数学・物理通信

7巻5号　　2017年6月

編集　新関章三・矢野　忠

2017 年 6 月 19 日

目次(Contents)

サインの加法定理の多変数への完全対称な拡張

Completely Symmetric Generalization of the Sine's Addition Theorem
to the Case of Many Variables

中 西　襄 [1]
Noboru NAKANISHI

1　はじめに

初等数学でよく知られた三角関数の加法定理

$$\begin{aligned}\sin(\theta_1+\theta_2)&=\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2,\\ \cos(\theta_1+\theta_2)&=\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2\end{aligned} \tag{1.1}$$

は，2 変数の和の関数を 1 変数関数の対称式で書き表したものである．

これを多変数の場合に拡張するということは，あまり考えられていないようだ．それは 2 変数の公式を繰り返し使えば，実用上用が足りるからであろう．しかしそうしてこしらえた n 変数の公式は，n 変数の置換に関して一般に完全対称にはならない．もちろん強引に対称化することは可能であるが，それでは項数が一般に本来自然と考えられる $n!$ よりもずっと多くなってしまうであろう．これでは数学としてエレガントではない．そこで次のように設問する：

「n 変数の和の三角関数（サインとコサイン）は，$n!$ 個の項から成る 1 変数三角関数の対称式で一般的に書き表すことができるか？」

答えは，サインの式については Yes である．コサインの式についてはサインの式から導かれるので，以下おもにサインの式について考察する．

2　サインの n 変数加法定理

[定理]　S_n を n 次対称群，P を S_n に属する $\{1,2,\cdots,n\}$ の置換，$P(j)$ を j の P による置換先とすると，

$$\sin\Big(\sum_{j=1}^{n}\theta_j\Big)=\frac{2^{n-1}}{n!}\sum_{P\in S_n}\prod_{j=1}^{n}\sin\Big(\theta_j+\frac{(P(j)-1)\pi}{n}\Big) \tag{2.1}$$

が成立する．

一般証明をする前に，小さい n について (2.1) を具体的に確かめておこう．

$n=1$ のときは自明の式 $\sin\theta_1=\sin\theta_1$ である．$n=2$ のときはサインの加法定理 (1.1) 第 1 式になる．したがって (2.1) はサインの加法定理の多変数への拡張公式に他ならない．

[1] 京都大学名誉教授, nbr-nak@trio.plala.or.jp

$n=3$ のとき，(2.1) の右辺は

$$
\begin{aligned}
\frac{2^2}{3!}\Big\{ \sin\theta_1 \Big(\frac{1}{2}\sin\theta_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta_2\Big)\Big(-\frac{1}{2}\sin\theta_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta_3\Big) \\
+ \sin\theta_1 \Big(\frac{1}{2}\sin\theta_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta_3\Big)\Big(-\frac{1}{2}\sin\theta_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta_2\Big) \\
+ [(1,2,3)\mapsto(2,3,1)] + [(1,2,3)\mapsto(3,1,2)]\Big\} \\
&= \frac{2}{3}\Big\{ \sin\theta_1 \Big(\frac{1}{2}\sin\theta_2\sin\theta_3 + \frac{3}{2}\cos\theta_2\cos\theta_3\Big) \\
&\quad + [(1,2,3)\mapsto(2,3,1)] + [(1,2,3)\mapsto(3,1,2)]\Big\} \\
&= -\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3 + \sin\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3 \\
&\quad + \cos\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 + \cos\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_3 \\
&= \sin\theta_1\cos(\theta_2+\theta_3) + \cos\theta_1\sin(\theta_2+\theta_3) \\
&= \sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

となって，(2.1) の左辺を得る．

$n=4$ のとき，右辺の係数は $2^3/4! = 1/3$ である．右辺の和のうち順列 $(1,2,3,4)$ からの寄与は，

$$
\begin{aligned}
&\sin\theta_1\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta_2\Big)\cos\theta_3\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta_4 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta_4\Big) \\
&= \sin\theta_1\cos\theta_3(-\sin\theta_2\sin\theta_4 + \cos\theta_2\cos\theta_4) \\
&= \sin\theta_1\cos\theta_3\cos(\theta_2+\theta_4)
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

である．これに 1 と 3 を入れ替えたものを加えれば $\sin(\theta_1+\theta_3)\cos(\theta_2+\theta_4)$ となる．さらに $(1,3)$ と $(2,4)$ とを入れ替えたものを加えれば，$\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4)$ となる．これは分割 (13|24) に対応する部分の和であった．他に分割 (14|23) および分割 (12|34) についても同じ結果が得られるから，全体ではこの 3 倍になる．この 3 に係数の 1/3 がかかって 1 となるから，(2.1) の左辺を得る．

3　証明

(2.1) の一般的証明は，オイラー表示して，置換対称性をフルに使う．理解を助けるために，まず $n=3$ の場合についてやってみよう．サインのオイラー表示の積を展開すると，

$$
\begin{aligned}
&(e^{i\theta_1} - e^{-i\theta_1})(e^{i\theta_2+i\pi/3} - e^{-i\theta_2-i\pi/3})(e^{i\theta_3+2i\pi/3} - e^{-i\theta_3-2i\pi/3}) \\
&= e^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)+i\pi} \\
&\quad - e^{i(\theta_1+\theta_2-\theta_3)-i\pi/3} - e^{i(\theta_1-\theta_2+\theta_3)+i\pi/3} - e^{i(-\theta_1+\theta_2+\theta_3)+i\pi} \\
&\quad + e^{i(\theta_1-\theta_2-\theta_3)-i\pi} + e^{i(-\theta_1+\theta_2-\theta_3)-i\pi/3} + e^{i(-\theta_1-\theta_2+\theta_3)+i\pi/3} \\
&\quad - e^{i(-\theta_1-\theta_2-\theta_3)-i\pi}
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

のように書ける．したがって，(2.1) の右辺は，置換したものを足し上げて

$$
\begin{aligned}
\frac{2^2}{3!(2i)^3}\Big[\, & 6e^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}e^{i\pi} \\
& -2(e^{i(\theta_1+\theta_2-\theta_3)}+e^{i(\theta_2+\theta_3-\theta_1)}+e^{i(\theta_3+\theta_1-\theta_2)})(e^{-i\pi/3}+e^{i\pi/3}+e^{i\pi}) \\
& +2(e^{i(\theta_1-\theta_2-\theta_3)}+e^{i(\theta_2-\theta_3-\theta_1)}+e^{i(\theta_3-\theta_1-\theta_2)})(e^{i\pi/3}+e^{-i\pi/3}+e^{-i\pi}) \\
& -6e^{-i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}e^{-i\pi}\Big]
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

となる． $e^{-i\pi/3}+e^{i\pi/3}+e^{\pm i\pi}=2\cos(\pi/3)-1=0$ であるから，中間項はすべて消えて，両端の対称な 2 項のみが生き残り，$\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$ を得る．

