{19} = \frac{z}{14} = k$$

とおけば，

$$y = 19k$$
$$z = 14k$$

となる．これを (2.1) に代入すれば，

$$19k = 14k + 250$$

から，$k = 50$ が得られる．

$$y = 19k = 50 \times 19 = 950$$
$$z = 14k = 50 \times 14 = 700$$

第 2 の解法は，(2.7) を $14y = 19z$ と変形して，(2.1) の両辺に 14 をかけて

$$14y = 14(z + 250)$$

とし，$14y = 19z$ をこの左辺に代入すれば，

$$19z = 14(z + 250)$$

から $z = 700$ が得られる．これから $y = 950$ が得られる．

付録 3

$$\frac{15 \times 7}{19} y + x = 7w + x + \frac{3 \times 7}{19} y \tag{2.8}$$

から x を両辺から消去し，両辺を 7 でわれば

$$\frac{15}{19} y = w + \frac{3}{19} y$$

となる．ここで，同類項を簡約すれば

$$\frac{12}{19} y = w \tag{2.9}$$

が得られる．

付録 4

$$\frac{5\times 3}{19}B+\frac{1}{7}A=C+\frac{1}{19}B+\frac{1}{7}A$$

の両辺から $\frac{1}{7}A$ を消去し，同類項を簡約すれば

$$\frac{14}{19}B=C \tag{3.1}$$

が得られる．

付録 5

$$B-C=\left(1-\frac{14}{19}\right)B=250 \tag{3.2}$$

から

$$\frac{5}{19}B=250$$

が得られ，これから

$$B=50\times 19=950$$

が求められ，また

$$C=\frac{14}{19}B=50\times 19\times\frac{14}{19}=50\times 14=700$$

が求められる．

付録 6

$$\frac{4}{7}A=\frac{5\times 3}{19}B+\frac{1}{7}A \tag{5.1}$$

この式で $\frac{1}{7}A$ を左辺に移項して，簡約すれば

$$\frac{3}{7}A=\frac{5\times 3}{19}B \tag{5.2}$$

この両辺を 3 でわれば

$$\frac{1}{7}A=\frac{5}{19}B \tag{5.3}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned}A&=\frac{35}{19}B\\&=50\times 19\times\frac{35}{19}\\&=50\times 35\\&=1750\end{aligned}$$

が求められる．

付録 7

$$C + \frac{1}{19}B + \frac{1}{7}A = D + \frac{1}{7}A + \frac{3}{19}B$$

の両辺から $\frac{1}{7}A$ を消去し，右辺の $\frac{3}{19}B$ を左辺に移項すれば

$$D = C - \frac{2}{19}B$$

となる．

(2011．11．9)(2017.12.2 改訂)

弦振動の形状作図

齊藤宗孝 *

2017Oct08

1　発端

弦振動の形状作図（振動中の弦の形状の作図）をしてみた発端
先日ですが数学･物理通信７巻4,6,7号（2017年９月）に世戸憲治先生の「誤解を招く弦振動の問題」という記事があり、弦の振動についての思い込みと事実の違いに驚かされました。最初は半信半疑で、ふと学生時代に買った「PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS」（Arthur Gordon Webster 著）のことを思い出し、約４０年振りに手にとって開いて見ました。そして弦の振動の頁を読んでみると、同じ結果を導く事が書いてあったので部分的ですが翻訳してみました。そして記事の内容に当てはまるように作図してみて、まさに記事のとおりの結果を得ました。以下は関連部分翻訳と作図です。

2　第一章　偏微分方程式の導出

（第１２節の途中から　３０，３１頁を翻訳しました）
音の問題に関連して、伸ばしたフレキシブルな弦又は膜の運動を考えて見ましょう。どちらの場合も張力 τ との比較で重量は無視する事にします。　弦の一部、長さ ds・質量 ρds の部分を考えます。弦の平衡位置をｘ軸として、接線がｘ軸と交わる角度の二乗が無視できる程に小さいｙを各位置の変位量とします。そして $ds = dx\{1 + (\frac{\partial y}{\partial x})^2\}^{1/2} = dx, \sin\theta = \frac{dy}{ds} = \frac{\partial y}{\partial x}$ ここに θ はｘ軸と接線の作る角度、と置きます，Ｆｉｇ．１４。弦の伸びと重量は無視するので張力 τ は定数です。単位長さ当り Y の横力が弦に働いていると想定しましょう。要素 ds の左端では張力のｙ成分

$$\tau \sin\theta = \tau\frac{\partial y}{\partial x}$$

が下方に引いており、右では

$$\tau \sin(\theta + d\theta) = \tau\{\frac{\partial y}{\partial x} + dx\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\}$$

