数学・物理通信

7巻2号　　2017年3月

編集　新関章三・矢野　忠

2017 年 3 月 20 日

目次(Contents)

コサインの正負冪乗の有限和とチェビシェフ多項式
— 追 記 —

Finite Sums of Positive and Negative Powers of Cosines
and Čebyšev Polynomials — Addenda

中 西　襄 *[1]

Noboru NAKANISHI *[2]

1　はじめに

筆者は「数学・物理通信」6-9 で

$$V_n(N,x) \equiv \sum_{r=0}^{N-1}\left[\cos\left(x+\frac{2r\pi}{N}\right)\right]^n$$

の和公式を与えた．ここに N を正の整数，n を正または負の整数である．(4.6) に誤記があったので，訂正をしたい．そしてそのついでにいくつかコメントをしておきたい．

2　コサインの冪和の x 非依存性

(2.12) で $0 < n < N$ ならば，

$$\begin{aligned} V_n(N,x) &= \frac{(n-1)!\cdot N}{2^{n-1}(\frac{n}{2})!(\frac{n}{2}-1)!} && (n:\text{偶数}) \\ &= 0 && (n:\text{奇数}) \end{aligned}$$

であるという結果を得た．各項のコサインは x の関数なのに，その冪和が x に依存しなくなるというのは，大変著しい結果だと思う．これは周知のことなのかどうか，ご存知の方があればぜひ文献をご教示いただきたい．

(2.12) のノントリヴィアルで最も簡単な場合は $n=2, N=3$ である．これは電車のモーターなどに使われている三相交流 *[3] のエネルギー伝達（パワー）の式であり，それが時間によらず一定であることを示す．その大きさは直流の $V_2(3,x)=3/2$ 倍となる．上の結果から，三相でなくてもそれ以上であれば何相でもエネルギー伝達が一定であることがわかる．

なお，$n=2, N=4$ の式は，$2(\cos^2 x+\sin^2 x)=V_2(4,x)=2$ となるから，ピタゴラスの定理に他ならない．つまり上の結果はピタゴラスの定理の拡張といえる．

*[1] 京都大学名誉教授

*[2] nbr-nak@trio.plala.or.jp

*[3] 電圧と電流に位相差はないとする．

3　tan の和公式に関する訂正

円分方程式を利用して，tan の和公式を導いた．そして (4.6) として

$$\sum_{r=0}^{N-1}\tan\left(x+\frac{2r\pi}{N}\right)=N\tan\left(Nx-\frac{(N-1)\pi}{2}\right)=-N\cot(Nx+\tfrac{1}{2}N\pi)$$

と書いたが，ここまでの証明では左辺の tan の中の第 2 項に**係数 2 がかかっていない式**[*4]

$$\sum_{r=0}^{N-1}\tan\left(x+\frac{r\pi}{N}\right)=N\tan\left(Nx-\frac{(N-1)\pi}{2}\right)=-N\cot(Nx+\tfrac{1}{2}N\pi)\qquad(*)$$

である．従って与えた導出では，(4.2) を計算したことにはなっていないことになる．

N が奇数ならば，tan の周期が π であることを使うと，$r>N/2$ の項は $2r$ が奇数 $2r-N$ と同じことになるから，(4.2) すなわち (4.6) の左辺は，因子 2 のない式に等しい．つまりこの場合は，(4.6) は式 $(*)$ と同じ式であって，たんに説明不足だったということになる．

N が偶数ならば，(4.2) は

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{N-1}\tan\left(x+\frac{2r\pi}{N}\right)&=\sum_{r=0}^{(N/2)-1}\tan\left(x+\frac{2r\pi}{N}\right)+\sum_{r=N/2}^{N-1}\tan\left(x+\frac{2r\pi}{N}\right)\\&=\sum_{r=0}^{(N/2)-1}\tan\left(x+\frac{r\pi}{N/2}\right)+\sum_{r=0}^{(N/2)-1}\tan\left(x+\pi+\frac{r\pi}{N/2}\right)\\&=2\sum_{r=0}^{(N/2)-1}\tan\left(x+\frac{r\pi}{N/2}\right)\end{aligned}$$

となるから，正しい公式 $(*)$ を，N に $N/2$ を代入して使うと，

$$\sum_{r=0}^{N-1}\tan\left(x+\frac{2r\pi}{N}\right)=N\tan\left(\frac{Nx}{2}-\frac{(N-2)\pi}{4}\right)=-N\cot\left(\frac{Nx}{2}+\frac{N\pi}{4}\right)$$

を得る．つまり N が偶数の場合は (4.6) は誤りで，上のように訂正しなければならない．結局，(4.2) の和は，N が偶数のときは，それが奇数のときと比べて cot の中身がちょうど半分になったような形になるという面白い結果が得られた．

念のためチェックしておく．微分すると，定義から

$$\frac{d}{dx}\sum_{r=0}^{N-1}\tan\left(x+\frac{2r\pi}{N}\right)=V_{-2}(N,x)$$

となるはずである．N が奇数の場合は，微分すれば (3.15) の第 2 式

$$V_{-2}(N,x)=\frac{N^2}{\cos^2(Nx)},$$

[*4] 森口繁一他著「数学公式 II」の p.18 に載っている式

は直ちに得られる．N が偶数の場合は，微分してから公式 $2\cos^2\theta = 1+\cos(2\theta)$ を使うと，(3.13) の第 1 式

$$V_{-2}(N,x) = \frac{N^2}{1-(-1)^{N/2}\cos(Nx)}$$

を再生する．だから確かに OK である．

なお，$V_{-2}(N,x)$ の式は既知として，逆にそれを積分して (4.2) の和公式を導くという考えもありうる．しかしこのやり方では，積分定数の計算を改めてやらなくてはならない．

4　2 項係数の交代和が周期性をもつ例

6 節にチェビシェフ多項式の応用例として，2 項係数（組み合わせの数）の交代和が周期性をもつ例を与えた．すなわち第 1 種および第 2 種チェビシェフ多項式（$T_N(x)$ と $U_N(x)$）を使うと，和公式

$$\begin{aligned}\delta_N \equiv \sum_{r=0}^{[N/2]}(-1)^r\frac{N}{N-r}{}_{N-r}C_r = T_N\left(\frac{1}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{N\pi}{3}\right)\\ = \{1,-1,-2,-1,1,2\}\ \text{の繰り返し}\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}_N \equiv \sum_{r=0}^{[N/2]}(-1)^r{}_{N-r}C_r = U_N\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sin((N+1)\pi/3)}{\sin(\pi/3)}\\ = \{1,0,-1,-1,0,1\}\ \text{の繰り返し}\end{aligned}$$

が得られた．

δ_N と $\tilde{\delta}_N$ の差を考えると，積和公式 $2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$ により，

$$\begin{aligned}\delta_N-\tilde{\delta}_N \equiv \sum_{r=0}^{[N/2]}(-1)^r r\,{}_{N-r}C_r = -\frac{\sin((N-1)\pi/3)}{\sin(\pi/3)}\\ = \{0,-1,-1,0,1,1\}\ \text{の繰り返し}\end{aligned}$$

という公式が得られる．

チェビシェフ多項式を使うと，いろいろな周期性をもつ交代和が得られるが，残念ながら左辺の各項に r を指数とする（符号以外の）冪乗がかかってしまう．そのような因子がかからないような 2 項係数の有限交代和で周期性があるものとしては，次のような周期 8 のものがあるのを見つけた（森口繁一他著「数学公式 II」p.11）：

$$\begin{aligned}2^{-N/2}\sum_{r=0}^{[N/2]}(-1)^r{}_NC_{2r} &= \cos\left(\frac{N\pi}{4}\right)\\ &= \left\{\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}},-1,-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}},1\right\}\ \text{の繰り返し，}\\ 2^{-N/2}\sum_{r=0}^{[(N-1)/2]}(-1)^r{}_NC_{2r+1} &= \sin\left(\frac{N\pi}{4}\right)\\ &= \left\{\frac{1}{\sqrt{2}},1,\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}},-1,-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right\}\ \text{の繰り返し．}\end{aligned}$$

証明は,

$$\Big(\sum_{r=0}^{[N/2]}(-1)^r{}_NC_{2r}x^{2r}\Big)+i\Big(\sum_{r=0}^{[(N-1)/2]}(-1)^r{}_NC_{2r+1}x^{2r+1}\Big)$$
$$=\sum_{k=0}^{N}{}_NC_k(ix)^k=(1+ix)^N=\big((1+x^2)^{1/2}e^{i\arctan x}\big)^N$$
$$=(1+x^2)^{N/2}\big(\cos(N\arctan x)+i\sin(N\arctan x)\big)$$

において, $x=1$ とおけばよい.