一般の場合に進もう．(2.1) の右辺は，P の逆置換を改めて P と書き直せば，

$$
\boldsymbol{S}\equiv\sum_{P\in S_n}\prod_{j=1}^{n}\sin\Big(\theta_j+\frac{(P(j)-1)\pi}{n}\Big)=\sum_{P\in S_n}\prod_{j=1}^{n}\sin\Big(\theta_{P(j)}+\frac{(j-1)\pi}{n}\Big)
\tag{3.3}
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{S} &= \frac{1}{n!(2i)i^{n-1}}\sum_{P\in S_n}\prod_{j=1}^{n}(e^{i\theta_{P(j)}}e^{i\pi\frac{j-1}{n}}-e^{-i\theta_{P(j)}}e^{-i\pi\frac{j-1}{n}}) \\
&= \frac{1}{n!(2i)i^{n-1}}\Big[n!e^{i\sum_{j=1}^{n}\theta_j}e^{i\pi\frac{n-1}{2}} \\
&\quad -(n-1)!\Big(\sum_{k=1}^{n}e^{i(\sum_{j=1}^{n}\theta_j-2\theta_k)}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}e^{i\pi\frac{n-1}{2}-i\pi\frac{2(j-1)}{n}}\Big) \\
&\quad +\cdots+(-1)^n n!e^{-i\sum_{j=1}^{n}\theta_j}e^{-i\pi\frac{n-1}{2}}\Big]
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

のようになる．これの角括弧内の一般項（第 $m+1$ 項）は $\{1,2,\cdots,n\}$ の中の m 個から成る集合を M とするとき，

$$
(-1)^m m!(n-m)!\Big(\sum_{M}e^{i(\sum_{j\notin M}\theta_j-\sum_{j\in M}\theta_j)}\Big)\Big(\sum_{M}e^{i\pi\frac{n-1}{2}-\sum_{j\in M}i\pi\frac{2(j-1)}{n}}\Big)
\tag{3.5}
$$

である．ここで現れた因子 $\sum_M e^{-\sum_{j\in M}i\pi\frac{2(j-1)}{n}}=\sum_M\prod_{j\in M}(e^{-2\pi i/n})^{j-1}$ は，$m\neq 0,n$ のとき 0 になる．このことは，$(e^{-2\pi i/n})^{j-1}$ $(j=1,\cdots,n)$ が n 次代数方程式 $x^n-1=0$ の解なので，解と係数の関係から従う．したがって

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{S} &= \frac{i^{n-1}n!e^{i\sum_{j=1}^{n}\theta_j}+(-1)^n(-i)^{n-1}n!e^{-i\sum_{j=1}^{n}\theta_j}}{n!(2i)i^{n-1}} \\
&= \sin\Big(\sum_{j=1}^{n}\theta_j\Big)
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

を得る．□

4　定理の背景

(2.1) の結果は，1 節で設定した問題を解こうとして思いついたわけではない．それに至る思考の背景は次のようであった，

「変数を含むコタンジェントの冪乗の有限和 2」(「数学・物理通信」7-4)　の最後のところで，コタンジェントの冪乗の有限和の母関数の公式を変形した．その結果次の公式を見つけた[2]：

$$\sum_{r=0}^{n-1}\frac{\sin(\theta_1+\frac{r\pi}{n})}{\sin(\theta_2+\frac{r\pi}{n})}=n\cdot\frac{\sin(\theta_1+(n-1)\theta_2)}{\sin(n\theta_2)}. \tag{4.1}$$

(4.1) の左辺を通分したときの分母は，

$$\prod_{r=0}^{n-1}\sin\left(\theta+\frac{r\pi}{n}\right)=\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\sin(n\theta) \tag{4.2}$$

によって計算される．(4.2) は，公式集[3]にも載っているサインの有限積の公式である．そして通分したときの (4.1) の左辺の分子は

$$\sum_{p=0}^{n-1}\sin\left(\theta_1+\frac{p\pi}{n}\right)\prod_{r\in N-\{p\}}\sin\left(\theta_2+\frac{r\pi}{n}\right)=\frac{n}{2^{n-1}}\cdot\sin(\theta_1+(n-1)\theta_2) \tag{4.3}$$

である．ただし $N\equiv\{0,1,\cdots,n-1\}$ と書いた．(4.2) と (4.3) を見比べると，次のような拡張ができるのではないかと思える：

$$\begin{aligned}\sum_{p,q\in N;\,p<q}\sin\left(\theta_1+\frac{p\pi}{n}\right)\sin\left(\theta_1+\frac{q\pi}{n}\right)\prod_{r\in N-\{p,q\}}\sin\left(\theta_2+\frac{r\pi}{n}\right)&\\ =\frac{{}_nC_2}{2^{n-1}}\cdot\sin(2\theta_1+(n-2)\theta_2).&\end{aligned} \tag{4.4}$$

じっさい，$n=4$ の場合に (4.4) が正しいことはすぐに確かめられる．そこで (4.2)，(4.3)，(4.4) をまとめて，次のような一般化が考えられる．集合 N を個数 m の集合 M と個数 $n-m$ の集合 $N-M$ に分割するとき，各分割を $(M|N-M)$ と書けば，

$$\sum_{(M|N-M)}\prod_{r\in M}\sin\left(\theta_1+\frac{r\pi}{n}\right)\prod_{r\in N-M}\sin\left(\theta_2+\frac{r\pi}{n}\right)=\frac{{}_nC_m}{2^{n-1}}\cdot\sin(m\theta_1+(n-m)\theta_2). \tag{4.5}$$

(4.5) は 2 変数の場合であったが，さらにこれを k 個の変数の場合に拡張してみよう．N を，要素数が n_j であるような k 個の集合 N_j $(j=1,2,\cdots,k)$ に分割する（$\sum_{j=1}^k n_j=n$）．分割の仕方を $(N_1|\cdots|N_k)$ と書くと，k 個の変数 $\theta_1,\cdots,\theta_k$ を含む式

$$\sum_{(N_1|\cdots|N_k)}\prod_{j=1}^{k}\prod_{r\in N_j}\sin\left(\theta_j+\frac{r\pi}{n}\right)=\frac{n!}{2^{n-1}\prod_{j=1}^k n_j!}\cdot\sin\left(\sum_{j=1}^k n_j\theta_j\right) \tag{4.6}$$

が成立することが推測される．

(4.6) でとくにすべての j について $n_j=1$（したがって $k=N$）である場合を考えよう．そうすると，

$$\sum_P\prod_{j=1}^{n}\sin\left(\theta_j+\frac{r\pi}{n}\right)\Big|_{r+1=P(j)}=\frac{n!}{2^{n-1}}\cdot\sin\left(\sum_{j=1}^n\theta_j\right) \tag{4.7}$$

となる．これは (2.1) に他ならない．

(4.7) は (4.6) の特別の場合であるが，(4.7) の変数のいくつかを等しいとおけば (4.6) が得られるので，両者は等価である．したがって (4.7) を証明すれば，上に述べた推測がすべて正しいことが証明されたことになる．そして (4.7) すなわち (2.1) の証明は前節に与えた．したがって上述の推論を逆にたどれば，コタンジェントの冪乗の有限和に対する母関数の公式の別証が得られたことにもなる．

[2]記号は変更した．
[3]森口繁一他著「数学公式 II」（岩波全書）p.26.