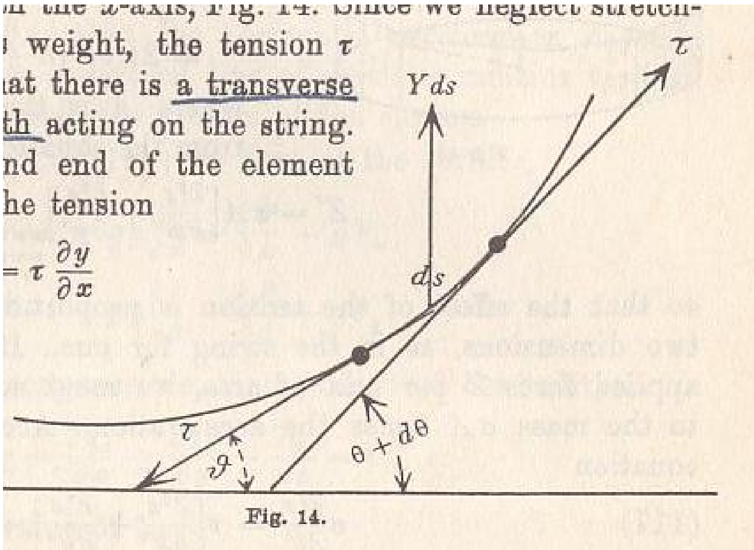
で上方に引いています。その差 $\tau dx\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ と力 Ydx の和が加速度 $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ の ρ 倍に等しいとおいて方程式を得ます。この方程式の両辺を dx で割り下記を得ます。
（１１６）

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \tau\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + Y$$

このように、もし $Y = 0$ ならば弦の変位は音の運動と同じくひとつの座標に依存する方程式を満たします。Y がゼロで無い領域は運動源と呼ぶことができます。

---

*1952 年生まれ　東工大応用物理　修士、元工場電気設備技師



3　第三章　２５節　オイラーの方程式、三つのタイプ

　　（中途７５頁からの翻訳です）
もっと一般的な方程式は、オイラーによって扱われたものです。
（１１）

$$a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x} + c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

ここに a, b, c は定数です。
線形変換により独立変数を変えると
（１２）

$$\alpha x + \beta y = \xi, \gamma x + \delta y = \eta,$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \alpha\frac{\partial z}{\partial \xi} + \gamma\frac{\partial z}{\partial \eta},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \beta\frac{\partial z}{\partial \xi} + \delta\frac{\partial z}{\partial \eta},$$

（１３）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (\alpha\frac{\partial}{\partial \xi} + \gamma\frac{\partial}{\partial \eta})^2 z,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (\beta\frac{\partial}{\partial \xi} + \delta\frac{\partial}{\partial \eta})^2 z,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (\alpha\frac{\partial}{\partial \xi} + \gamma\frac{\partial}{\partial \eta})(\beta\frac{\partial z}{\partial \xi} + \delta\frac{\partial z}{\partial \eta})$$

なので、方程式は
（１４）

$$(a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2)\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + (a\gamma^2 + 2b\gamma\delta + c\delta^2)\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\ + 2[a\alpha\gamma + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\beta\delta]\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

となります。$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を適切に選べば最初の二項は消えます。

$$\alpha = \gamma = 1, \beta = \lambda_1, \delta = \lambda_2,$$

ここに λ_1, λ_2 は二次式

$$a + 2b\lambda + c\lambda^2 = 0$$

の根です。従って
（１６）

$$b^2 - ac > 0,\ \text{実根}$$
$$b^2 - ac = 0,\ \text{同根}$$
$$b^2 - ac < 0,\ \text{虚根}$$

を得て、微分方程式を双曲線・放物線・楕円に特徴付けられます。この分類の重要性は第六章で現れます。
（１７）

$$(a + b(\lambda_1 + \lambda_2) + c\lambda_1\lambda_2)\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta} = 0$$

を得ますが、むしろ

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{2b}{c}, \lambda_1\lambda_2 = \frac{a}{c}$$

