数学・物理通信

7巻7号　　2017年9月

編集　新関章三・矢野　忠

2017 年 9 月 7 日

目次(Contents)

誤解を招く弦振動の問題 (3)

世戸 憲治 *

Misleading Problems in String Oscillations (3)

Kenji SETO*

1 はじめに

前回の「誤解を招く弦振動の問題 (1), (2)」(数学・物理通信 7 巻 4 号，7 巻 6 号) では，弦を振動させたとき，時間的に弦がどのように変形していくかを扱ったが，このときの弦は，まったく剛性を持たない鎖のようなものと考えていた．実際，物理で扱う弦とは，剛性を持たないものをさす．ところが，ピアノ，ハープ，ヴァイオリンなどの弦楽器の弦は，少なからず剛性を持つものなので，前回書いたとおりの振動様式になるのか不安になってきた．ここでは，弦に剛性を持たせたときの振動がどのようになるかについて考察することにする．

2 方程式の導入

弦の振動を表す方程式は，良く知られているように，弦の長さ方向に x 軸をとり，点 x, 時刻 t における弦に対し垂直方向の変位を $U(x,t)$ としたとき，

$$S\rho\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} \tag{2.1}$$

と書かれる．ここに，S, ρ, T は，それぞれ，弦の断面積，体積密度，張力である．特に，$S\rho$ は弦の線密度を表す．一方，張力は持たずに，剛性を持つ棒，あるいは梁の振動を表す方程式として知られているものは，

$$S\rho\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = -EI\frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial x^4} \tag{2.2}$$

と書かれる．ここに，E, I は，それぞれ，Young 率，断面 2 次モーメントである．これら 2 つの方程式から，張力も剛性も両方持ち合わせている場合の方程式は，

$$S\rho\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} - EI\frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial x^4} \tag{2.3}$$

と考えられる．ただし，この方程式はよほど需要がないのか，通常の教科書には出てこないし，インターネットで調べてもお目にかかることはない．ここでは，この方程式の導出方法については述べないが，線形近似の範囲で正しいものと認められる．

* 北海学園大学名誉教授　　　　　　E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

3　方程式の解法

3.1　固有値と固有関数

方程式 (2.3) を解くにあたって，変位 $U(x,t)$ が変数 x, t について変数分離形の

$$U(x,t) = X(x)P(t) \tag{3.1}$$

の形で解けるものとする．これを方程式に代入し，適当に割り算をすると，

$$\frac{1}{S\rho X}\Big[T\frac{d^2X}{dx^2} - EI\frac{d^4X}{dx^4}\Big] = \frac{1}{P}\frac{d^2P}{dt^2} \tag{3.2}$$

となる．この左辺は x の関数，右辺は t の関数なので，それが等しいということはこの式の値は定数でなければならず，これを $-\omega^2$ とおくと，2 本の方程式

$$EI\frac{d^4X}{dx^4} - T\frac{d^2X}{dx^2} - S\rho\omega^2 X = 0, \qquad \frac{d^2P}{dt^2} + \omega^2 P = 0 \tag{3.3}$$

を得る．この第 1 式から解いていこう．ここで，$X(x) = e^{ikx}$ と仮定すると，これが方程式を満たすためには，

$$EIk^4 + Tk^2 - S\rho\,\omega^2 = 0 \tag{3.4}$$

でなければならない．ここで，ω に依存する 2 個の正定数 μ, ν を

$$\mu = \sqrt{\frac{\sqrt{T^2 + 4EIS\rho\,\omega^2} - T}{2EI}}, \qquad \nu = \sqrt{\frac{\sqrt{T^2 + 4EIS\rho\,\omega^2} + T}{2EI}} \tag{3.5}$$

と定義しておくと，(3.4) 式の解 k は

$$k = \pm\mu, \qquad k = \pm i\nu \tag{3.6}$$

となる．方程式の線形性から，k にこれらの値を代入した e^{ikx} の線形結合が解となるので，実関数の形で表すと，$\cos(\mu x)$, $\sin(\mu x)$, $\cosh(\nu x)$, $\sinh(\nu x)$ が解となる．同様に，時間依存部分 $P(t)$ の方程式 (3.3) の第 2 式からは，$\cos(\omega t)$, $\sin(\omega t)$ が解となる．