5　コサインの場合

コサインに対する公式は，サインに対する公式をどれかの 1 変数について偏微分すれば得られるが，この操作は置換に関する完全対称性を保持しない（$n = 2$ のときは例外的に 1 変数による偏微分で対称性が保たれている.）．そこですべての変数について偏微分することになる．n が偶数だと左辺がサインになってしまうので，n を奇数に限定する必要がある．(2.1) をすべての θ_j について偏微分すれば，

$$\cos\Big(\sum_{j=1}^{n}\theta_j\Big) = \pm\frac{2^{n-1}}{n!}\sum_{P\in S_n}\prod_{j=1}^{n}\cos\Big(\theta_j + \frac{(P(j)-1)\pi}{n}\Big) \tag{5.1}$$

を得る．複号は $n \equiv 1$ (mod.4) のとき $+$，$n \equiv 3$ (mod.4) のとき $-$ とする．

n の偶奇に依らず左辺をコサインに変えるには，各変数を $\pi/(2n)$ だけずらせばよい．このとき

$$\cos\Big(\sum_{j=1}^{n}\theta_j\Big) = \frac{2^{n-1}}{n!}\sum_{P\in S_n}\prod_{j=1}^{n}\sin\Big(\theta_j + \frac{(2P(j)-1)\pi}{2n}\Big) \tag{5.2}$$

となる．とくに $n = 2$ の場合は，

$$\cos(\theta_1+\theta_2) = \sin\Big(\theta_1+\frac{\pi}{4}\Big)\sin\Big(\theta_2+\frac{3\pi}{4}\Big) + \sin\Big(\theta_1+\frac{3\pi}{4}\Big)\sin\Big(\theta_2+\frac{\pi}{4}\Big) \tag{5.3}$$

となって，(1.1) の第 2 式とは異なる表示式になる．

6　ヤコービの楕円関数

ヤコービの楕円関数 $\mathrm{sn}(u,k)$ は $\mathrm{sn}(u,0) = \sin u$ なので，サインの自然な拡張といえる．その加法定理は

$$\mathrm{sn}(u+v,k) = \frac{\mathrm{sn}(u,k)\mathrm{cn}(v,k)\mathrm{dn}(v,k) + \mathrm{sn}(v,k)\mathrm{cn}(u,k)\mathrm{dn}(u,k)}{1-k^2\mathrm{sn}^2(u,k)\mathrm{sn}^2(v,k)} \tag{6.1}$$

である．分子はサインの加法定理において sin を sn に，cos を cn と dn の積に置き換えたもので，分母は 1 に k^2 のかかった対称な補正項がついたものである．

そこで，これに対しても第 1 節で提起したような完全対称な多変数加法定理が存在するであろうか？という問題が生ずる．分母の一般形はわからないが，たぶん sn^2 の偶数次対称式の 1 次結合になるであろう．三角関数の $\pi/2$ に相当するのが第 1 種完全楕円積分 K で，$\mathrm{sn}(u+K,k) = \mathrm{cn}(u,k)/\mathrm{dn}(u,k)$ である．

n 次元の球の体積 3

矢野　忠 [1]

The Volume of n-dimensinal Hypersphere 3

Tadashi YANO[2]

1　はじめに

これは n 次元の球の体積について述べるシリーズの第 3 報であり，[1] の改訂版である．[1] では正統な方法で n 次元の球の体積を求めたが，そのときに用いられたヤコビアンは 4 次までのヤコビアンから帰納法的に推測されたものを用いていた．そのヤコビアンは正しいものであるが，その導出が省かれていた．それで [1] の改訂の主要な点はヤコビアンをきちんと求めることである．

[2] では便法を用いて，n 次元の球の体積を求めたが，それは正統な方法での計算ではなかった．それで [3] では 1 次元から 5 次元までの球の体積を正統な多重積分を行う方法で求めた．しかし，そこでは一般の n 次元の球の体積を正統な方法で求めるところまではいかなかった．

それで，このエッセイでは一般の n 次元の球の体積を正統な多重積分を行う方法で求める．

n 次元の球の体積を求めるのであれば, [2] で十分であるのに, わざわざ正統な方法とはいえ面倒な多重積分を行うのはなぜか．これについて一言述べておく．

科学はいつでも誰にでも理解できるものでなければならない．ある特別な頭のいいエリートだけのものであってはならない．それは科学を理解するという点でもそうだし, 科学を進歩させるためにもそうでなくてはならないだろう．この頃は一部のエリートのみを育成すればそれでよしとする傾向がないではない．そういう傾向が最終的にいい科学教育だとは思えないのである [3]．そういう風潮に対する一つのアンチテーゼとなればいいと思う．

2 節では n 次元の球の体積を正統な方法で計算する．3 節では [3] で求めた 1 次元から 5 次元までのヤコビアンの形から n 次元のヤコビアンの形 (2.4) を推測する．4 節では積分公式 (2.8) を証明する．5 節はまとめである．6 節以下は付録である．6 節は n 次元のヤコビアン (2.4) の正統な計算である．7 節は n 次の直交行列式の証明である．8 節では積分公式 (2.8) を求めるために用いた関係式 (2.7) の証明を述べる．9 節はヤコビアン (6.5) の別証明である．10 節では (4.6) について説明し，11 節では (4.10),(4.11) から (2.8) を導く．12 節ではガンマ関数のいくつかの関係を導く．

2　n 次元の球の体積

半径 a の n 次元の球の体積の計算は [4][5] に与えられている．ここでは [4] にしたがって正統な方法で計算してみよう．

半径 a の n 次元の球の体積 $V_n(a)$ は領域 $\{B_n(a) : 0 \leq x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq a^2\}$ でのつぎの積分で与えられる．

$$V_n(a) = \iint \cdots \int_{B_n(a)} dx_1 dx_2 \cdots dx_n. \tag{2.1}$$

[1] 元愛媛大学工学部

[2] yanotad@earth.ocn.ne.jp

[3] 誤解を招かないように一言付け加えれば，科学における天才とかエリートがいらないというのではない．普通の人の教育も大切だという趣旨である．

上の積分をするために n 次元の極座標 $(r, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{n-1})$ を導入しよう．このとき, n 次元の極座標と直交座標 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の関係は次の式で与えられる．

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\theta_1, \\ x_2 &= r\sin\theta_1\cos\theta_2, \\ x_3 &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3, \\ &\ldots \\ x_{n-1} &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}, \\ x_n &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

$0 \leq x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq a^2$ で表される球の内部にある $(x_1, x_2, \ldots, , x_n)$ に対する $(r, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{n-1})$ の変域は

$$0 \leq r \leq a, \qquad 0 \leq \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{n-2} \leq \pi, \qquad 0 \leq \theta_{n-1} \leq 2\pi$$

である．

n 次元の直交座標 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を n 次元の極座標 $(r, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1})$ に変換すれば微小体積 (volume element) dV は

$$\begin{aligned} dV &\equiv dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= J_n dr d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_{n-1} \end{aligned} \tag{2.3}$$

と変換される．ここで J_n は n 次元の直交座標系から極座標系への変換のヤコビアン (Jacobian) である．このヤコビアンは

$$\begin{aligned} J_n &\equiv \frac{\partial(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)}{\partial(r, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{n-1})} \\ &= r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1 \sin^{n-3}\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-2}. \quad (n \geq 2) \end{aligned} \tag{2.4}$$

となる．このヤコビアンがわかれば，n 次元の球の体積を求めるためにひたすら積分すればよい．

n 次元のヤコビアン (2.4) の計算は面倒なので，付録 1 に述べる．しかし，きちんとした計算をしないでも [3] に与えた 5 次元までのヤコビアンの形から (2.4) を推測することができる．この推測は 3 節に示すが，これを用いて n 次元の球の体積を求めよう．

さて, 半径 a の n 次元の球の体積 $V_n(a)$ は

$$\begin{aligned} V_n(a) &= \iint \cdots \int_{B_n(a)} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= \int_0^a dr \int_0^\pi d\theta_1 \int_0^\pi d\theta_2 \cdots \int_0^\pi d\theta_{n-2} \int_0^{2\pi} d\theta_{n-1} J_n \\ &= \int_0^a r^{n-1} dr \int_0^\pi \sin^{n-2}\theta_1 d\theta_1 \int_0^\pi \sin^{n-3}\theta_2 d\theta_2 \cdots \int_0^\pi \sin\theta_{n-2} d\theta_{n-2} \int_0^{2\pi} d\theta_{n-1} \\ &= \frac{a^n}{n} \cdot 2\pi \cdot 2^{n-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}\theta_1 d\theta_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-3}\theta_2 d\theta_2 \cdots \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta_{n-2} d\theta_{n-2} \\ &= \frac{a^n}{n} \cdot 2\pi \cdot 2^{n-2} \prod_{k=1}^{n-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k\theta d\theta \\ &= \frac{a^n}{n} \cdot 2\pi \cdot 2^{n-2} \cdot K. \end{aligned} \tag{2.5}$$