錯聴現象「ミッシング・ファンダメンタル」

世戸 憲治 *

A Phenomenon of Auditory Illusion "Missing Fundamental"

Kenji SETO*

1　はじめに

小方厚著「音律と音階の科学　ドレミ $\cdots$ はどのようにして生まれたか」(講談社ブルーバックス) を読んでみた．著者の小方氏は，名古屋大学プラズマ研究所，日本原子力研究所，高エネルギー加速器研究機構，広島大学等に勤められたれっきとした物理学者である．専門はプラズマによる粒子加速であるらしいが，音楽にも極めて造詣が深く，自身はビブラフォンを演奏しながら学生と一緒にジャズを楽しんでいる．この本は，主として，音律，特にピタゴラス音律，純正律，平均律など，および，これらから派生するコード進行等について詳しく物理的根拠に基づいた方法で述べられている．

この本の中の P.96 に missing fundamental という現象について書かれているが，これは大変興味ある現象なのでここで取り上げてみた．その部分をこの本から引用すると，『聴覚の錯覚はうなりだけではない．次のような事実もある．100Hz, 200Hz, 300Hz, ..., 1000Hz の 10 個の純音を同時に聴かせると，100Hz の高さの音と感じる．上記 10 音から 100Hz の純音だけを消し去り，200Hz, 300Hz, ..., 1000Hz の 9 個の純音を同時に聴いたときも，100Hz の音を感じる．さらに，200Hz も取り去って 300Hz から始まる 8 音を聴いても，100Hz の音を感じる．この 100Hz を missing fundamental すなわち，「存在しない基本波」と言う．この現象のデモンストレーションはウェブを検索すると見つけることができる．』というものである．この現象は，物理的考察だけで説明がつくものなのか，それとも心理学的要素も入れないと説明がつかないものかよくはわからないが，ここではできうる限り数学的に考察してみる．

2　数学的に扱ってみると

もちろん，人間が聴く音は空気の振動が耳に伝わったものである．ここでは，時刻 t における振動数 ν の振動を正弦波の $\sin(2\pi\nu t)$ で表すことにする．さらに，「はじめに」のところで述べたように振動数がある基本振動数 ν_0 の整数倍のときは，$\nu = r\nu_0$，$r = 1, 2, 3, \cdots$ と表わされる．これらの音を同時に聴いたときの振動は，r について m から n までの和

$$S_{m,n}(t) = \sum_{r=m}^{n} \sin(2\pi\nu_0 rt), \qquad 1 \le m < n \tag{2.1}$$

* 北海学園大学名誉教授　　E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

と考えることができる[*1]．ここでの問題に即して言えば，$n=10$, $\nu_0=100\mathrm{Hz}$ である．

もちろん，sine 関数に関する和公式は数学公式集にでてはいるが，ここでは，積和公式

$$2\sin(A)\sin(B)=\cos(A-B)-\cos(A+B) \tag{2.2}$$

を利用して導いてみよう．この式で，$A=rx$, $B=x/2$ としてから，$r=m$, $m+1$, $\cdots$, n とおいた式を作り，それらの式を辺々足し算すると，途中の項は相殺され，最初と最後の項のみが残り，

$$2\sin(x/2)\sum_{r=m}^{n}\sin(rx)=\cos\big((m-\tfrac{1}{2})x\big)-\cos\big((n+\tfrac{1}{2})x\big) \tag{2.3}$$

となる．これから，(2.1) 式の $S_{m,n}(t)$ の場合は，$x=2\pi\nu_0 t$ とおいて，

$$S_{m,n}(t)=\frac{\cos\big((2m-1)\pi\nu_0 t\big)-\cos\big((2n+1)\pi\nu_0 t\big)}{2\sin(\pi\nu_0 t)} \tag{2.4}$$

と求められる．ここでもし，n の値が m に比べ十分に大きければ，右辺の分子の 2 項目は近似的に無視できる，あるいは，超関数的に無視できると言った方がよいかもしれないが，そのときは，1 項目だけが主要項と考えられる．ただし，この項だけでは t が $1/\nu_0$ の整数倍のところでは分母がゼロとなるので，発散してしまうが，実際は分子の方も 1 項目と 2 項目とで相殺がおこりゼロとなるので，全体としては発散はしていない．このことを調べるため，k を整数として，$t=k/\nu_0$ の点で分母分子を，それぞれ，Taylor 展開すると，

$$2\sin(\pi\nu_0 t)=2\pi\nu_0(-1)^k\Big(t-\frac{k}{\nu_0}\Big)-\frac{1}{3}(\pi\nu_0)^3(-1)^k\Big(t-\frac{k}{\nu_0}\Big)^3+\cdots \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}\cos\big((2m-1)\pi\nu_0 t\big)-\cos\big((2n+1)\pi\nu_0 t\big)&=\frac{(-1)^k}{2}\big[(2n+1)^2-(2m-1)^2\big](\pi\nu_0)^2\Big(t-\frac{k}{\nu_0}\Big)^2\\&\quad-\frac{(-1)^k}{4!}\big[(2n+1)^4-(2m-1)^4\big](\pi\nu_0)^4\Big(t-\frac{k}{\nu_0}\Big)^4+\cdots\end{aligned} \tag{2.6}$$

となるので，$S_{m,n}(t)$ は，$t=k/\nu_0$ の近傍で，

$$S_{m,n}(t)=\frac{1}{4}\big[(2n+1)^2-(2m-1)^2\big]\Big[\pi\nu_0\Big(t-\frac{k}{\nu_0}\Big)-\frac{1}{12}\big[(2n+1)^2+(2m-1)^2-2\big](\pi\nu_0)^3\Big(t-\frac{k}{\nu_0}\Big)^3\Big]+\cdots \tag{2.7}$$

と展開される．この式大括弧中の $t-(k/\nu_0)$ の 3 次式を見ると，1 次の係数は正，3 次の係数は負となっているので，極大，極小を持つ曲線になる．ちなみに，このときの $S_{m,n}$ の極大値，極小値は

$$\pm\frac{1}{3}\frac{(2n+1)^2-(2m-1)^2}{\sqrt{(2n+1)^2+(2m-1)^2-2}} \tag{2.8}$$

となる．これは，n の値が m に比べ十分に大きいときは，大きなピークを形成し，このピークが周期 $1/\nu_0$ で，周期的に表れることになる．したがって，これが振動数 ν_0 の missing fundamental となって人間の耳に聴こえてくると考えられる．

以下では，「はじめに」のところで述べた問題に合わせて $n=10$, $\nu_0=100\mathrm{Hz}$ とおく．また，これまで用いた $S_{m,n}$ について添え字 n を省略して S_m と書く． ここでは，(2.1) 式の定義に従って S_m を数値計算し，グラフ化してみた．このとき，時間 t は 0 sec から 0.05 sec までとし，m については $m=1,2,3$ と，途中は飛ばして $m=6$, 9 の 5 とおりについて求めたものを図 1 から図 5 までに示す．

[*1] 人間は音振動の位相差までは認識できないということなので，ここでは位相については考慮しない．

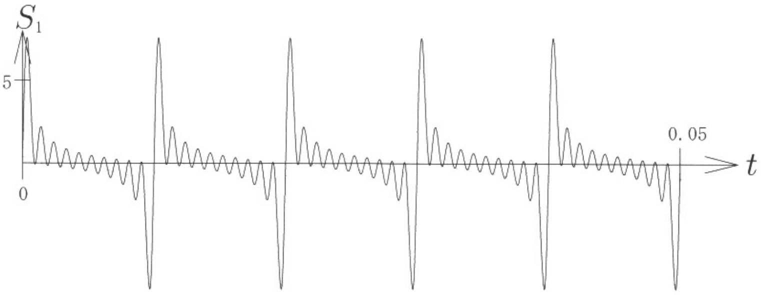

図 1　　S_1

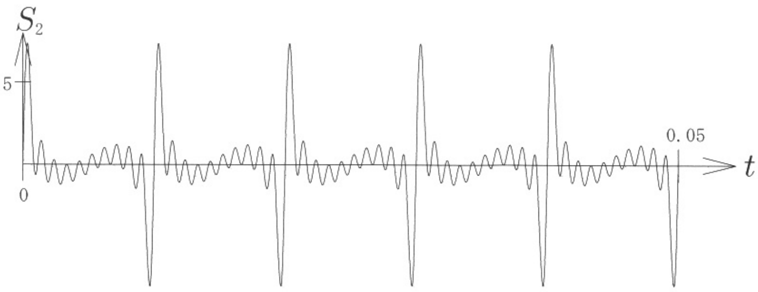

図 2　　S_2

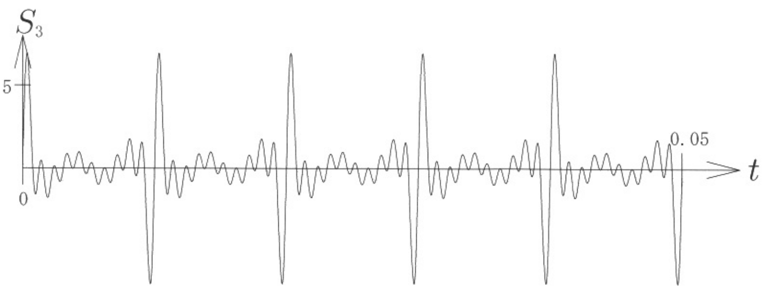

図 3　　S_3

これらの図から，時間 0.01 sec 間隔で 3 次式のピークが現れるのがわかる．100Hz の純音を取り除いた図 2，および，100Hz, 200Hz の純音を取り除いた図 3 は，図 1 に比べ，多少形は崩れるが，ほぼ同じ形と見做すことができる．したがって，これらの音を聴いたときは，100Hz の音として聴こえてくるはずである．これが missing fundamental に他ならない．この 3 次式のピークは m の値が大きくなるにつれ小さくなる．実際，(2.8) 式の極大値，極小値は，$m = 1, 2, 3$ に対し，小数点以下 3 桁の精度で，それぞれ，± 6.992, ± 6.803, ± 6.437 という値をとり，以下順次小さくなり，$m = 6$, 9 のときには，それぞれ，± 4.507, ± 1.877 となる．その結果，$m = 6$, 9 のときは，つぎの図 4，図 5 に示すように，うなりと見做せる形になる．