ここでは，初期条件として，弦の真ん中を中心として左右対称の形に持ち上げておいてから，静かに初速度なしに，離すことにする．この初期条件のもとでは，明らかに，変位 $U(x,t)$ は振動しているときも弦の中心から見て左右対称の形を保つはずである．これは，弦の真ん中を x 軸の原点に選ぶものとすると，x 依存部分 $X(x)$ が偶関数となることを意味する [*1]．したがって，$X(x)$ は，A, B を任意定数として，

$$X(x) = A\cos(\mu x) + B\cosh(\nu x) \tag{3.7}$$

の形となる．さらに，初速度をゼロとしているので，時間依存部分 $P(t)$ で適合するのは，$\cos(\omega t)$ の方である．これで，変位 $U(x,t)$ は

$$U(x,t) = X(x)P(t) = \big[A\cos(\mu x) + B\cosh(\nu x)\big]\cos(\omega t) \tag{3.8}$$

[*1] 初期条件は本来 3.4 節で論じる「最終的な解」に対して課せられるべきものであるが，部分波の独立性により，x に関して偶関数であるとか，初速度がゼロであるとかの定性的条件は，部分波に対しても成立する．

と表されることになる．

つぎに，弦の長さを 2ℓ，したがって，x の範囲は $[-\ell,\ \ell]$ とし，端の $x=\ell$ は埋め込み固定端になっているものとして，

$$X(\ell)=0, \qquad \left.\frac{dX(x)}{dx}\right|_{x=\ell}=0 \tag{3.9}$$

とする．これが境界条件となる．これら 2 個の条件を (3.7) 式に適用すると，

$$A\cos(\mu\ell)+B\cosh(\nu\ell)=0, \qquad -A\mu\sin(\mu\ell)+B\nu\sinh(\nu\ell)=0 \tag{3.10}$$

となる．これから $A,\ B$ が共にゼロとならないためには，これら方程式の係数行列式の値がゼロでなければならず，

$$\begin{vmatrix} \cos(\mu\ell) & \cosh(\nu\ell) \\ -\mu\sin(\mu\ell) & \nu\sinh(\nu\ell) \end{vmatrix}=0, \qquad \text{すなわち} \qquad \cos(\mu\ell)\tanh(\nu\ell)+\frac{\mu}{\nu}\sin(\mu\ell)=0 \tag{3.11}$$

となる．これから $\mu,\ \nu$ の中に含まれる ω の値が固有値として，決定される．この意味でこの式が固有値方程式となる．このときの ω はとびとびに決まるであろう．それを正の小さい方から ω_k $(k=1,2,3,\ \cdots)$ とし，対応する $\mu,\ \nu$ を，それぞれ，$\mu_k,\ \nu_k$ $(k=1,2,3,\cdots)$ とする．

以下，$A,\ B$ の値を，(3.10) の第 1 式が満たされるように，

$$A=1, \qquad B=-\frac{\cos(\mu\ell)}{\cosh(\nu\ell)} \tag{3.12}$$

と選ぶことにする．この選択で (3.7) 式の $X(x)$ を，固有関数として，

$$F_k(x)=\cos(\mu_k x)-\frac{\cos(\mu_k\ell)}{\cosh(\nu_k\ell)}\cosh(\nu_k x) \tag{3.13}$$

と定義しておく．ただし，これは，もちろん，規格化されたものではない．(2.3) 式の一般解は，任意定数 C_k を用いて，これら固有関数を重ね合わせた

$$U(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}C_kF_k(x)\cos(\omega_k t) \tag{3.14}$$

と書かれる．

3.2 固有関数の直交性と規格化

(3.13) 式で定義された固有関数 $F_k(x)$ が満たす方程式は，(3.3) の第 1 式から

$$-S\rho\,{\omega_k}^2F_k=T\frac{d^2F_k}{dx^2}-EI\frac{d^4F_k}{dx^4} \tag{3.15}$$

となる．この式で k を l に変えた

$$-S\rho\,{\omega_l}^2F_l=T\frac{d^2F_l}{dx^2}-EI\frac{d^4F_l}{dx^4} \tag{3.16}$$