ここで K は

$$K \equiv \prod_{k=1}^{n-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k\theta d\theta \tag{2.6}$$

である．この K の因子である各々の積分の積分変数 θ は適当な添字をつけておくべきであろうが, それぞれの積分が独立に実行できることを考慮して添字を省略している．なお, (2.5) の 3 行目から 4 行目に移るときに

$$\int_0^{\pi} \sin^k \theta d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k \theta d\theta \tag{2.7}$$

であることを用いた．この関係 (2.7) は付録 3 で導出する．

ここでは先を急いで K を評価しよう．それには積分公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k \theta d\theta = \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(\frac{k}{2}+1)}, \quad k > -1 \tag{2.8}$$

を用いる [9]．なお, [9] では

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{2.9}$$

を用いている．(2.8) を用いれば

$$\begin{aligned} K &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}\theta_1 d\theta_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-3}\theta_2 d\theta_2 \cdots \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta_{n-2} d\theta_{n-2} \\ &= \frac{\Gamma(1)\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(\frac{3}{2})} \cdot \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(\frac{4}{2})} \cdot \frac{\Gamma(\frac{4}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(\frac{5}{2})} \cdots \frac{\Gamma(\frac{n-2}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(\frac{n-1}{2})} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(\frac{n}{2})} \\ &= \frac{\Gamma(1)[\Gamma(\frac{1}{2})]^{n-2}}{2^{n-2}\Gamma(\frac{n}{2})}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

したがって, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}, \Gamma(1) = 1, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ であることを用いれば

$$\begin{aligned} V_n(a) &= \frac{a^n}{n} \cdot 2\pi \cdot 2^{n-2} \cdot \frac{\Gamma(1)[\Gamma(\frac{1}{2})]^{n-2}}{2^{n-2}\Gamma(\frac{n}{2})} \\ &= \frac{a^n}{n} \cdot 2\pi \cdot \frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \\ &= \pi^{(\frac{n-2}{2}+1)} a^n \frac{1}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})} \\ &= \frac{\pi^{\frac{n}{2}} a^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \end{aligned} \tag{2.11}$$

となり, これで n 次元の球の体積 $V_n(a)$ が求められた．

3 ヤコビアンの推測

球の体積を求めるのに使ったヤコビアン J の形 (2.4) を推測しよう．そのためにもう一度 [3] で求めた，2 次元から 5 次元の球の体積を求めるときに使ったヤコビアンを列挙してみよう．

$$J_2 = r, \tag{3.1}$$

$$J_3 = r^2 \sin\theta_1, \tag{3.2}$$

$$J_4 = r^3 \sin^2\theta_1 \sin\theta_2, \tag{3.3}$$

$$J_5 = r^4 \sin^3\theta_1 \sin^2\theta_2 \sin\theta_3. \tag{3.4}$$

これから n 次元のヤコビアンの形は

$$J_n = r^{n-1} \sin^{n-2}\theta_1 \sin^{n-3}\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-2} \tag{2.4}$$

と推測される．このヤコビアン (2.4) の導出は付録 1 で行う．

4 (2.8) 式の証明

球の体積の K の計算のときに (2.8) を公式として用いた．しかし, 用いた式を公式という形でブラックボックスとしておくことはできるだけ避けたい．ここでは [10] にしたがって k が自然数のときに (2.8) が成立することを証明しておこう（(2.8) は k が自然数でないときでも成立する）．

自然数 k が $k \geq 2$ のとき, 積分

$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k \theta d\theta \tag{4.1}$$

を部分積分で計算することを考えよう．被積分関数 $\sin^k \theta$ を $\sin^k \theta = \sin^{k-1} \theta \sin \theta$ と考え,

$$f(\theta) = \sin^{k-1} \theta, \tag{4.2}$$

$$g'(\theta) = \sin \theta \tag{4.3}$$

とおけば,

$$f'(\theta) = (k-1) \sin^{k-2} \theta \cos \theta, \tag{4.4}$$

$$g(\theta) = -\cos \theta \tag{4.5}$$

であるから， 部分積分によって [4]

$$\begin{aligned} I_k &= \left[-\sin^{k-1} \theta \cos \theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (k-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{k-2} \theta \cos \theta \cos \theta d\theta \\ &= (k-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{k-2} \theta \cos^2 \theta d\theta \\ &= (k-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{k-2} \theta (1 - \sin^2 \theta) d\theta \\ &= (k-1)(I_{k-2} - I_k). \end{aligned} \tag{4.6}$$

したがって,

$$I_k = \frac{k-1}{k} I_{k-2}. \tag{4.7}$$

この漸化式から k を 2 ずつ減らしていけば, k が偶数のときは最後に

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2} \tag{4.8}$$

に到達し, k が奇数のときは最後に

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = 1 \tag{4.9}$$

に到達する．このことから結局

$$I_{2k} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2k-1}{2k} = \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(k+1)}, \tag{4.10}$$

$$I_{2k+1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2k}{2k+1} = \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(k+1+\frac{1}{2})} \tag{4.11}$$

が得られ, (2.8) が証明された [5].

ここで, Gamma 関数の公式

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad n = \text{正の整数} \tag{4.12}$$

$$\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)\sqrt{\pi}}{2^k} \tag{4.13}$$

を用いた [6].

[4]部分積分法については付録 5 に述べる．
[5](4.10),(4.11) が (2.8) にまとめられることは付録 6 に示す．
[6]Gamma 関数については付録 7 で述べる．

5　おわりに

n 次元の球の体積は確かに半径 a の n 乗に比例しており, その係数 C_n も

$$C_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma(n/2)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \tag{5.1}$$

となって [2] と同じ結果が得られた.

繰り返しになるが, 結果だけが求められればよいという観点からは [3] と今回のこのエッセイとは余計な考察となるが, 愚直に面倒な計算をしてでも結果を求めるというのが物理学者や技術者の普通のやり方だと思う．そうした努力があって後にそういった面倒な方法ではなくて簡便な方法も見つけられるというのが普通であろう.

[2] で示した簡便な n 次元の球の体積の求め方はいわれてみればその通りであるが, 凡人にはすぐには思いつかないと思われる．もっともこのような考え方をすることができるようになることも必要ではある.

6　付録 1　ヤコビアン (2.4) の導出

ヤコビアン (2.4) の導出は [6][7] にある．方法はほとんど同じだが細かな違いもある．ここではまず [6] による方法を述べよう [7].

$$\begin{aligned}
J_n &\equiv \frac{\partial(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)}{\partial(r, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{n-1})} \\
&= \begin{vmatrix}
\frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_3} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_{n-2}} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_{n-1}} \\
\frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_3} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_{n-2}} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_{n-1}} \\
\cdots\cdots & & & & & & \\
\frac{\partial x_{n-1}}{\partial r} & \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \theta_3} & \cdots & \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \theta_{n-2}} & \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \theta_{n-1}} \\
\frac{\partial x_n}{\partial r} & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_3} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_{n-2}} & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_{n-1}}
\end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\
\cdots\cdots & & & & & \\
a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn}
\end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{6.1}$$

で定義される.