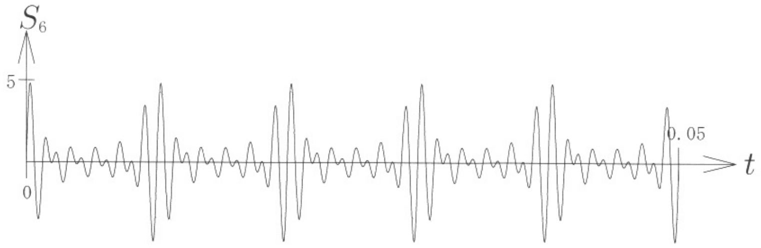

図 4　S_6

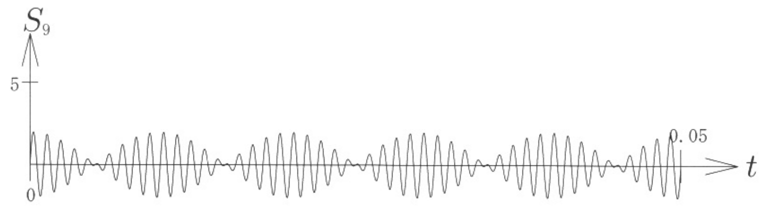

図 5　S_9

3　クラリネットの場合

ほとんどの楽器から出る音は，基本振動数を持つ基本波とその整数倍の振動数を持つ倍音からなるものである．しかし，クラリネットの場合は閉管構造になっているため，それが出す音は，基本振動数の奇数倍の倍音がでる．そのときでも missing fundamental は起こるのだろうか．すなわち，このときの振動数 ν は，基本振動数 ν_0 を用いて，$\nu = (2r-1)\nu_0$，$r = 1, 2, 3, \cdots$ と書け，これらの音を同時に聴いたときの振動は，(2.1) 式に代わって，

$$T_{m,n}(t) = \sum_{r=m}^{n} \sin\big(2\pi\nu_0(2r-1)t\big) \tag{3.1}$$

となる．この和を求めるためには，(2.2) 式において，$A = (2r-1)x$，$B = x$ としてから，$r = m$，$m+1$，$\cdots$，n とした式を作り，これらの式を辺々足し算すると，

$$2\sin(x)\sum_{r=m}^{n} \sin\big((2r-1)x\big) = \cos\big(2(m-1)x\big) - \cos(2nx) \tag{3.2}$$

を得る．これを用いると，$x = 2\pi\nu_0 t$ とおいて，(3.1) 式の $T_{m,n}(t)$ は

$$T_{m,n}(t) = \frac{\cos(4(m-1)\pi\nu_0 t) - \cos(4n\pi\nu_0 t)}{2\sin(2\pi\nu_0 t)} \tag{3.3}$$

となる．ここでも，n が m に比べ十分に大きければ，右辺分子の 2 項目は無視されるであろう．問題は分母がゼロとなる $t = k/(2\nu_0)$，$k = 1, 2, 3, \cdots$ のところであるが，この点で分母分子を Taylor 展開すると，

$$2\sin(2\pi\nu_0 t) = 4\pi\nu_0(-1)^k\Big(t - \frac{k}{2\nu_0}\Big) - \frac{8}{3}(\pi\nu_0)^3(-1)^k\Big(t - \frac{k}{2\nu_0}\Big)^3 + \cdots \tag{3.4}$$

$$\cos(4(m-1)\pi\nu_0 t) - \cos(4n\pi\nu_0 t) = 8\big[n^2-(m-1)^2\big](\pi\nu_0)^2\Big(t-\frac{k}{2\nu_0}\Big)^2 - \frac{32}{3}\big[n^4-(m-1)^4\big](\pi\nu_0)^4\Big(t-\frac{k}{2\nu_0}\Big)^4+\cdots \quad (3.5)$$

となる．これから，$T_{m,n}(t)$ は，$t=k/(2\nu_0)$ の近傍で，

$$T_{m,n}(t) = 2(-1)^k\big[n^2-(m-1)^2\big]\Big[\pi\nu_0\Big(t-\frac{k}{2\nu_0}\Big)-\frac{2}{3}\big[2n^2+2(m-1)^2-1\big](\pi\nu_0)^3\Big(t-\frac{k}{2\nu_0}\Big)^3\Big]+\cdots \quad (3.6)$$

と展開される．前節で求めた (2.7) 式と同じように t の 3 次式となるが，前と大きく異なることは，前は $t-k/\nu_0$ での展開に対し，今回は，$t-k/(2\nu_0)$ での展開であること，および，全体に $(-1)^k$ がついて k の偶奇によって全体の符号が変わることである．この関数 $T_{m,n}(t)$ は，t の値が $1/(2\nu_0)$ 増加する毎に，この t の 3 次式がピークになって現れるが，この関数の周期はあくまで，$1/\nu_0$ である．

以下，前節同様，$n=10$, $\nu_0=100$Hz とし，$T_{m,n}$ を単に T_m と書くことにする．この T_m を (3.1) 式に従って $m=1,2,3$ および，$m=6$, 9 の場合について数値計算したものを図 6 から図 10 までに示す．

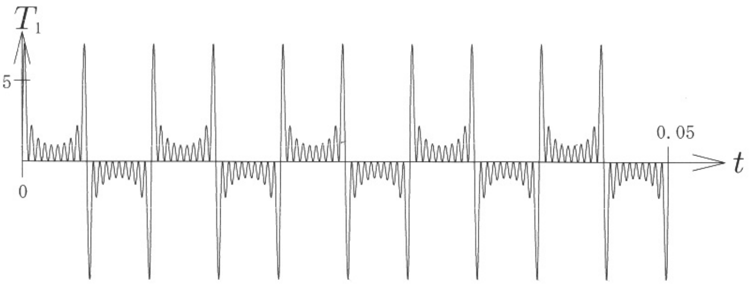

図 6　　T_1

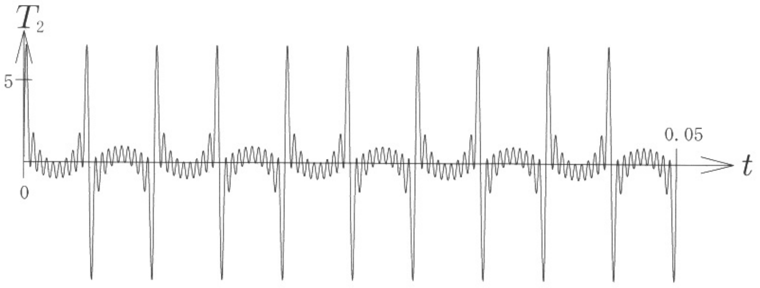

図 7　　T_2

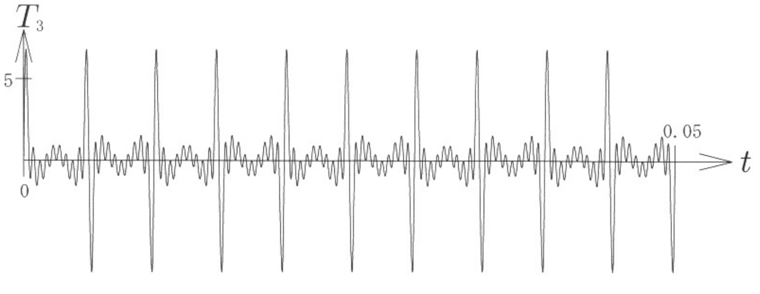

図 8　　T_3

これらの図から，この振動は確かに周期 $1/\nu_0 = 0.01$sec の振動になってはいるが，0.005sec 毎に 3 次式のピークが入るために，この音を聴いたときは，はたして 100Hz の音と感じるかは多少疑問が残る．特に，図 8 の場合は，前節の図 3 の周期を半分にしたものと似ているため，実際は 200Hz の音と感じるのではないかと思われる．しかし，この場合， 200Hz の音は (3.1) 式の $T_{m,n}$ には初めから入っていないので，これも missing fundamental の一種と考えられる．なお，(3.6) 式のように 3 次式で展開された $T_{m,n}$ の極大値，極小値は

$$\pm\frac{4(-1)^k}{3}\frac{n^2-(m-1)^2}{\sqrt{4n^2+4(m-1)^2-2}} \tag{3.7}$$

となるので，この場合も m の値が増加するにしたがい 3 次式のピークは小さくなる．その結果，$m = 6,\ 9$ の場合のつぎの図 9，図 10 は，図 4，図 5 のときと同じように，ただし，周期は半分，振動数は 2 倍のうなりとなる．