の 2 本の式を考え，上の式に F_l を掛け，下の式に F_k を掛けて，辺々を引き算すると，

$$-S\rho\,({\omega_k}^2-{\omega_l}^2)F_kF_l=\frac{d}{dx}\Big[T\big(F_l{F_k}'-F_k{F_l}'\big)-EI\big(F_l{F_k}'''-F_k{F_l}'''\big)+EI\big({F_l}'{F_k}''-{F_k}'{F_l}''\big)\Big] \tag{3.17}$$

となる．ここで，プライムは微分を表す．この式の両辺を x について $-\ell$ から ℓ まで積分すると，

$$-S\rho\left({\omega_k}^2-{\omega_l}^2\right)\int_{-\ell}^{\ell}F_kF_l dx=\Big[T\big(F_l{F_k}'-F_k{F_l}'\big)-EI\big(F_l{F_k}'''-F_k{F_l}'''\big)+EI\big({F_l}'{F_k}''-{F_k}'{F_l}''\big)\Big]_{-\ell}^{\ell} \tag{3.18}$$

となるが，固有関数 F_k，F_l は $x=\pm\ell$ で関数自信とその微係数がゼロとなるので，この式の右辺はゼロとなる．したがって，左辺で $\omega_k\neq\omega_l$ のときは，

$$\int_{-\ell}^{\ell}F_k(x)F_l(x)dx=0 \tag{3.19}$$

でなければならない．これで固有関数の直交性がでる．$\omega_k=\omega_l$ のときは，積分公式

$$\int\cos^2(ax)dx=\frac{x}{2}+\frac{1}{2a}\sin(ax)\cos(ax),\qquad \int\cosh^2(bx)dx=\frac{x}{2}+\frac{1}{2b}\sinh(bx)\cosh(bx) \tag{3.20}$$

$$\int\cos(ax)\cosh(bx)dx=\frac{1}{a^2+b^2}\big[b\cos(ax)\sinh(bx)+a\sin(ax)\cosh(bx)\big] \tag{3.21}$$

を用いて直接積分してしまう．これらの結果をまとめると，固有関数の直交式

$$\int_{-\ell}^{\ell}F_k(x)F_l(x)dx={N_k}^2\delta_{k,l} \tag{3.22}$$

を得る．ここに，規格化定数 ${N_k}^2$ は

$${N_k}^2=\ell\Big[1+\frac{\cos^2(\mu_k\ell)}{\cosh^2(\nu_k\ell)}\Big]+\frac{1}{\mu_k}\sin(\mu_k\ell)\cos(\mu_k\ell)+\frac{1}{\nu_k}\tanh(\nu_k\ell)\cos^2(\mu_k\ell) \tag{3.23}$$

となる．これから，F_k/N_k が規格化された固有関数となる．

3.3 初期値問題

先に，$t=0$ における初期値として，弦の真ん中から見て左右対称の形で持ち上げてから静かに離すとしたが，ここでは，最も簡単な方法として，弦の中央を U_0 だけ持ち上げてから離すことにする．このときの弦の形 $U(x,0)$ がどうなるかを求めておこう．このときは時間に依存しない方程式となるので，解くべきものは，(2.3) 式で時間微分の項を取り除いた

$$T\frac{\partial^2U(x,0)}{\partial x^2}-EI\frac{\partial^4U(x,0)}{\partial x^4}=0 \tag{3.24}$$

となる．ここで，仮に，$U(x,0)=e^{ikx}$ とおくと，

$$Tk^2+EIk^4=0 \tag{3.25}$$

となる．ここで，

$$\lambda=\sqrt{\frac{T}{EI}} \tag{3.26}$$

と定義すると，(3.25) 式の解は，

$$k=0\ (\text{重解}),\qquad k=\pm i\lambda \tag{3.27}$$

となるので，$U(x,0)$ は，a，b，c，d を任意定数として，

$$U(x,0)=a+b|x|+c\cosh(\lambda x)+d\sinh(\lambda|x|) \tag{3.28}$$

となる．x に絶対値を付けたのは，偶関数にするためである．ここで，境界条件

$$U(0,0) = U_0, \qquad \left.\frac{dU(x,0)}{dx}\right|_{x=0} = 0, \qquad U(\ell,0) = 0, \qquad \left.\frac{dU(x,0)}{dx}\right|_{x=\ell} = 0 \tag{3.29}$$