ところで，ヤコビアン J_n の第 1 行の要素を計算すると $a_{11} = c_1, a_{12} = -rs_1$ 以外の行列式の要素はすべて 0 である．だから行列式の第 1 行で展開すると $n-1$ 次の行列式となる．すなわち,

$$J_n = a_{11} \begin{vmatrix}
a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\
a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\
\cdots\cdots & & & & \\
a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\
a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn}
\end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix}
a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\
a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\
\cdots\cdots & & & & \\
a_{n-1,1} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\
a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn}
\end{vmatrix} \tag{6.2}$$

このヤコビアンの中の二つの $n-1$ 次の行列式は第 1 列が違っているだけで，第 2 列から第 $n-1$ 列は同じである.

[7] もっとも [6] では n 次元のヤコビアンの計算を実際に行っているわけではない．方法だけをここで使っている．一方，[7] は実際に計算を行っている.

(6.2) の中の二つの行列式のそれぞれの第 1 列の要素，$a_{22}, a_{32}, \cdots, a_{n2}$ と $a_{21}, a_{31}, \cdots, a_{n1}$ とを示しておこう．それらは

$$\begin{aligned}
a_{22} &= (rc_1)c_2 \\
a_{32} &= (rc_1)s_2c_3 \\
a_{42} &= (rc_1)s_2s_3c_4 \\
a_{52} &= (rc_1)s_2s_3s_4c_5 \\
&\cdots \\
a_{n-3,2} &= (rc_1)s_2\cdots s_{n-4}c_{n-3} \\
a_{n-2,2} &= (rc_1)s_2\cdots s_{n-3}c_{n-2} \\
a_{n-1,2} &= (rc_1)s_2\cdots s_{n-2}c_{n-1} \\
a_{n,2} &= (rc_1)s_2\cdots s_{n-2}s_{n-1}
\end{aligned} \tag{6.3}$$

と

$$\begin{aligned}
a_{21} &= (s_1)c_2 \\
a_{31} &= (s_1)s_2c_3 \\
a_{41} &= (s_1)s_2s_3c_4 \\
a_{51} &= (s_1)s_2s_3s_4c_5 \\
&\cdots \\
a_{n-3,1} &= (s_1)s_2\cdots s_{n-4}c_{n-3} \\
a_{n-2,1} &= (s_1)s_2\cdots s_{n-3}c_{n-2} \\
a_{n-1,1} &= (s_1)s_2\cdots s_{n-2}c_{n-1} \\
a_{n,1} &= (s_1)s_2\cdots s_{n-2}s_{n-1}
\end{aligned} \tag{6.4}$$

とである．ここで (6.3) と (6.4) で ( ) でくくった因子以外の対応した因子が同じとなる．たとえば，a_{22} と a_{21} とは c_2 が共通である．また，a_{32} と a_{31} とは s_2c_3 が共通である．

したがって，n 次のヤコビアン J_n は $a_{11} = c_1$ と $a_{12} = -rs_1$ とを用いれば，

$$\begin{aligned}
J_n &= r(c_1^2 + s_1^2)\begin{vmatrix} c_2 & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ s_2c_3 & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \cdots\cdots & & & & \\ s_2\cdots s_{n-2}c_{n-1} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ s_2\cdots s_{n-2}s_{n-1} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= r\begin{vmatrix} c_2 & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ s_2c_3 & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \cdots\cdots & & & & \\ s_2\cdots s_{n-2}c_{n-1} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ s_2\cdots s_{n-2}s_{n-1} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= r^{n-1}s_1^{n-2}s_2^{n-3}\cdots s_{n-2}\det C \\
&= r^{n-1}s_1^{n-2}s_2^{n-3}\cdots s_{n-2}, \quad (n \geq 2)
\end{aligned} \tag{6.5}$$

となる．ここで $\det C$ は (6.12) で定義される．すなわち (6.5) は前に推測された (2.4) である．

計算は以下で詳しく述べるが，ここで先取りして要点をまとめておけば (6.5) の行列式の第 2 列から共通因子 rs_1 が，第 3 列から rs_1s_2 が，$\cdots$，第 $n-1$ 列からは $rs_1s_2\cdots s_{n-2}$ がくくり出される．それにすでに共通因子としてくくり出されていた因子 r との積が $r^{n-1}s_1^{n-2}s_2^{n-3}\cdots s_{n-2}$ である．ここで，共通因子がすべてく

くり出された後の残りの因子の行列式をいま $\det C$ と表した．この行列式は $\det C$ は直交行列式であることを付録 2 で示す．すなわち，$\det C = 1$ である．

では，これから計算を具体的に調べていこう．

最初に，第 2 列以下の要素を調べておく．まず第 2 列は

$$
\begin{aligned}
a_{23} &= -(rs_1)s_2 = s_1 b_{23} \\
a_{33} &= (rs_1)c_2c_3 = s_1 b_{33} \\
a_{43} &= (rs_1)c_2s_3c_4 = s_1 b_{43} \\
a_{53} &= (rs_1)c_2s_3s_4c_5 = s_1 b_{53} \\
&\cdots \\
a_{n-3,3} &= (rs_1)c_2s_3\cdots s_{n-4}c_{n-3} = s_1 b_{n-3,3} \\
a_{n-2,3} &= (rs_1)c_2s_3\cdots s_{n-3}c_{n-2} = s_1 b_{n-2,3} \\
a_{n-1,3} &= (rs_1)c_2s_3\cdots s_{n-2}c_{n-1} = s_1 b_{n-1,3} \\
a_{n3} &= (rs_1)c_2s_3\cdots s_{n-2}s_{n-1} = s_1 b_{n3}
\end{aligned}
\tag{6.6}
$$

つぎに第 3 列は

$$
\begin{aligned}
a_{24} &= 0 = b_{24} \\
a_{34} &= -(rs_1s_2)s_3 = s_1 b_{34} \\
a_{44} &= (rs_1s_2)c_3c_4 = s_1 b_{44} \\
a_{54} &= (rs_1s_2)c_3s_4c_5 = s_1 b_{54} \\
&\cdots \\
a_{n-3,4} &= (rs_1s_2)c_3s_4\cdots s_{n-4}c_{n-3} = s_1 b_{n-3,4} \\
a_{n-2,4} &= (rs_1s_2)c_3s_4\cdots s_{n-3}c_{n-2} = s_1 b_{n-2,4} \\
a_{n-1,4} &= (rs_1s_2)c_3s_4\cdots s_{n-2}c_{n-1} = s_1 b_{n-1,4} \\
a_{n4} &= (rs_1s_2)c_3s_4\cdots s_{n-2}s_{n-1} = s_1 b_{n4}
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

さらに第 4 列は

$$
\begin{aligned}
a_{25} &= 0 = b_{25} \\
a_{35} &= 0 = b_{35} \\
a_{45} &= -(rs_1s_2s_3)s_4 = s_1 b_{45} \\
a_{55} &= (rs_1s_2s_3)c_4c_5 = s_1 b_{55} \\
&\cdots \\
a_{n-3,5} &= (rs_1s_2s_3)c_4s_5\cdots s_{n-4}c_{n-3} = s_1 b_{n-3,5} \\
a_{n-2,5} &= (rs_1s_2s_3)c_4s_5\cdots s_{n-3}c_{n-2} = s_1 b_{n-2,5} \\
a_{n-1,5} &= (rs_1s_2s_3)c_4s_5\cdots s_{n-2}c_{n-1} = s_1 b_{n-1,5} \\
a_{n5} &= (rs_1s_2s_3)c_4s_5\cdots s_{n-2}s_{n-1} = s_1 b_{n5}
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