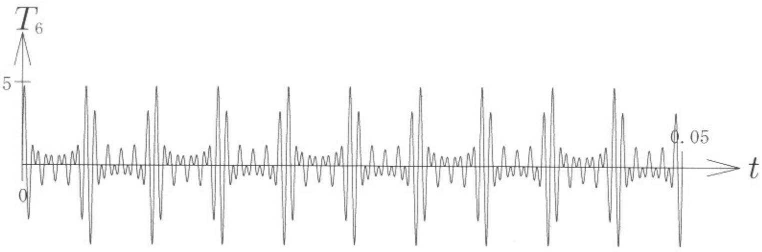

図 9　　T_6

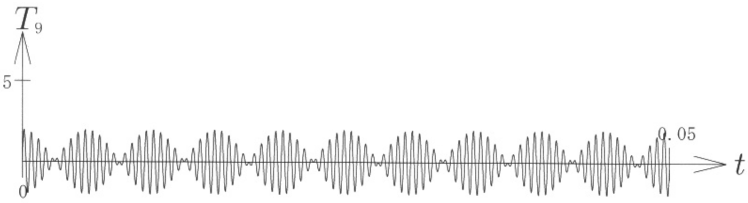

図 10　　T_9

4　おわりに

ある音の振動が 1 個の正弦波で表されるような音を純音という．しかし，実際にはこのような純音はコンピュータでも用いて人工的に作らない限り自然には生じないものである．楽器から出る音，あるいは人の声は，必ず倍音を含んでいる．これらの音を小さなスピーカー，あるいは，電話で聴いたときは，低周波の音がカットされる．しかしそれにもかかわらず，低音部が聴こえてくるのは missing fundamental のおかげである．この missing fundamental を端的に表す方法として，いま一般に振動数が ν_1，ν_2，ν_3，$\cdots$ の純音があるとし，これら振動の周期 $1/\nu_1$，$1/\nu_2$，$1/\nu_3$，$\cdots$ が，できるだけ小さな整数 k_1，k_2，$k_3,\cdots$ を用いて，$k_1/\nu_1 = k_2/\nu_2 = k_3/\nu_3 = \cdots$ とできるとき，これらの音を同時に聴いたときは，この逆数である振動数 $\nu_1/k_1 = \nu_2/k_2 = \nu_3/k_3 = \cdots$ の音として聴こえると言い表すことができる．このときの $k_1/\nu_1 = k_2/\nu_2 = \cdots$ は元の数列 $1/\nu_1$，$1/\nu_2$，$\cdots$ の最小公倍数であり，$\nu_1/k_1 = \nu_2/k_2 = \cdots$ は元の数列，ν_1，ν_2，$\cdots$ の最大公約数である．

もうひとつ，ここで扱った倍音の入り方であるが，有限個の n 個までとするのはあまりに単純すぎる．実際

は，高音部が徐々に小さくなるはずである．このことを考えると，(2.1) 式に代わって

$$S_m(t) = \sum_{r=m}^{\infty} \left[p^r \quad \text{or} \quad e^{-\alpha r} \quad \text{or} \quad e^{-\alpha r^2} \right] \sin(2\pi\nu_0 rt), \quad |p| < 1, \quad \alpha > 0 \tag{4.1}$$

とした方が良いのではないかとも考えられる．しかし，この方法を基に，数値的に当たってみたところでは，定性的にはほとんど変わりないという結果に落ち着きそうである．もう一つ，倍音の入り方は，楽器によって大きな差があり，それが楽器特有の音色を決めている．もし，この missing fundamental を厳密に議論しようとしたときは，楽器を特定したうえで解析するべきだろう．

[謝辞]

今回も，京都大学名誉教授の中西襄先生にこの原稿を見ていただき，たくさんのコメントをいただきました．特に，三角関数の和公式の導出方法について，初めは Euler 公式を用いて指数関数にしてから等比数列の和として導く面倒な方法を採用していました．しかし，先生からより簡便な方法を教えていただき，ここでは，その方法を採用することにしました．先生に，心から感謝いたします．

δ-関数等の分数冪微分と微分の対数の計算
Calculations of Fractional Order Differentiation and Logarithm of Differentiation of δ-Functions and Related Functions

浅田明 [1]
Akira Asada[2]

はじめに

δ-関数の分数冪微分や微分の対数 $\log(\dfrac{d}{dx})\delta$ の計算はあまりされていないようなのでその計算を試みた．この計算では分数冪微分についての Grunwald-Letkoniv の公式

$$\frac{d^a}{dx^a}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(\tau_h - I)^a f(x)}{h^a}$$

を使う (§1)．またその中で $\log x$ の冪級数について調べるのが役立つのでそれについても述べる (§3)．これらの結果は $\log(\dfrac{d}{dx})f(x)$ がどのようなクラスの関数にたいして定義できるかをしらべるのに使う目的だったが変換 $\mathcal{R}$;

$$\mathcal{R}[f(s)](x) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^s}{\Gamma(1+s)}f(s)ds$$

を使えば　公式

$$\log(\frac{d}{dx})x^c = -\log x\cdot x^c + \psi(1+c)x^c$$

が導かれ (§2) これからそれまでの議論とかかわりなく正則関数などには満足出来る結果が得られた (§4, §5)．具体的には $f(x)=\sum_n c_n x^n$ が原点の近傍で正則のとき $\Re a>0$ であれば

$$\log(\frac{d}{dx})f(x^a) = -\log x\cdot f(x^a) + \sum_n c_n\psi(1+an)x^{an}$$

である．目新しい事ではないかも知れいないが興味を持っていただければ幸いです.

目次

[1]元信州大学
[2]Professor emeritus, Sinsyu University

1 Grunwald-Letkoniv の公式

$\tau_h(f(x) = f(x+h)$ とする．$\dfrac{df}{dx}$ は $\lim_{h\to 0}\dfrac{(\tau_h - I)f(x)}{h}$ で定義されるが　同様に

$$\frac{d^a f}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{(\tau_h - I)^a f(x)}{h^a} \tag{1.1}$$

で分数幕微分が定義できる（Grunwald-Letkoniv の公式. [1]）.

(1) で $(\tau_h - I)^a = (-1)^a(I-\tau_h)^a$ は２項展開と $(\tau_h)^c = \tau_{ch}$ を使って

$$\begin{aligned}(I-\tau_h)^a =& I - a\tau_h + \frac{a(a-1)}{2}\tau_{2h} + \\ &+ \cdots + (-1)^k\frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!}\tau_{kh} + \cdots\end{aligned} \tag{1.2}$$

で計算される　([1], §5)．なお分数幕微積については [1], [7], 参照.

超関数 $\delta_c;\delta_c[f(x)] = f(c)$ は $\delta = \delta(x)$ を使って $\delta_c(x) = \delta(x-c)$ と書けるから

$$\tau_h\delta_c = \delta_{c-h}$$

である．よって $\dfrac{d^a}{dx^a}f(x)$ が Grunwald-Letkoniv の公式で定義できれば

$$\big(\lim_{h\to 0}\frac{(\tau_{-h} - I)^a}{h^a}\big)\delta_c[f(x)] = \frac{d^a}{dx^a}f(x)|_{x=c} \tag{1.3}$$

である．一方

$$(\tau_h - I)^a = \tau_{ah}(I-\tau_{-h})^a, \quad (\tau_{-h} - I)^a = (-1)^a(I-\tau_{-h})^a$$

だから　($(-1)^a$ を適当に定めて)

定理　１．δ_c の分数幕微分 $\delta_c^{(a)} = \dfrac{d^a}{dx^a}\delta_c$ は

$$\delta_c^{(a)}[f(x)] = (-1)^a\frac{d^a}{dx^a}f(x)|_{x=c} \tag{1.4}$$

で与えられる.

注意．(4) で $n\pi \leq \mathrm{Arg}(-1)^a < (n+2)\pi$ ととれば $\frac{d^af(x)}{dx^a}$ についても

$$n\pi \leq \mathrm{Arg}\frac{d^af(x)}{dx^a} < (n+2)\pi$$

と採ることとする.

定義１．$\delta_c^{(a)}f(x) = (-1)^a\dfrac{d^a}{dx^a}f(x)|_{x=c}, n\pi \leq \mathrm{Arg}(-1)^a < (n+2)\pi$ のとき $\delta_c^{(a)}f(x) = \delta_{c;n}^{(a)}f(x)$ と書き

$$(\delta_c^{(a)})f(x) = \{\delta_{c;n}^{(a)}f(x)|n\in\mathbb{Z}\} \tag{1.5}$$

と書く.