を課すことにする．ここで，$x=0$ での微係数をゼロとしたのは，剛性を入れた方程式 (2.3) は微係数が不連続になって急激に折れ曲がった形になることを想定していないためで，偶関数の場合は $x=0$ で必然的に微係数がゼロとなるからである．また，$x=\ell$ の点では，前と同じく埋め込み固定端とした．これら条件から，

$$a+c = U_0, \qquad b+d\lambda = 0, \qquad a+b\ell+c\cosh(\lambda\ell)+d\sinh(\lambda\ell) = 0, \qquad b+c\lambda\sinh(\lambda\ell)+d\lambda\cosh(\lambda\ell) = 0 \tag{3.30}$$

となり，これらの方程式を解くと，

$$\begin{aligned} a &= \frac{\lambda\ell\sinh(\lambda\ell)-\cosh(\lambda\ell)+1}{\lambda\ell\sinh(\lambda\ell)-2\cosh(\lambda\ell)+2}U_0, \qquad & b &= \frac{-\lambda\sinh(\lambda\ell)}{\lambda\ell\sinh(\lambda\ell)-2\cosh(\lambda\ell)+2}U_0, \\ c &= \frac{1-\cosh(\lambda\ell)}{\lambda\ell\sinh(\lambda\ell)-2\cosh(\lambda\ell)+2}U_0, \qquad & d &= \frac{\sinh(\lambda\ell)}{\lambda\ell\sinh(\lambda\ell)-2\cosh(\lambda\ell)+2}U_0 \end{aligned} \tag{3.31}$$

となるので，この解を (3.28) 式に代入し，加法定理を用いて整理すると，

$$U(x,0) = \frac{U_0}{\lambda\ell\sinh(\lambda\ell)-2\cosh(\lambda\ell)+2}\Big[\lambda(\ell-|x|)\sinh(\lambda\ell)+1-\cosh(\lambda\ell)+\cosh(\lambda x)-\cosh\big(\lambda(\ell-|x|)\big)\Big] \tag{3.32}$$

となる．

3.4 最終的な解

最終的な解を求めるには (3.14) 式の未定定数 C_k を求める必要がある．このためには，この式で $t=0$ としたときが (3.32) 式の $U(x,0)$ と一致するようにすればよい．すなわち，

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k F_k(x) = U(x,0) \tag{3.33}$$

である．両辺に $F_l(x)$ を掛け，x について積分し，固有関数の直交式 (3.22) を用いると，係数 C_k が

$$C_k = \frac{1}{{N_k}^2}\int_{-\ell}^{\ell} F_k(x)U(x,0)dx \tag{3.34}$$

と求まるので，これを (3.14) 式に戻し，最終的な解は，

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{{N_k}^2}\Big(\int_{-\ell}^{\ell} F_k(x')U(x',0)dx'\Big)F_k(x)\cos(\omega_k t) \tag{3.35}$$

と求められる．もちろん，この式に含まれる積分は実行可能ではあるが，式があまりに面倒になるので，このままにしておく．

3.5 EI が十分に小さいときの解

(3.5) 式で定義されたパラメータ μ, ν には

$$\mu\nu = \sqrt{\frac{S\rho}{EI}}\,\omega \tag{3.36}$$

の関係が成立する．ここで，通常の波動方程式である (2.1) 式の波動伝播速度を

$$c_0 = \sqrt{\frac{T}{S\rho}} \tag{3.37}$$

と定義すると，(3.36) 式は (3.26) 式の λ を用いて，

$$\mu\nu = \frac{\omega}{c_0}\lambda \tag{3.38}$$

と書ける．ここまでは厳密に成立する式である．ここで，EI は十分に小さいものとして，(3.5) 式の定義に従って，$EI \simeq 0$ とした漸近形にすると [*2]，