途中は省略するが，同様にして，第 $n-3$ 列は

$$\begin{aligned}
a_{2,n-2} &= 0 = b_{2,n-2}\\
a_{3,n-2} &= 0 = b_{3,n-2}\\
a_{4,n-2} &= 0 = b_{4,n-2}\\
&\cdots\\
a_{n-2,n-2} &= (rs_1s_2\cdots s_{n-4})c_{n-3}c_{n-2} = s_1b_{n-2,n-2}\\
a_{n-1,n-2} &= (rs_1s_2\cdots s_{n-4})c_{n-3}s_{n-2}c_{n-1} = s_1b_{n-1,n-2}\\
a_{n,n-2} &= (rs_1s_2\cdots s_{n-4})c_{n-3}s_{n-2}s_{n-1} = s_1b_{n,n-2}
\end{aligned} \tag{6.9}$$

さらに，第 $n-2$ 列は

$$\begin{aligned}
a_{2,n-1} &= 0 = b_{2,n-1}\\
a_{3,n-1} &= 0 = b_{3,n-1}\\
a_{4,n-1} &= 0 = b_{4,n-1}\\
&\cdots\\
a_{n-3,n-1} &= 0 = b_{n-3,n-1}\\
a_{n-2,n-1} &= -(rs_1s_2\cdots s_{n-3})s_{n-2} = s_1b_{n-2,n-1}\\
a_{n-1,n-1} &= (rs_1s_2\cdots s_{n-3})c_{n-2}c_{n-1} = s_1b_{n-1,n-1}\\
a_{n,n-1} &= (rs_1s_2\cdots s_{n-3})c_{n-2}s_{n-1} = s_1b_{n,n-1}
\end{aligned} \tag{6.10}$$

最後に，第 $n-1$ 列は

$$\begin{aligned}
a_{2n} &= 0 = b_{2n}\\
a_{3n} &= 0 = b_{3n}\\
a_{4n} &= 0 = b_{4n}\\
&\cdots\\
a_{n-2,n} &= 0 = b_{n-2,n}\\
a_{n-1,n} &= -(rs_1s_2\cdots s_{n-2})s_{n-1} = s_1b_{n-1,n}\\
a_{nn} &= (rs_1s_2\cdots s_{n-2})c_{n-1} = s_1b_{nn}
\end{aligned} \tag{6.11}$$

上の (6.6)-(6.11) における b_{ij} は後の付録 4 で用いるために導入してある．

これらの行列式の要素を用いれば， $\det C$ は各列から ( ) でくくった共通因子は除いた行列式であるから

$$\det C = \begin{vmatrix}
c_2 & -s_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
s_2c_3 & c_2c_3 & -s_3 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
s_2s_3c_4 & c_2s_3c_4 & c_3c_4 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & & \\
s_2s_3\cdots s_{n-3}c_{n-2} & c_2s_3\cdots s_{n-3}c_{n-2} & c_3s_4\cdots s_{n-3}c_{n-2} & \cdots & c_{n-3}c_{n-2} & -s_{n-2} & 0\\
s_2s_3\cdots s_{n-2}c_{n-1} & c_2s_3\cdots s_{n-2}c_{n-1} & c_3s_4\cdots s_{n-2}c_{n-1} & \cdots & c_{n-3}s_{n-2}c_{n-1} & c_{n-2}c_{n-1} & -s_{n-1}\\
s_2s_3\cdots s_{n-1} & c_2s_3\cdots s_{n-1} & c_3s_4\cdots s_{n-1} & \cdots & c_{n-3}s_{n-2}s_{n-1} & c_{n-2}s_{n-1} & c_{n-1}
\end{vmatrix} \tag{6.12}$$

ここで，$\det C = 1$ であることを数学的帰納法で証明することができるが，それは付録 2 に示す.

7 付録 2 直交行列式の証明

(6.12) の $\det C = 1$ であることを数学的帰納法で証明する.

$k=2$ のときには

$$\det C = \begin{vmatrix} c_1 & -s_1 \\ s_1 & c_1 \end{vmatrix} = 1 \tag{7.1}$$

が成り立っている.

つぎに，$k=3$ のときには

$$\det C = \begin{vmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1c_2 & c_1c_2 & -s_2 \\ s_1s_2 & c_1s_2 & c_2 \end{vmatrix} = 1 \tag{7.2}$$

が成り立っている.

$k=n-1$ のときに $\det D$ は

$$\det D = \begin{vmatrix} c_3 & -s_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ s_3c_4 & c_3c_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ s_3\cdots s_{n-3}c_{n-2} & c_3s_4\cdots s_{n-3}c_{n-2} & \cdots & c_{n-3}c_{n-2} & -s_{n-2} & 0 \\ s_3\cdots s_{n-2}c_{n-1} & c_3s_4\cdots s_{n-2}c_{n-1} & \cdots & c_{n-3}s_{n-2}c_{n-1} & c_{n-2}c_{n-1} & -s_{n-1} \\ s_3\cdots s_{n-1} & c_3s_4\cdots s_{n-1} & \cdots & c_{n-3}s_{n-2}s_{n-1} & c_{n-2}s_{n-1} & c_{n-1} \end{vmatrix} = 1 \tag{7.3}$$

が成り立つと仮定する．$k=n$ に対しては

$$\det C = \begin{vmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ s_2c_3 & c_2c_3 & -s_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ s_2s_3c_4 & c_2s_3c_4 & c_3c_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ s_2s_3\cdots s_{n-3}c_{n-2} & c_2s_3\cdots s_{n-3}c_{n-2} & c_3s_4\cdots s_{n-3}c_{n-2} & \cdots & c_{n-3}c_{n-2} & -s_{n-2} & 0 \\ s_2s_3\cdots s_{n-2}c_{n-1} & c_2s_3\cdots s_{n-2}c_{n-1} & c_3s_4\cdots s_{n-2}c_{n-1} & \cdots & c_{n-3}s_{n-2}c_{n-1} & c_{n-2}c_{n-1} & -s_{n-1} \\ s_2s_3\cdots s_{n-1} & c_2s_3\cdots s_{n-1} & c_3s_4\cdots s_{n-1} & \cdots & c_{n-3}s_{n-2}s_{n-1} & c_{n-2}s_{n-1} & c_{n-1} \end{vmatrix} \tag{6.12}$$

を行列式の第 1 行で展開すれば,

$$\begin{aligned} \det C &= (c_2^2 + s_2^2)\det D \\ &= \det D \end{aligned} \tag{7.4}$$

となる．ところで数学的帰納法の仮定として (7.3) で $\det D = 1$ と仮定したから，$\det C = 1$ が証明できる.

8　付録 3　(2.7) の証明

(2.5) で (2.7) が成立することを用いたが, (2.7) を証明するためにまず

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^k \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k \theta d\theta \tag{8.1}$$

を証明しよう.