例．$\dfrac{d^a}{dx^a}x^k = \dfrac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k-a)}x^{k-a}$ だから

$$\delta_c^{(a)}x^k = \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k-a)}x^{k-a}$$

である．特に $\delta^{(a)} = \delta_0^{(a)}$ については

$$\delta^{(k)}x^k = \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k-a)}, \quad \delta^a x^k = 0,\ k > a,$$

であり $k<a$ であれば定義できない（発散する）．

この例は a が整数でなければ収束冪級数 $f(x)$ にたいしては $\delta^{(a)}$ は殆ど意味がなく意味のある定義域としては分数冪を含む級数が含まれる空間を考える必要があることを示唆している．$x^a=e^{a\log x}$ だから　このような関数空間として $\log x$ の冪級数の空間を考える．
$\dfrac{d^m}{dk^m}x^k=(\log x)^m x^k$ だから

$$\frac{d^a}{dx^a}(\log x)^m x^k=\frac{d^m}{dk^m}\big(\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k-a)}x^{k-a}\big)$$

である．よって

$$\begin{aligned}&\frac{d^a}{dx^a}(\log x)^m\\ =&x^{-a}\big(\sum_{n=0}^{m}\frac{n!(m-n)!}{m!}\frac{d^n}{dk^n}\big(\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k-a)}\big)|_{k=0}(\log x)^{(m-n)}\big)\end{aligned} \tag{1.6}$$

である．この式から $\delta^{(a)}[(\log x)^k]$ は $a\geq 0$ であれば定義できない（発散する）．こうした難点を処理するため次節で微分の対数 $\log(\dfrac{d}{dx})$ を使うことを試みる．

注意．a が整数でないとき有限指数型の $f(x)$ については

$$\frac{d^a f(x)}{dx^a}=\frac{x^{-a}}{\Gamma(1-a)}\big(f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}a}{(n-a)n!}\big(x^n\frac{d^n}{dx^n}\big)f(x)$$

が成立する．これから $\dfrac{d^a}{dx^a}\delta$ の正則化 $:\delta^{(a)}:$ を

$$:\delta^{(a)}:f(x)=x^a\frac{d^a f(x)}{dx^a}|_{x=0}=\frac{f(0)}{\Gamma(1-a)} \tag{1.7}$$

で定義する事が考えられる．これをしらべるのは将来の問題である．

なお $\delta_c,\,c\neq 0$ についても　$:\delta_c^{(a)}:f(x)$ を $x^a\dfrac{d^a f(x)}{dx^a}|_{x=c}$ で定義することが考えられるが　それは分数冪微分 $\dfrac{d^a}{dx^a}$ を分数冪 Euler 微分 $x^a\dfrac{d^a}{dx^a}$ に置き換えることなのでそれほど意味が無いようである．

2　$\log(\frac{d}{dx})\delta_c$ の計算

$\log(\dfrac{d}{dx})=\dfrac{d}{da}(\dfrac{d^a}{dx^a})|_{a=0}$ だから

$$\begin{aligned}&\log(\frac{d}{dx})\delta_c[f(x)]\\ =&\big(\frac{d}{da}\big((-1)^a\frac{d^a}{dx^a}f(x)\big)|_{a=0}\big)|_{x=c}=\big(\log(-1)+\log(\frac{d}{dx})\big)f(x)|_{x=c}\end{aligned}$$

である．ただし $\log(-1)$ は適当に決めるか多価として扱う．なお $\log(\dfrac{d}{dx})$ の Grunwald-Letnikov 型の定義は

$$\begin{aligned}\log(\frac{d}{dx})f(x)&=\lim_{h\to 0}(\log(\tau_h-I)-\log h)f(x),\\ \log(\tau_h-I)&=h\frac{d}{dx}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\tau_{nh}\end{aligned}$$

である．微分の対数 $\log(\dfrac{d}{dx})$ については [1],[9] 参照．

$\delta^{(a)}_{c;n}$ と同様に $n\pi \leq \mathrm{Arg}(\log(-1)), \mathrm{Arg}\log(\frac{d}{dx})f(x) < (n+2)\pi$ ととった時の $\log(\frac{d}{dx})\delta_c f(x)$ を $\log(\frac{d}{dx})\delta_c f(x)$ を $\log(\frac{d}{dx})\delta_{c;n}$ と書き

$$(\log(\frac{d}{dx})\delta_c)f(x) = \{\log(\frac{d}{dx})\delta_{c;n}|n \in \mathbb{Z}\} \tag{2.1}$$

と定義する．

注意． $f(x)$ が有限指数型であれば

$$\log(\frac{d}{dx})f(x) = -(\log x + \gamma)f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot n!}(x^n \frac{d^n}{dx^n})f(x),$$

となるから $\log(\frac{d}{dx})\delta$ は定義できない．しかし $:\delta^{(a)}:$ と同様に $\log(\frac{d}{dx})\delta$ の正則化 $:\log(\frac{d}{dx})\delta*$ を

$$:\log(\frac{d}{dx})\delta : f(x) = (\log(\frac{d}{dx}) + \log x)f(x)|_{x=0} = -\gamma f(0) \tag{2.2}$$

で定義することは考えられる．これは微分の対数 $\log(\frac{d}{dx})$ を $\log(\frac{d}{dx}) + \log x$ に置き換えることにあたる．積分変換 $\mathcal{R}$;

$$\mathcal{R}[f(s)](x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^s}{\Gamma(1+s)} f(s)ds$$

を用いると $\log x\mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{R}[(\psi(1+s) - \frac{d}{ds})f(s),$
$\log(\frac{d}{ds})\mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{R}[\frac{d}{ds}f(s)](x)$ だから $\log(\frac{d}{dx}) + \log x$ は

$$(\log(\frac{d}{dx}) + \log x)\mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{R}[\psi(1+s)f(s)](x)$$

と簡単な形になる．

$$\log(\frac{d}{dx})f(x) = \big(\gamma f(x) + \int_0^x \log(x-t)\frac{df(t)}{dt}dt\big) \tag{2.3}$$

$$= -(\log x + \gamma)f(x) - \int_0^x \log(1 - \frac{t}{x})\frac{df(t)}{dt}dt \tag{2.4}$$

だから ([1],[9]), $\Re c > -1$ のとき

$$\log(\frac{d}{dx})x^c = -\log x \cdot x^c - \big(\gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{n(n+c)}\big)x^c \tag{2.5}$$

である．なお a が整数 m であれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{n(n+m)} = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m}) = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}$$

となる　([1]).

注意　$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ を使えば (12) は

$$\log(\frac{d}{dx})x^c = -\log x \cdot x^c + \psi(1+c)x^c$$

と書ける．これについては 4 節で説明するが　変換 $\mathcal{R}$;

$$\mathcal{R}[f(s)](x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^s}{\Gamma(1+s)} f(s) ds$$

を使って

$$\begin{aligned}\mathcal{R}[\delta_c](x) =& \frac{x^c}{\Gamma(1+c)}, \\ \log(\frac{d}{dx})\mathcal{R}[f(s)](x) =& \mathcal{R}[\frac{df(s)}{ds}](x),\end{aligned}$$

から導かれる．

(10) の右辺は x, c について解析的だから c について解析接続して負の整数でない c については (10) が成り立つものとする．上の注意からこれは $\psi(1+c)$ を負の整数でないすべての複素数まで解析接続することにあたる．

また

$$\begin{aligned}\log(\frac{d}{dx})(\log x)^m =& -(\log x+\gamma)(\log x)^m + \\ &+ \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(-1)^{m-n-1} m! \zeta(m-n+1)}{n!} (\log x)^n \end{aligned} \tag{2.6}$$

も得られる ([1]).

なおこの式も $\dfrac{d^m}{dc^m}(\log(\frac{d}{dx})x^c)|_{c=0} = (\log(\dfrac{d}{dx})(\log x)^m$ から

$$\log(\frac{d}{dx})(\log x)^m = \frac{d^m}{dc^m}(-\log \cdot x^c + \psi(1+c)x^c)|_{c=0}$$

となる事と $\psi(1+c) = -\gamma + \sum_{k\ge 2}(-1)^k \zeta(k) c^{k-1}$ から導くことが出来る．

$k \ge 2$ であれば $|\zeta(k)| \le \zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$ だから

補題 1．数列 b_m が $|b_n| \le \dfrac{ML^m}{m!}, |L| < 1$ であれば

$$\sum_{m \ge n} |m! b_m \zeta(m-n+1)| \le \frac{M\pi^2}{6(1-|L|)} \tag{2.7}$$

がすべての n について成立する．

定理 2．$f(x) = \mathcal{B}[\phi(\zeta)](x)$, $\phi(\zeta)$ は $|\zeta| \le 1$ で正則，であれば $\log(\frac{d}{dx})f(\log x)$ は存在する．

証明．仮定から $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$ とすれば $|b_m| \le \dfrac{ML^m}{m!}$, $|L| \le 1$ となる $M > 0$. L > 0 がある．よって (12) から

$$\begin{aligned}\log(\frac{d}{dx})\big(\sum_{m=0}^{\infty} b_m (\log x)^m\big) &= \sum_{m=0}^{\infty} b_n (\log(\frac{d}{dx})(\log x)^m) \\ =& -(\log x+\gamma) f(\log x) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(-1)^{m-n-1} m! \zeta(m-n+1)}{n!} (\log x)^n \\ =& -(\log x+\gamma) f(\log x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m \ge n} \frac{(-1)^{m-n-1} b_m m! \zeta(m-n-1)}{n!} (\log x)^n\end{aligned}$$

さらに (12) から

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m\geq n}|\frac{(-1)^{m-n-1}b_m m!\zeta(m-n+1)}{n!}||\log x|^n$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{M\pi^2}{6(1-L)}|\log x|^n \tag{2.8}$$

となるから定理が得られる.

注意. $x^{-1}=e^{-\log x}$ だから定理の仮定 $\phi(\zeta)$ は $|\zeta|\leq 1$ で正則, は (10) によりこれ以上改良できない.

なお $f(x)$ が原点の近傍で正則なとき $\Re a>0$ であれば $\log(\dfrac{d}{dx})f(x^a)$ が存在することを §5 で示す.

定理 2 から $f(x)=\mathcal{B}[\phi(\zeta)](x)$, $\phi(\zeta)$ は $|\zeta|\leq 1$ で正則, であれば $c\neq 0$ のとき

$$\log(\frac{d}{dx})\delta_c[f(\log x)]=\big(\log(-1)+\log(\frac{d}{dx})\big)f(\log x)|_{x=c} \tag{2.9}$$

で $\log(\dfrac{d}{dx})\delta_c$ が定義できる. ただし $n\pi\leq\log(-1)<(n+2)\pi$ と取れば $n\pi\leq\mathrm{Arg}\log x<(n+2)\pi$ と取る事にする.