$$\mu \ \simeq \ \frac{\omega}{c_0}, \qquad \nu \ \simeq \ \lambda \tag{3.39}$$

となって，(3.38) 式がきれいに再現される．また，$EI \to 0$ の極限では，$\nu \to \infty$ となるので，固有値方程式 (3.11) の第 2 式は $\cos(\mu\ell) = 0$, すなわち，$\cos(\omega\ell/c_0) = 0$ となる．これから固有値 ω は k を自然数として，

$$\omega = c_0(k - \tfrac{1}{2})\pi/\ell, \quad k = 1, 2, 3, \cdots \tag{3.40}$$

となり，この結果は，剛性のないときの方程式 (2.1) から直接求めたものと一致する．

4　数値解法によるグラフ表示

ここでは，ハープの弦の振動になぞらえて，数値解析をしてみる．ハープはナイロン弦とスティール弦が混在しているが，ここでは，ナイロン弦を例にして考えることにする．ただし，現著者はいかなる実験装置も持っていないので，パラメータを決定するための各種データをいかに入手するかが問題となる．弦の断面を半径 r の円とすると，断面積 S，および，断面 2 次モーメントは，それぞれ，

$$S = \pi r^2, \qquad I = 4\int_0^r x^2\sqrt{r^2 - x^2}dx = \frac{\pi}{4}r^4 \tag{4.1}$$

となるので，これは半径 r さえ分かればよい．ここでは，中央の「ラ」の弦を想定することにし，その長さは 64cm, したがって，その半分の ℓ は $\ell = 0.32$m, また，断面の半径は $r = 0.75\text{mm} = 0.00075\text{m}$ である．体積密度 ρ, および Young 率 E については，インターネットで調べた結果，$\rho = 1.14 \times 10^3 \text{kg/m}^3$, $E = 7$ GPa を採用する．この E の値は，同じナイロンでも種類によってかなりの幅があるが，ハープの弦はかなり硬いものなので大きい方の値をとった．問題は張力の T をどう取るかである．これは原著者にとって，測定不可能なので，逆転の発想でいくしか方法はない．中央「ラ」の音の周波数は標準的には 440Hz である．そこで，(3.5) 式の μ, ν に含まれる ω を $\omega = 2\pi \times 440$ とおき，これらの式に含まれる張力 T を未知数として固有値方程式 (3.11) を T について解く．いったん，T が決まってしまえば，あとの固有値は，この決められた T を基にして解いていくという方法をとる．これで，すべてのパラメータが決定する．この設定で，$S\rho$, EI, T の値は，それぞれ，

$$S\rho = 2.0145 \times 10^{-3} \text{ kg/m}, \qquad EI = 1.7395 \times 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}^2, \qquad T = 632.3536 \text{ N} \tag{4.2}$$

となる．この数値で驚くことは，ハープの弦 1 本におよそ大人の体重ほどの力が掛かっていることである．道理でハープのナイロン弦はよく切れることがある．

[*2] 正しくは，$EIS\rho\omega^2$ が T^2 に比べ十分に小さいと言うべき．

これを基に，固有値方程式 (3.11) を数値的に解いて，10 個の ω を求め，それを 2π で割って振動数にすると，

$$\frac{\omega_k}{2\pi} = 440.0000,\quad 1320.3504,\quad 2201.7520,\quad 3084.9036,\quad 3970.5020,\quad 4859.2407,\quad 5751.8089,\quad 6648.8907,\quad 7551.1643,\quad 8459.3011 \tag{4.3}$$

となる．初めの基本波の振動数 $\omega_1/2\pi$ が 440Hz になるのは，この値になるように張力 T を決めたためである．それに続く振動数は，およそ，基本振動数の 3 倍，5 倍，, , と奇数倍になっているが，剛性をいれたときは，正確には奇数倍にはならない．これら数値の階差を求めてみると，

$$880.3504,\quad 881.4016,\quad 883.1516,\quad 885.5984,\quad 888.7387,\quad 892.5682,\quad 897.0818,\quad 902.2736,\quad 908.1368 \tag{4.4}$$