なので
（１８）

$$\frac{2}{c}(ac - b^2)\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta} = 0$$

を得ます。

$$ac \neq b^2$$

の場合は
（１９）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta} = 0, z = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$$

従って
（２０）

$$z = \varphi(x + \lambda_1 y) + \psi(x + \lambda_2 y)$$

を得ます。これが双曲線・楕円方程式のケースです。
$ac = b^2$ の場合は、、（以下この節の翻訳は省略します。）

4　第三章　２６節　弦の方程式、波動

（７６，７７頁途中までを翻訳します。）
この方法を第一章（１１６）式、伸ばした弦又は音の平面波（加えられた力無し）、に適用します。
（２３）

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, a^2 = \frac{\tau}{\rho}$$

ここで

$$\xi = x + \lambda_1 t, \eta = x + \lambda_2 t$$

と置きます。ここに

$$\lambda^2 - a^2 = 0, \lambda_1 = a, \lambda_2 = -a$$

です。すると
（２４）

$$u = \varphi(x + at) + \psi(x - at)$$

を得ます。この解は１７４７年にｄ’Ａｌｅｍｂｅｒｔにより与えられました。
これら二つの項の意味を別々に考察しましょう。

$$u_1 = \psi(\eta) = \psi(x - at)$$

η のそれぞれの値について u はひとつの明確な値を持っています。u_1 の値をひとつの η 表面で表すと、$\eta = x - at = const.$ の線に沿って u_1 は定数となり、従って面は $x = at, u = 0$ の線に平行に生成されたひとつの柱面体です、Ｆｉｇ．３４。
ある時間ｔにおける u_1 の値を得るには、$t = 0$ 平面から平行に距離 t だけ平面を移します。断面は $t = 0$ のものと同じで右の方に at だけ移動しています。
このように弦の最初の形は保たれたまま右方向に速度 a でひとつの波として進みます。もうひとつの項は同じ速度 a で左方向に進みます。（翻訳はここまでです。）

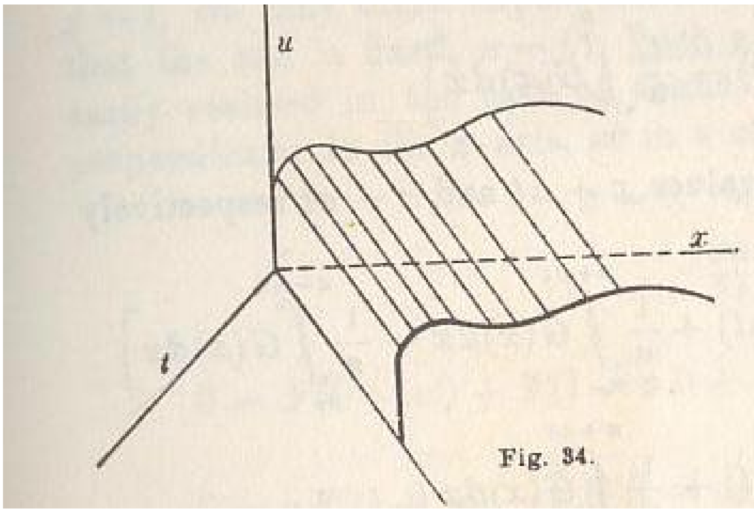
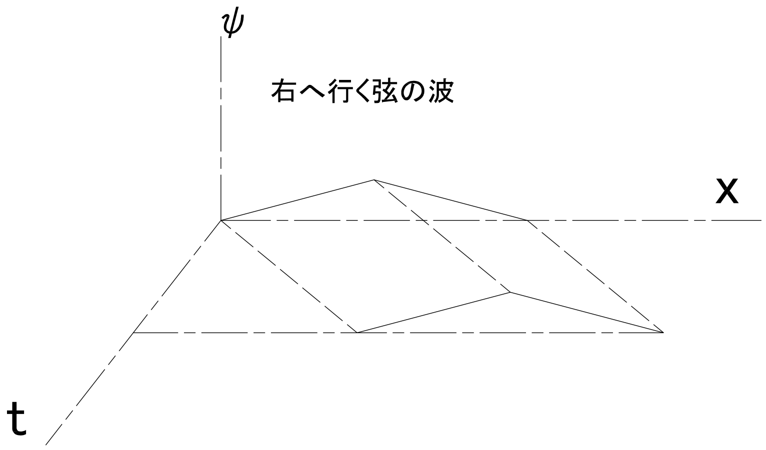
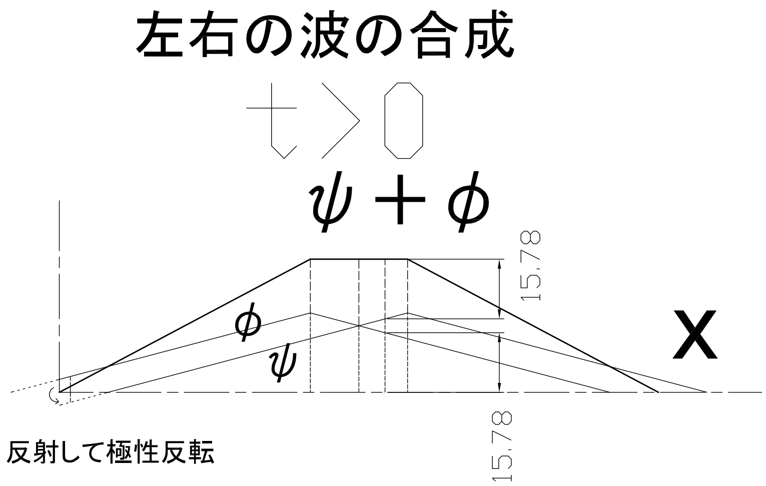