$f(x)$ が有限指数型であっても $\log(\frac{d}{dx})f(\log x)$ は必ずしも定義できないが $f_t(x)=f(tx)$ とすれば $f_t(\log x)=f(t\log x)$ は $|t|$ が充分小さければ $\log(\dfrac{d}{dx})f_t(\log x)$ は存在する.

定義 3. $f_t(\log x)$ は t,x の関数として解析的だから $\log(\frac{d}{dx})f_t(\log x)$ が $t=1$, $x=c$ まで解析接続されればその値で $\log(\dfrac{d}{dx})\delta_c f(\log x)$ を定義する.

3 $\log x$ の冪級数の空間

$\mathrm{Exp}(\mathbb{C})$ を有限指数型関数の空間とし

$$\mathrm{Exp}_{\log}(\mathbb{C})=\{f(\log x)|f\in\mathrm{Exp}(\mathbb{C})\} \tag{3.1}$$

とする. $f(x)$ は整関数だから $f(\log x)$ は $\mathbb{C}^{\times}=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ で定義された多価関数である.

$f(x)\in\mathrm{Exp}(\mathbb{C})$ であれば $f(x)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint e^{\frac{x}{t}}\dfrac{\phi(t)}{t}dt$ と書けるから $g(x)\in\mathrm{Exp}_{\log}(\mathbb{C})$ であれば

$$g(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint x^{\frac{1}{t}}\frac{\phi(t)}{t}dt \tag{3.2}$$

と書ける.

$\mathrm{Exp}^r(\mathbb{C})$ を $f\in\mathrm{Exp}(\mathbb{C})$, $f(x)-\dfrac{1}{2\pi i}\oint e^{x/t}\dfrac{\phi(t)}{t}dt$, $\phi(t)$ は $|t|\leq r$ で正則,

$$\mathrm{Exp}^r_{\log}(\mathbb{C})=\{f(\log x)|f(x)\in\mathrm{Exp}^r(\mathbb{C}),$$

とする. 定義から $\mathrm{Exp}^r(\mathbb{C})\subset\mathrm{Exp}^s(\mathbb{C})$, $r>s$ である. また定理 2 から $\mathrm{Exp}^1_{\log}(\mathbb{C})$ の上では $\log(\dfrac{d}{dx})$ が定義できる. さらに (15) から

$$\log(\frac{d}{dx}):\mathrm{Exp}^1_{\log}(\mathbb{C})\to\mathrm{Exp}^1_{\log}(\mathbb{C}) \tag{3.3}$$

である.

$x^a = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{a^n}{n!}(\log x)^n$ だから有限和 $\sum_{i=1}^{m} c_m x^{am}$ は $\mathrm{Exp}_{\log}(\mathbb{C})$ に属する．以下では無限和のもっとも簡単な場合として $f(x^a) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \dfrac{(an)^m}{m!}(\log x)^m$, $f(x) \in \mathrm{Exp}(\mathbb{C})$ をしらべる．この場合形式的には

$$f(x^a) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(an)^m}{m!}(\log x)^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (an)^m (\log x)^m$$

だから $|c_n| \le M\dfrac{C^n}{n!}$ として

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{MC^n(an)^m}{n!} = M(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^n n^m}{n!}), \quad L = |Ca|$$

の評価を試みる．最初に $n < m$ であれば

$$\frac{m^m}{m!} = \frac{m^n}{n!} \frac{m^{m-n}}{(n+1)\cdots m} \ge \frac{n^m}{n!}$$

となる事を注意する．一方 $m \le n$ であれば $\dfrac{m}{\ell} \ge \dfrac{m+k}{\ell+k}$, $k \le m$ だから

$$\frac{m^m}{m!} \ge \frac{n^m}{n!}$$

も成立する．これから

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^n n^m}{n!} =& \sum_{n=0}^{m-1} \frac{L^n m^n}{n!} + \sum_{n \ge m}^{\infty} \frac{L^n n^m}{n!} \\ \le& \frac{m^m}{m!}(\sum_{n=0}^{m-1} L^n + L^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L^n}{n!})\end{aligned}$$

ここで $L < 1$ とすれば Stirling の公式から

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^n n^m}{n!} \le e^m(\frac{1}{1-L} + L^m e^L) \tag{3.4}$$

である．よって $|L| = |Ca| < 1$ であれば

$$\begin{aligned}|f(x^a)| \le& \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} |\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(a_n)|^m \log x|^m \le \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^n m^n}{n!} |\log x|^m \\ \le& \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(e^m(\frac{1}{1-L} + L^m e^L)|\log x|^m \le \frac{e^{e|\log x|}}{1-L} + e^L e^{L|\log x|}\end{aligned}$$

となる．この評価と定理 2 により

定理 3.$f(x) = \sum_n c_n x^n$, $|c_n| \le M\dfrac{C^n}{n!}$ であり $|Ca| < 1$ であれば $f(x^a)$ は $\log x$ の冪級数に展開される．また $\log(\dfrac{d}{dx})f(x^a)$ が定義できる．

$f(x) \in \mathrm{Exp}(\mathbb{C})$ であれば定理 2 から

$$f(x; t, s) = f(tx^{as}) = \sum_n t^n c_n x^{san}, \quad f(x) = \sum_n c_n x^n, \tag{3.5}$$

は $|st|$ が充分小さいとき $\log x$ の冪級数に展開できる．$\mathbb{C} = \mathbb{C}_w$ を $\mathbb{C}^\times$ の普遍被覆空間 (座標は $w = \log x$)，$\mathbb{C}^2$ を (t, s)-空間とすれば　定理 2 から $f(x; t, s)$ は $D_\epsilon = \{(s, t) \in \mathbb{C}^2 ||st| < \epsilon\}$ として $D_\epsilon \times \mathbb{C}_w$ で正則である．もし $f(x; t, s)$ が $(t_0, s_0) \times \mathbb{C}_w$ まで解析接続できれば　それで $f(x; t_0, s_0)$ の $\log x$ の冪級数としての展開が与えられたと解釈することにする．しかし定理 3 の後半は §5 で大きく改良されるので解析接続の議論は殆ど不要になる．

4　例：Mittag-Leffler 関数への応用

a が負の実数でないとき

$$f_{a,c}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c^n}{\Gamma(1+na)}x^{an} \tag{4.1}$$

と置く．$a=1$ のときは $f_{1,c}(x)=e^{cx}$ である．$\Re a<0$ なら (22) の右辺は収束しないが $f_{a,c}(x)$ を (x,c,a) の解析関数とみて解析接続できれば左辺はその意味で定義されているとする．

$0<a\leq 1$ のときは Mpttag-Leffler 関数 $E_\rho(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{\Gamma(1+n/\rho)}$, $1\leq\rho<\infty$ ([6] 参照) を使えば

$$f_{a,c}(x)=E_{1/a}(cx^a)$$

である．$\Re a>0$ であれば定理 3 から $|ac|<1$ の時 $\log(\dfrac{d}{dx})f_{a,c}(x)$ が定義できるが具体的な形はわかりにくい．ここでは変換 $\mathcal{R}$ を使った計算で具体的な形を与える．

整関数の空間 $\mathrm{Ent}(\mathbb{C})$ の部分空間 $\mathrm{Ent}_{a,c}(\mathbb{C})$ を

$$\mathrm{Ent}_{a,c}(\mathbb{C})=\{f(x)\in\mathrm{Ent}(\mathbb{C})|\sum_{n=0}^{\infty}|c^nf(an)|<\infty\} \tag{4.2}$$

で定義すれば

$$T_{a,c}=\sum_{n=0}^{\infty}c^n\delta_{an} \tag{4.3}$$

は $\mathrm{Ent}_{a,c}(\mathbb{C})$ の上の線形汎関数である．$f_{a,c}(x)$ の定義から

$$\mathcal{R}[T_{a,c}](x)=f_{a,c}(x) \tag{4.4}$$

となる．よって 形式的には

$$\begin{aligned}
&\log(\frac{d}{dx})f_{a,c}(x)=\mathcal{R}[\frac{d}{ds}T_{a,c}](x)=\sum_{n=0}^{\infty}c^n\mathcal{R}[\delta'_{an}](x)\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}c^n(-\frac{d}{ds}(\frac{x^s}{\Gamma(1+s)})|_{s=an}=\sum_{n=0}^{\infty}c^n(-\frac{\log x\cdot x^s}{\Gamma(1+s)}+\frac{x^s\Gamma'(1+s)}{(\Gamma(1+s))^2})|_{s=an}\\
=&-\log x\cdot f_{a,c}(x)+\sum_{n=0}^{\infty}c^n\frac{\psi(1+an)}{\Gamma(1+an)}x^{an}
\end{aligned}$$

となる．ここで $\Re a>0$ であれば $|\psi(x)|=O(|\log x|), x\to\infty$ から $\sum_{n=0}^{\infty}c^n\dfrac{\psi(1+an)}{\Gamma(1+an)}x^{an}$ は収束する．よって $\Re a>0$ であれば

$$\log(\frac{d}{dx})f_{a,c}(x)=-\log x\cdot f_{c,a}(x)+\sum_{n=0}^{\infty}c^n\frac{\psi(1+a_n)}{\Gamma(1+an)}x^{an} \tag{4.5}$$