とその差は暫時増加していく．これは，剛性が存在しないときの (3.40) 式とは大きく異なることである．

固有値が求まると，(3.13) 式の固有関数 $F_k(x)$，(3.23) 式の規格化定数 ${N_k}^2$，(3.32) 式の初期波形 $U(x,0)$，(3.34) 式の線形結合係数 C_k と求め，最終的に (3.35) 式の任意時刻における変位 $U(x,t)$ が求められる．なお，ここでは，C_k に含まれる積分は数値積分で済ました．

以下の図 1 に変位 $U(x,t)$ のグラフを示す．この図は基本波の 1 周期，すなわち，1/440 sec$= t_1$ を 12 等分した初めの 4 コマを示したもので，図の中の (1), (2), (3), (4) は，それぞれ，時間 t が $t = t_1 \times (0,\ 1,\ 2,\ 3)/12$ に相当する．

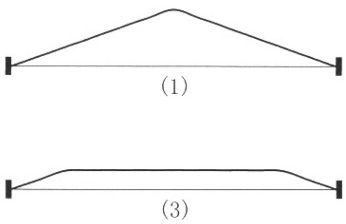

図 1

見て分かるとおり，これは「誤解を招く弦振動の問題 (1)」で示した剛性が存在しないときの図と同じように上から平らになっていく．せっかく剛性を考慮した解析をしたにもかかわらず，目で見て分かるほどの効果はでていない．これは方程式 (2.3) における剛性を表す係数 EI の値があまりに小さいためであろうか．引き続き，時間が経過したときのグラフを図 2 に示す．

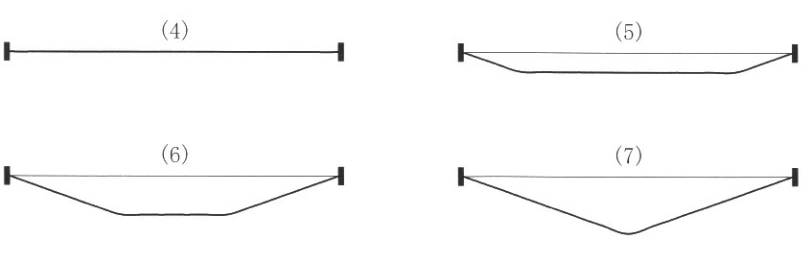

図 2

この図で，(4), (5), (6), (7) は，それぞれ，時間 t が $t = t_1 \times (3,\ 4,\ 5,\ 6)/12$ に相当する．この図を見ても剛性をまったく考慮していないときと同じとしか思えない．

ところが，途中を飛ばして，時間がもう少し経過した，10 周期後からの図を以下の図 3，図 4 に示す．図 3 での (121), (122), (123), (124) は，それぞれ，時間 t が，$t = t_1 \times (120,\ 121,\ 122,\ 123)/12$ に相当し，

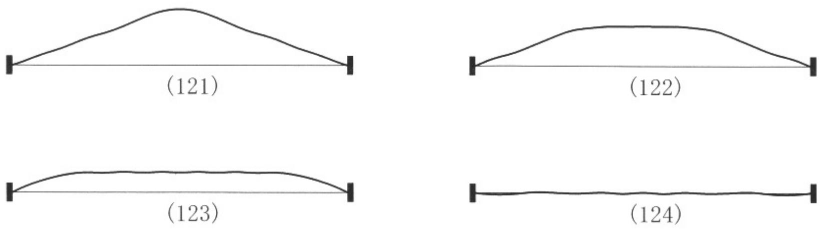

図 3

また，図 4 での (124), (125), (126), (127) は，それぞれ，$t = t_1 \times (123,\ 124,\ 125,\ 126)/12$ に相当する．