Fig. 34.

5　振動弦の作図

以上の結果を「誤解を招く弦振動の問題」に当てはめてＦｉｇ．３４に相当する図を作図してみると、左右に進む波 ψ, φ の加算されたものは中央部が直線になるように変化していくことがわかります。左右の固定点では振幅の極性が反転して反射されるとすると、「誤解を招く弦振動の問題」の結果に形が一致します。弦の中央部以外を引いた場合も同様の作図で結果が得られるはずです。中央部から張力の緩みが徐々に左右に伝わって行くというイメージと、$t = 0$ での弦の形がそのままの形で左右に波として伝わって行くという同時的なイメージ、この二つの異なったイメージが同じ結果を出すところが不思議であり、面白く感じられます。





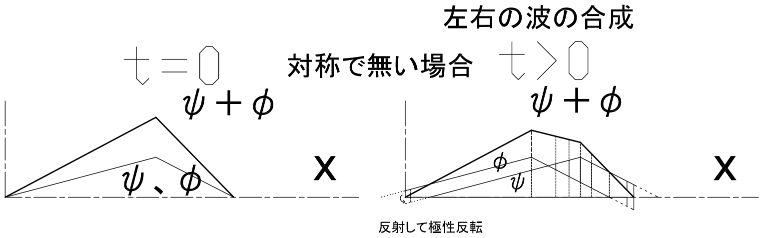
6　非対称な場合の振動弦の作図

中央以外を引いた場合の弦について同様の作図を行いました。この結果と「誤解を招く弦振動の問題」（２）（数学・物理通信 7-6）の解析結果に矛盾があるかどうかは検証していません。

Références

[1] mathphys-7-4,6,7 誤解を招く弦振動の問題・世戸憲治

[2] PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS · ARTHUR GORDON WEBSTER(1955 Dover Edition)


左右の波の合成
t＝0
対称で無い場合
t＞0
ψ＋φ
ψ、φ
X
ψ＋φ
φ
ψ
X
反射して極性反転

編集後記

年の瀬も押つまってきた．今年 (2017 年) 最後の「数学・物理通信」7 巻 10 号を発行する．

これはひとえに読者である斎藤さんの長文の読後の反応があったということに起因することは 7 巻 9 号の編集後記で書いた．

その後，浅田先生の論文投稿があったので，すでに編集してあった 7 巻 10 号を急いで編集し直して，浅田先生の論文を掲載すべきではないかと思ったりしたのだが，今回はそのままにさせて頂いた．

浅田先生の原稿の掲載が 3 月に延びたことに対して浅田先生に深くおわびをしたい．

3，6，9，12 月の 3 の倍数の月にこの「数学・物理通信」発行するという原則を維持したいが，それはあくまで原則であるから，もし投稿が多いならば，例外的な措置はときにはとってもいいかもしれない．

8 巻の発行は来年の 3 月を予定している．ご投稿をお願いします．

（矢野　忠）