である．なお拡張された Borel 変換 $\mathcal{B}$ をつかえば $g_a(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\psi(1+a_n)x^n$ として

$$\sum_{n=0}^{\infty}c^n\frac{\Psi(1+a_n)}{\Gamma(1+a_n)}x^{an}=\mathcal{B}[g_a(cs^a)](x)$$

となる ([2].[3]. Borel 変換については [8] 参照)．よって (26) は

$$\log(\frac{d}{dx})f_{a,c}(x)=-\log x\cdot f_{c,a}(x)+\mathcal{B}[g_a(cs^a)](x) \tag{4.6}$$

と書ける．とくに $f_{1,c}(x)=e^{cx}$ については $\psi(1+n)=\sum_{k=1}^n\dfrac{1}{k}-\gamma$, $\psi(1)=-\gamma$ だから

$$g_1(cx)=-\gamma+\sum_{n=1}^{\infty}c^n(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\gamma)x^n$$

となり $\log(\dfrac{d}{dx})e^{cx}=-\log x\cdot e^{cx}+\mathcal{B}[g_1(cs)](x)$ である．

(12) をつかえば

$$\begin{aligned}&\log(\frac{d}{dx})f_{a,c}(x)\\&=-\log x\cdot f_{c,a}(x)-\gamma+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c^n}{\Gamma(1+an)}(\gamma-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{an}{k(k+an)})x^{an}\end{aligned}$$

である．(26) と比較して

$$\psi(1+an)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{an}{k(k+an)}-\gamma$$

である．この形から見ると $g_a(x)$ の代わりに

$$g_a^{\natural}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\psi(1+an)+\gamma)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{an}{k(k+an)})x^n \tag{4.7}$$

を使って

$$\log(\frac{d}{dx})f_{a,c}(x)=-(\log x+\gamma)f_{a,c}(x)+\mathcal{B}[g_a^{\natural}(cs)](x) \tag{4.8}$$

とした方が自然かもしれない.

5 $\log(\frac{d}{dx})f(\mathbf{a},x)$, $f(\mathbf{a},x)=\sum_n a(n)x^{a_n}$ の表示

$\log(\dfrac{d}{dx})x^c=-\log x\cdot x^c+\psi(1+c)x^c$ を使えば $f(x)=\sum_n c_nx^{a_n}$ が収束する場合

$$\log(\frac{d}{dx})f(x)=-\log x\cdot f(x)+\sum_n c_n\psi(1+a_n)x^{a_n} \tag{5.1}$$

である．これから

定理 4. $f(x)$ が $|x|<r$, $r=\infty$ を含む，で正則なら $\log(\dfrac{d}{dx})f(x)$ は $|x|<r$ で定義できる．

証明. $f(x)=\sum_n c_nx^n$ と $|x|<r$ で収束する冪級数でかける．(30) から $\sum_n c_n\psi(1+n)$ x ˆ n が $|x|<r$ で収束する事を示せば定理が成立するが $\psi(1+n)=O(\log n), n\to\infty$ だから $sum_nc_nx^n$ と $\sum_n c_n\psi(1+n)x^n$ の収束半径は同じだから定理が成立する．

同様に $\Re a>0$ であれば $|\psi(1+an)|=O(\log n),\quad n\to\infty$ だから $\log(\dfrac{d}{dx})f(x^a)$ は $|x|<|r^a|$ の多価関数として存在する．これは定理３（の後半）より強い結果である．しかし $f(x)$ が整関数でないとき $f(x^a)$ が $\log x$ の冪級数として展開できるかは定理４（とその証明）からは解らない．

(30) のみやすい表示を得るために　２変数関数 $f(a,x)=c(a)x^a$ を考える．$\mathbf{a}=(a_1,a_2,\ldots)$, $T_{\mathbf{a}}(s)=\sum_n\delta_{a_n}(s)$;

$$T_{\mathbf{a}}(s)[g(s,x)]=\sum_n g(a_n,x)$$

とすれば　$T_{\mathbf{a}}(a)f(a,x)=\sum_n c(a_n)x^{a_n}$ である．特に $c(a_n)=c_n$ であれば $T_{\mathbf{a}}f(a,x)=f(x)$ となる．また

$$T_{\mathbf{a}}(\psi(1+a)f(a,x))=\sum_n \psi(1+a_n)c_n x^{a_n}$$

である．よって (30) から

$$\log(\frac{d}{dx})f(x)=-\log x\cdot f(x)+T_{\mathbf{a}}(\psi(1+a)f(a,x)) \tag{5.2}$$

と書ける．ただし $f(a,x)=c(a)x^a$ は $c(a_n)=c_n$ であれば任意なので右辺のには不確定性がある．

例　$\mathbf{a}=(0,a,2a,\ldots)$, $c(a)=\dfrac{c^{n-1}}{\Gamma(1+a)}$ と採れば $T_{\mathbf{a}}f(a,x)=f_{a,c}(x)$ であり (26) は (31) からしたがう．

(31) の右辺第 2 項は　分数幂微分で現れた群とリー環の研究で現れた離散な台を持つ（Schwartz の意味とは限らない) 一般化関数 T にたいする変換

$$\mu_{-x;\psi}T=\exp(T_t\int_{-x}^{x}\psi(1+x+t)dt),\quad \iota_\psi T=T_t\psi(1+x+t)$$

と見かけが似ている ([2],[4], [5])．何か関係がないかは興味のあるところである．

参考文献

[1] 浅田　明.:関数を $\frac{1}{2}$ 回微分する．藤井一幸編「数理の玉手箱」 90-131．遊星社. 2010.

[2] Asada,A.: Integral transform arose from fractional calculus and discrete delta potential, Contemporary Topics in Mathematics and Statics with Applications, ed. Adhikari, M. R. Chapter 3. Kolkata, 2013.

[3] Asada,A.: Extended Borel transform and fractional calculus, in Fractional Calculus: History, Theory and Applications, eds. Daou, R. Xavier,M. Nova Publishers, 2014. An integral transform arising from fractional calculus, Fractiona Calculus with Applications to Dynamical System, eds. Cario,C. Yang, X.J. DeGruyter, 2016.

[4] 浅田　明 分数幂微積で現れたリー環の適切な完備化，数学・物理通信　6 − 8, 15-25, 2016. Minimal completion of the Lie algebra arising from fractional calculus, preprint.

[5] Asada,A.: Completion of the group and Lie algebra arising from fractional calculus, Proc. of IMBIC, 5 37-51, Kolkata, 2016.

[6] Erdéli, A. Magnus, W. Oberbettinger,F. Tricomi, F.G.: Higher Transcendental Functions, Chpa.18. New York 1981.

[7] Hermann,R.: Fractional Calculus - An Introduction for Physicists, World Sci. 2011.

[8] Martineau, A.: Sur les fonctionelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel, J. Ann. Math.11(1963), 1-164.

[9] Naknishi,N.: Logarithmic type functions of the differential operator, Yokohama J. Math. 55(2010), 149-163.

スーパームーン

矢野　忠[1]

Supermoon

Tadashi Yano[2]

1　はじめに

これはもともと私のブログに書いたスーパームーンのことを数式も入れて詳しく説明したものである．ブログでは私は基本的に数式を入れる技術をもっていない．このエッセイでは数式を入れることができるので，ちょっと喉につかえたようなところを解消できていれば幸いである．どのようなときにスーパームーンとなるかについては説明をつける必要があるのだが，そのことにはまったく触れなかった．

昨夜 (2016.11.14) は 68 年ぶりのスーパームーンだったとかだが，松山は雨で月を観測はできないと思ったので，戸外に出てみることもしなかった[3]．

スーパームーンについては NHK の 21 時のニュースでも取り上げられていた．月の大きさが普通のときの 1.14 倍に見えると聞いていたのだが，河野キャスターが「月が 30% も大きく見えるなんて」とニュースの終りに言われたので「そうだったの？」と疑問に思ってその夜は寝た．

今朝 (2016.11.15) になって新聞にスーパームーンの写真が載っていて，そのデータもでていた．それによると月の直径が 1.14 倍大きく，面積が 1.3 倍大きいという．それでようやくわかった[4]．その訳を次節で述べてみよう．

2　面積が 30% 大きく見えるのは？

朝食前だったので，コタツの机の上で 1.14 の 2 乗 1.14^2 を計算してみたら，ちょうど 1.29 くらいで面積の比で言えば，約 1.3 倍となる．

以上の説明で分かる人にはわかるのだが，ちょっと頭が悪い人になって，説明を補足しておこう．

普通のときの月の視半径を r_1, 月の面積を S_1, スーパームーンのときの月の視半径を r_2, 月の面積を S_2 としよう．これらの月の面積の比 S_2/S_1 は月の形が円であるとして

$$
\begin{aligned}
\frac{S_2}{S_1} &= \frac{\pi r_2^1}{\pi r_1^2} \\
&= \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \\
&= (1.14)^2 \\
&= 1.3
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