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^k \theta d\theta \tag{8.2}$$

で $\tau=\pi-\theta$ とおけば, 積分区間 $[\frac{\pi}{2},\pi]$ は $[\frac{\pi}{2},0]$ に変換される．また $d\tau=-d\theta$ である．したがって

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^k(\pi-\tau)(-d\tau) \\
&= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^k(\pi-\tau)d\tau \\
&= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^k \tau d\tau
\end{aligned}
\tag{8.3}
$$

となり, (8.1) が証明された．この (8.1) を用いれば

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \sin^k \theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k \theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^k \theta d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k \theta d\theta
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

となり, (2.7) が証明される．

9 付録 4 (6.5) の別証明

この付録では (6.5) の [7] による証明を述べる．まず J_n を陽に (explicitly) に表しておこう．大きな行列式になるので，いくつかの部分に分けて表す.

$$
J_n = \begin{vmatrix} U & \cdots & V \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ W & \cdots & X \end{vmatrix}
\tag{9.1}
$$

ここで，U, V, W, X はそれぞれ

$$
U = \begin{bmatrix}
c_1 & -rs_1 & 0 & 0 \\
s_1c_2 & rc_1c_2 & -rs_1s_2 & 0 \\
s_1s_2c_3 & rc_1s_2c_3 & rs_1c_2c_3 & -rs_1s_2c_3c_4 \\
s_1s_2s_3c_4 & rc_1s_2s_3c_4 & rs_1c_2s_3c_4 & rs_1s_2c_3c_4
\end{bmatrix}
\tag{9.2}
$$

$$
V = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\tag{9.3}
$$

$$
W = \begin{bmatrix}
s_1s_2\cdots s_{n-4}c_{n-3} & rc_1s_2\cdots s_{n-4}c_{n-3} & rs_1c_2s_3\cdots s_{n-4}c_{n-3} & rs_1s_2c_3s_4\cdots s_{n-4}c_{n-3} \\
s_1s_2\cdots s_{n-3}c_{n-2} & rc_1s_2\cdots s_{n-3}c_{n-2} & rs_1c_2s_3\cdots s_{n-3}c_{n-2} & rs_1s_2c_3s_4\cdots s_{n-3}c_{n-2} \\
s_1s_2\cdots s_{n-2}c_{n-1} & rc_1s_2\cdots s_{n-2}c_{n-1} & rs_1c_2s_3\cdots s_{n-2}c_{n-1} & rs_1s_2c_3s_4\cdots s_{n-2}c_{n-1} \\
s_1s_2\cdots s_{n-2}s_{n-1} & rc_1s_2\cdots s_{n-2}s_{n-1} & rs_1c_2s_3\cdots s_{n-2}s_{n-1} & rs_1s_2c_3s_4\cdots s_{n-2}s_{n-1}
\end{bmatrix}
\tag{9.4}
$$

$$
X = \begin{bmatrix}
-rs_1s_2\cdots s_{n-3} & 0 & 0 \\
rs_1s_2\cdots s_{n-4}c_{n-3}c_{n-2} & -rs_1s_2\cdots s_{n-2} & 0 \\
rs_1s_2\cdots s_{n-4}c_{n-3}s_{n-2}c_{n-1} & rs_1s_2\cdots s_{n-3}c_{n-2}c_{n-1} & -rs_1s_2\cdots s_{n-1} \\
rs_1s_2\cdots s_{n-4}c_{n-3}s_{n-2}s_{n-1} & rs_1s_2\cdots s_{n-3}c_{n-2}s_{n-1} & rs_1s_2\cdots s_{n-2}c_{n-1}
\end{bmatrix}
\tag{9.5}
$$

となる．わざわざ，J_n を示したのは [7] にはミスプリがあったからである.

J_n を第 1 行で展開した計算をくり返したくないので，前の (6.5) の 2 行目の式を引用しよう．

$$J_n = r\begin{vmatrix} c_2 & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ s_2c_3 & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \multicolumn{5}{l}{\dotfill} \\ s_2\cdots s_{n-2}c_{n-1} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ s_2\cdots s_{n-2}s_{n-1} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{9.6}$$

この式の $a_{23}, \cdots, a_{nn}$ には添字 1 がついた s_1 があるが，これらをすべて各列からくくりだす．そうしたときに $a_{23} = s_1b_{23}, \cdots, a_{nn} = s_1b_{nn}$ と定義してある．ここで因子 s_1 はいくつあったかといえば，$n-2$ 個あった．これは添字 3 から n までの $n-2$ 列に一つづつ s_1 があったから．そうすると J_n は

$$J_n = rs_1^{n-2}\begin{vmatrix} c_2 & b_{23} & \cdots & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ s_2c_3 & b_{33} & \cdots & b_{3,n-1} & b_{3n} \\ \multicolumn{5}{l}{\dotfill} \\ s_2\cdots s_{n-2}c_{n-1} & b_{n-1,3} & \cdots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ s_2\cdots s_{n-2}s_{n-1} & b_{n3} & \cdots & b_{n,n-1} & b_{nn} \end{vmatrix} \tag{9.7}$$

となる．

ここで

$$\begin{aligned} y_2 &= r\cos\theta_2, \\ y_3 &= r\sin\theta_2\cos\theta_3, \\ y_4 &= r\sin\theta_2\sin\theta_3\cos\theta_4, \\ &\cdots \\ y_{n-1} &= r\sin\theta_2\sin\theta_3\ldots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}, \\ y_n &= r\sin\theta_2\sin\theta_3\ldots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}. \end{aligned} \tag{9.8}$$

とおくと

$$\begin{aligned} J_{n-1} &= \frac{\partial(y_2, y_3, y_4, \cdots, y_n)}{\partial(r, \theta_2, \theta_3, \cdots, \theta_{n-1})} \\ &= \begin{vmatrix} c_2 & b_{23} & \cdots & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ s_2c_3 & b_{33} & \cdots & b_{3,n-1} & b_{3n} \\ \multicolumn{5}{l}{\dotfill} \\ s_2\cdots s_{n-2}c_{n-1} & b_{n-1,3} & \cdots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ s_2\cdots s_{n-2}s_{n-1} & b_{n3} & \cdots & b_{n,n-1} & b_{nn} \end{vmatrix} \\ &= r^{n-2}s_2^{n-3}s_3^{n-4}\cdots s_{n-2} \end{aligned} \tag{9.9}$$

である．

したがって，ヤコビアン J_n は数学的帰納法の仮定 (9.9) によって

$$\begin{aligned} J_n &= rs_1^{n-2}[r^{n-2}s_2^{n-3}s_3^{n-4}\cdots s_{n-2}] \\ &= r^{n-1}s_1^{n-2}s_2^{n-3}s_3^{n-4}\cdots s_{n-2} \end{aligned} \tag{2.4}$$

が得られる．

10　付録 5　部分積分による (4.6) の計算

微分積分を大学で学んだ直後は微分公式と積分公式とがごっちゃになるということはなかった．ところがそれから数年が経つともう微分公式と積分公式がごちゃになり始めた．これは特に三角関数の微分と積分とがお

ぼつかない．それで仕方なく，三角関数の微分公式から積分公式をつくることにした．それなら，微分公式をしっかり覚えておけば，必要なときに三角関数の積分公式をつくることができる．

三角関数の微分公式で一番大切なのは $\cos x$ と $\sin x$ であろう．

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$
$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x$$

から

$$\int \sin x = -\cos x + C,$$
$$\int \cos x = \sin x + C,$$
$$C = \text{積分定数}$$

が得られる．

同様に部分積分の公式も 2 つの関数の積の微分公式から求められる．いま 2 つの関数を $f(x)$ と $g(x)$ としよう．そうするとその関数の積 $f(x)g(x)$ の微分公式はいま微分を $'$ で表せば，変数 x を省いて

$$(fg)' = f'g + fg'$$

である．これを用いて積分公式に変換すれば

$$\int (fg)'dx = \int f'gdx + \int fg'dx$$
$$fg = \int f'gdx + \int fg'dx$$

したがって，これから部分積分の公式

$$\int fg'dx = fg - \int f'gdx \tag{10.1}$$

が得られる．上の部分積分の不定積分の公式を用いて定積分すれば (4.6) が得られる．

関数の積の微分公式と部分積分の公式とが対応しているということは知っていたと思うが，同様に合成関数の微分公式と置換積分の公式とが対応していることはあまり意識していなかった．このことを意識させてくれたのは [12] であった．