これで面積の比がほぼ 1.3 であることがわかった．これで月の面積が 30% 大きく見える理由がわかった．

---

[1]元愛媛大学工学部

[2]yanotad@earth.ocn.ne.jp

[3]先日 (2017.2.25)，私たちが毎月 1 回行っている雑談会では松山でも午後 10 時くらいに月を見ることができたという証言があった．

[4]地図の縮尺は距離の縮尺である．だから面積の比で言えば縮尺の 2 乗となっている．私のブログを訪ねる方は理工系の方が大部分だと思うので,「釈迦に説法ではある」のだが．

3　直径が 1.14 倍大きいのは？

つぎに直径が 1.14 倍に見えるというのはどうしてだろうかと考えた．月の視半径 r と地球から月までの距離 d とが反比例しているとすれば，$rd = 一定$ となる [5]．すなわち，

$$r_1 d_1 = r_2 d_2$$
$$r_2/r_1 = d_1/d_2 = 40/35 = 1.143$$

ここで，通常の地球から月への距離 $d_1 = 40$ 万キロメートル とスーパームーンのときの地球からの月への距離 $d_2 = 35$ 万キロメートル を代入した．

それでいまの月の距離 35 万キロと 4 月の距離 40 万キロとを反比例させて，40/35 を計算してみると 1.143 くらいになるから，月の直径が約 1.14 倍大きく見えることがわかった．

もっとも新聞には「月の視半径 r と地球から月までの距離 d とが反比例している」とかいう説明はなかったが，簡単な数学を使うとこういう結果が得られる．

今までそういうことを考えたことはなかったが，少し理性を働かせればこれくらいのことはわかる訳である．もっとも最近はインターネットを検索すれば，何でも分かってしまう時代だから，余計なお世話かも知れない．

4　おわりに

ちょっとインターネットを調べた見たところでは私のように理の勝った議論をしている人は少ないようである．きれいに月が見えるということが先に来て，その大きさがうんぬんとかはどうでもいいようである．

またインターネットでは月の表面の面積が 30% 増えるというのではなくて，明るさが 30% 増えるというふうに言っている．国立天文台のインターネットにはさすがに月面の面積がおよそ 30% 大きく見えるとあったが，距離から計算してとあるだけでどういうふうに計算するのかは説明がなかった．

天文学的にはスーパームーンは定義されていないので，占星術の概念だという説明も所々で見られたが，占星術の用語でもないと説明しているサイトもある．

[5] 本当にこの仮定が成り立っているのかどうか私は知らない．

教えることから見えてきたもの

矢野　忠 [1]

What I Convince Myself of While Teaching

Tadashi Yano [2]

1　はじめに

これは私が 2005 年 3 月に愛媛大学を退職した数か月後に同僚のみなさんが開いてくれたパーティのまえおきにお話した内容の一部です．

こんなことは誰でもわかっているようなことなのですが，私には何年も大学で教えることでしかわからなかったことなので，お恥ずかしいしだいですが，皆様のご参考としてここに投稿します．

2　教えることから見えてきたもの

「教えることから見えてきたもの」という題ですが，36 年 10 月にわたってほとんど毎年講義をしてきたので，そのことから私の学んだことについてお話をいたします．いわゆる物理のお話ですが，個々の具体的な話ではなくて私が教えられたことです．

愛媛大学の工学部に勤めるようになって数年すると電子工学科ができたり，資源工学科，海洋工学科ができたりして学科の数が 6 学科から 9 学科になったこともあり，私の上司の教授であった，荒木次郎先生の講義の一部を受け持つことになりました．それが「応用物理学」という科目でした．実際にこの科目で荒木先生が教えられていた内容は原子物理学と原子炉の話でした．

一般の方は「原子物理学」と聞くと難しいと思われるようですが，そうではありません．原子物理学は「量子力学」とか「原子核物理学」を本格的に勉強する前に予備的，入門的に学んでおく科目が「原子物理学」です．これなど一般の方と物理を専門にしているものとの間にイメージの差がとても大きい言葉の一つです．中学校や高校の理科の先生を目指す学生が教職単位としてとるやさしい科目としてよく指定されています．

それはいいのですが，原子炉のことについては大学で勉強したことがありませんでした．もちろん，私は専攻が原子核物理でしたから全く知らないとは言えないかも知れませんが，少なくとも原子炉の原理は知りませんでした．これはフェルミというイタリア人でアメリカへ亡命した天才物理学者がつくったのだと思います．それを大山彰著『現代原子力工学』（オーム社）というテクストで教えることになりました．これは荒木先生が選んだ本で前半の第 6 章までは私の学んだことのある原子物理学と原子核物理学分野のことでしたから，それほどとまどうことはありません．

第 7 章からがいわゆる原子炉工学の内容です．でも第 7 章は核分裂反応と核融合反応でそれほどびっくりすることではありません．第 8 章は原子炉の原理，第 9 章　原子炉工学，第 10 章　原子力発電，第 11 章　核燃料サイクルでこの本は終わりです．第 11 章は時間の関係もあって教えないとしても原子炉の原理と原子炉工学のところは教えずにはおれません．

原子炉の原理を学んでびっくりしたのは，はじめに無限に大きな原子炉を考えるということでした．実際の原子炉は無限に大きな原子炉なんてものは世界中どこを探しても存在しません．ところがあえて無限に大きな

[1]元愛媛大学工学部
[2]yanotad@earth.ocn.ne.jp

原子炉を考えるのです．これは無限に大きな原子炉だと原子炉からの中性子の漏れを考えなくていいからです．原子炉の原理では基本的に核分裂反応やその他の吸収反応により炉中の中性子の数が 1 世代でどのように変化するのかを考えます．そのときにまずは原子炉が有限の大きさをもっているために中性子が炉の外へ漏れる現象が必ずあるのですが，それをとりあえずは無視しようという大胆な考えです．

自分でテクストを読んでは講義ノートをつくるのですが，こんなことで実際的に有効な原子炉の理論ができるのだろうかと“ひとごと”ながらはらはらしました．それがテクストを読み進むと誠に見事に現実の有限な大きさの原子炉への適用が計られていました．

無限に大きな原子炉における中性子の増倍率 K（無限増倍率）に原子炉が有限であるために起こる中性子の漏れを表す割合 $1-L$ をただ単に考えると炉から中性子が漏れない割合は L となりますから，実際の原子炉の中性子の増倍率は $k = LK$（有効増倍率）で表されます．要するにたった一つのファクター L をいれることによって無限に大きな原子炉から現実の有限の大きさを持つ原子炉に理論が適用できる．

$k = 1$ のときは臨界といわれ，原子炉を定常運転するには k の値を 1 の極めて近くで 1 より小さくしたり，大きくしたりしてやれば（具体的にはコンピュータ制御で炉の中の制御棒を出し入れすることによって）原子炉の定常運転ができることになります．

言われてみれば「なあんだ」というようなコロンブスの卵のような話です．しかし，このようなことを考えられるのはやはりフェルミがやはり天才的な物理学者だから出来たのだと思いました（もっともこれくらいのことを考えられる物理学者は世界にはたくさんいるでしょうが）．

それで考えてみたのです．力学を勉強した時にも質点（質量だけあって大きさのない点）とか剛体（まったくひずまない物体）とかいうような概念を考えた訳ですし，第一に慣性の法則が成り立つためには摩擦とかがない世界を考える訳です．

確かにスケートリンクで私たちが滑るときは普通の床の上でよりもよく滑りますが，それでもまったく摩擦がない訳ではない．なぜそのようなありもしない世界を考えるのだろう．現実の世界を直視すれば，摩擦を無視することなど出来ません．

しかし，あえて「そういう現実を無視して事柄を理想化して本質を取り出す」．それが物理学の神髄であったのだとやっと気がついたような次第です．

『現実を真に理解するためには一度現実から離れた抽象的な世界を想像しなければならない．これはなんというアイロニカルな考えなんだろう．およそ凡人の考えおよばぬところではないか.』

私が自著『数学散歩』（国土社）の「力学の道草」の項に上のように書いたのはこういう事情からでした．

3　おわりに

はなはだお粗末な話でそれもたった一言で言えるようなことをもったいぶって長々とお話をしてしまいました．私の分かるのが遅すぎたこの認識を授業でも最近何年かは話してきたのですが，学生さんには分かってもらえたとは思いません．なぜこんなことを話すのだろうと訝しかったと思います．

数学はある種の人間の思考の産物という側面が強いと思いますので，それが現実の自然界を反映しているかどうかなどに気を使う人はあまりいないと思います．しかし，数学で見出された論理構造がその後に自然界で実現していることがわかってきていることが多いので，およそ人間が考え出す論理構造は自然界がそれを選んでどこかで実現しているというふうな信念が物理学者の中に広まってきています．

数学者が数学を学問として追求するときの動機として必ずしも自然界の論理構造を抉り出すというふうに考えることを要求しているわけではありません．

編集後記

7 巻 1 号，2 号を続けて発行する．今年も多くの方々からのご投稿をいただいている．すくなくとも編集者の私が原稿を求めてあたふたとする必要がない．有難いことである．

今月も場合によっては 3 号の発行が必要かと思っていたが，それはいまのところ必要がなさそうである．

もっとも 3 号までの発行はいままでにも何回か経験があるので，それほど大変ではない．しかし，3 回を超える号数を発行した経験はまだないので，投稿数が膨大になってくるとしたら，そのときにはその場合の処理をちょっと考えさせてもらいたい．

（矢野　忠）