11 付録 6 (4.10),(4.11) の (2.8) へのまとめ

まず k も p も整数のとき，

まず $2k = p$ とおくと，$k = \frac{p}{2}$ であるから，(4.10) は

$$I_p = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)} \tag{11.1}$$

となり，これは (2.8) である．

同様に $2k+1 = p$ とおくと，$k = \frac{p-1}{2}$ であるから，(4.11) は

$$I_p = \frac{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p-1}{2}+1+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)} \tag{11.2}$$

となり，これも (2.8) である．

12　付録 7　ガンマ関数

この付録 7 ではこのエッセイで使われた，ガンマ関数の定義といくつかの関係だけを導いておく．

ガンマ関数は一般には複素数 z に対して定義されるが，ここでは実数 x に対して定義しておく．このとき，ガンマ関数は

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x \mathrm{e}^{-t} dt, \quad x+1>0 \tag{12.1}$$

で定義される．

上の積分を部分積分すれば

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x \mathrm{e}^{-t} dt \\ &= \left[t^x(-\mathrm{e}^{-t})\right]_0^\infty + x\int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt \\ &= x\int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt \\ &= x\Gamma(x)\end{aligned} \tag{12.2}$$

が得られる．ここで $x=n$,（$n=$ 自然数）とおき，$\Gamma(1)=1$ を用いれば，(12.2) をくり返し用いて

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\ &= n(n-1)\cdots 1\cdot\Gamma(1) \\ &= n!\end{aligned}$$

これで (4.12) が導出された．

同様に $x+1=k+\frac{1}{2}$,（$k=$ 自然数）とおけば

$$\begin{aligned}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) &= \left(k-\tfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)\sqrt{\pi}}{2^k}\end{aligned}$$

すなわち，(4.13) が導出された．ここで，(2.9) が用いられた．

最後に，$\Gamma(1)=1$ と (2.9) とを示しておく．まず

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}dt = 1 \tag{12.3}$$

また (12.2) で $x+1=\frac{1}{2}$ から，$x=-\frac{1}{2}$ であるから

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-t}dt$$

$t=u^2$ とおくと，$dt=2udu$ であるから

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty u^{-1}\mathrm{e}^{-u^2}2udu \\ &= 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u^2}du \\ &= \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

である．

(2006.6.11)(2017.6.17 改訂)

参考文献

[1] 矢野　忠，n 次元の球の体積 3，研究と実践（愛数協），91 号 (2006.7) 1-4

[2] 矢野　忠，n 次元の球の体積 1，数学・物理通信，7 巻 3 号 (2017.6) 22-29

[3] 矢野　忠，n 次元の球の体積 2，数学・物理通信，7 巻 4 号（2017.6) 12-19

[4] 杉浦光夫,『解析入門』I（東京大学出版会, 1980）299-300

[5] 藤原松三郎,『微分積分学』第二巻（内田老鶴圃, 1939）270-272
しかし, この文献の球の体積の求め方は $n-2$ 個の角度についての多重積分をしていないという点では [4] ほど直接的ではなく, むしろその導出法は [11] に近い.

[6] 上野孝司，N 次元超球の体積はヤコビアン，曲面積は平行四辺形,
hooktail.sub.jp//contributions/sum2.pdf

[7] 山本哲朗,『行列解析ノート』,（サイエンス社，2013）142-147

[8] 高木貞治,『解析概論』改訂第三版（岩波書店，1961）356-357

[9] 森口, 宇田川, 一松,『数学公式 I』（岩波書店, 1956）243

[10] 松坂和夫,『解析入門』2 （岩波書店, 1997）80-81

[11] 久保亮五,『統計力学』（共立出版, 1952）46

[12] 吉田　武,『オイラーの贈物』（海鳴社，1993）112-113

補遺

このエッセイが完成してから，中西　襄先生からつぎのようなコメントを頂いた．

貴論文を拝見させて頂きました．n 次元空間で直交座標から極座標への変換のヤコビアンの計算を，直接遂行されたのには驚きました．数学的帰納法を使えば，ほとんど暗算でやれます.
(2.2) において

$$x_1 = r\cos\theta_1$$
$$x_k = (r\sin\theta_1)y_{k-1}, \quad (k = 2, 3, \cdots, n)$$

と表して，y_k に関して数学的帰納法の仮定を使い，x_1 と $\rho = r\sin\theta_1$ について 2 次元の極座標変換すれば，$J_n = r(\sin\theta_1)^{n-2}J_{n-1}$ が得られます.
学生にあまり面倒な計算をやらせると数学嫌いをつくる心配があるのではないでしょうか.

中西先生のおっしゃることはごもっともである．以下にその趣旨を述べておこう．
(2.2）で $\rho = r\sin\theta_1$ とおき，$x_2, \cdots, x_n$ を $y_1, \cdots, y_{n-1}$ と表すことにすれば,

$$\begin{aligned} y_1 &= \rho\cos\theta_2, \\ y_2 &= \rho\sin\theta_2\cos\theta_3, \\ &\dots \\ y_{n-2} &= \rho\sin\theta_2\dots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}, \\ y_{n-1} &= \rho\sin\theta_2\dots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}. \end{aligned} \tag{12.4}$$

このとき変数 $y_1, \cdots, y_{n-1}$ と変数 $\rho, \theta_2, \cdots, \theta_{n-1}$ との変数変換のヤコビアンは $n-1$ 次の直交座標系と極座標の関係であるから，数学的帰納法の仮定によって

$$dy_1 d_2 \cdots dy_{n-1} = J_{n-1} d\rho d\theta_2 \cdots d\theta_{n-1} \tag{12.5}$$
$$J_{n-1} = \rho^{n-2}(\sin\theta_2)^{n-3}(\sin\theta_3)^{n-4}\cdots(\sin\theta_{n-2}) \tag{12.6}$$

である．ところで

$$dx_2 \cdots dx_n = dy_1 \cdots dy_{n-1} \tag{12.7}$$

であるから

$$\begin{aligned} dx_1 dx_2 \cdots dx_n &= J_{n-1} dx_1 d\rho d\theta_2 \cdots d\theta_{n-1} \\ &= J_{n-1} J_2 dr d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_{n-1} \\ &= J_n dr d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_{n-1} \end{aligned} \tag{12.8}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned} J_n &= J_{n-1} J_2, \\ &= r(r\sin\theta_1)^{n-2}(\sin\theta_2)^{n-3}\cdots(\sin\theta_{n-1}) \\ &= r^{n-1}(\sin\theta_1)^{n-2}(\sin\theta_2)^{n-3}\cdots(\sin\theta_{n-1}) \end{aligned} \tag{12.9}$$

が得られる．これは (2.4) にほかならない．ただし，(12.9) では

$$dx_1 d\rho = J_2 dr d\theta_1 = r dr d\theta_1, \quad J_2 = r \tag{12.10}$$

であることを用いた．

編集後記

7 巻 5 号を発行する．4 号の編集後記でさらに 5 号を発行したいと述べたのだが，実際に発行できるかどうかはわからなった．それを実現できるのはとてもうれしい．

これも投稿して下さる方がおられてこそである．おかげで私自身も年齢相応ではあるが，それなりに生き生きとしていることができる．

皆様には，この夏の数か月をバカンスをとるつもりでとお勧めしたのだが，私には徳島科学史会の総会のための講演の準備をする時期となった．なかなかバカンスをとるという訳にもいかない．

つぎの号の発行は 9 月を予定している．ご投稿をお願いします．

（矢野　忠）