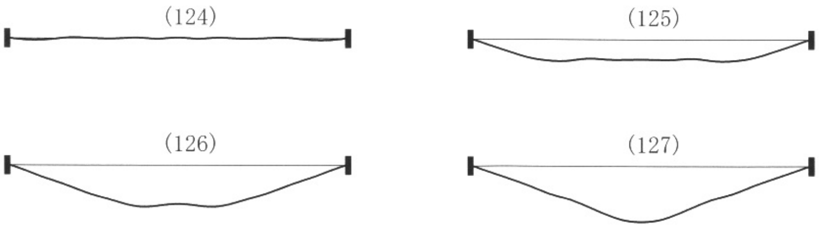

図 4

これらの図を見てわかるとおり，時間が経つにつれ，剛性を入れた効果が表れはじめ，変位 $U(x,t)$ は丸みをおびた変形に変わっていくのがわかる．これは，最終的な解である (3.35) 式において，$k=1$ の基本波，および，k が 2 以上の倍振動波のそれぞれは周期関数であるが，倍振動の振動数が基本振動の振動数の整数倍になっていないために，これらの和をとったときは，全体として周期関数にはならないことを意味する．特に，図 4 の (124) では，変位が完全にはゼロになっていないこと，および，(125) (126) では波立が起こっていることなどは，この非整数倍の倍振動によって起こる現象で，剛性がないときには起こり得ないことであった．ここに至って剛性を入れた効果が如実に表れてくる．もっとも，倍振動の振動数が基本振動の振動数の整数倍にならないという時点で，「倍振動」という言葉はやめるべきなのかもしれない．

結果として，「誤解を招く弦振動の問題 (1)」で述べたことは，剛性を入れた解析では，半分正しく，半分正しくなかったことになる．

ここでは，ハープのナイロン弦について述べてきたが，ピアノの弦についても簡単に述べておく．ピアノの弦はすべて鋼鉄製の金属弦である．中央「ラ」の音の弦の長さは，39 cm，したがってその半分の ℓ は $\ell = 19.5\,\mathrm{cm} = 0.195\,\mathrm{m}$, 弦の断面の半径は $r = 0.6\,\mathrm{mm} = 0.0006\,\mathrm{m}$, インターネットで調べた密度 ρ, Young 率 E は，それぞれ，$\rho = 7.87 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$, $E = 200\,\mathrm{GPa}$ である．これでこの音の振動数を 440 Hz として，$S\rho$, EI, T を求めると，

$$S\rho = 8.9007 \times 10^{-3}\mathrm{kg/m}, \qquad EI = 2.0357 \times 10^{-2}\mathrm{N \cdot m^2}, \qquad T = 999.0816\mathrm{N} \tag{4.5}$$

となる．この張力 T であるが，およそ，100kg 重近い力がかかっていることは驚きである．EI の値がハープのナイロン弦のときより大きめであるためか，剛性を入れた効果はナイロンのときより顕著である．このときの固

有値 ω_k を 2π で割って振動数にすると，

$$\frac{\omega_k}{2\pi} = 440.0000,\quad 1326.9966,\quad 2234.7812,\quad 3176.5653,\quad 4164.6716,\quad 5210.3206,\quad 6323.5169,\quad 7513.0247,\quad 8786.4117,\quad 10150.1376 \tag{4.6}$$

となって，(4.3) 式のときより大きめにでる．ここでは，図では示さないが，初めの 1 周期のときは，剛性なしのときのように上から平らに変形していくが，2 周期目くらいからは，丸みをおびた変形に変わっていく．

ハープでも，ピアノでも低い音を出す方の弦は，単純な線ではなく 1 本の芯線に他の線を巻き付けた巻き線になっている．何故このような巻き線を使うのかが分からなかったが，今回の研究でその理由が見えてきた．剛性なしの (3.40) 式で考えると，この ω の値をできるだけ小さくするには，ℓ を大きく，つまり弦の長さを長くするか，波動伝播速度 c_0 を小さくするかである．この c_0 を小さくするには，(3.37) 式から T を小さくするか，線密度の $S\rho$ を大きくするかである．しかし，T を小さくしすぎると音自体が出なくなってしまう．そこで線密度を大きく，つまり太い線にするとこんどは剛性も大きくなって倍音が倍音でなくなってしまう．剛性を大きくしないで線密度をあげるには巻き線が都合が良いということらしい．

5　おわりに

今回の解析では，数値計算のところで思わぬ困難に悩まされてしまった．初めは，固有関数を定義するのに，(3.10) の第 1 式が満たされるように，$A = \cosh(\nu\ell)$，$B = -\cos(\mu\ell)$ と選んで，固有関数を $F_k(x) = \cosh(\nu_k\ell)\cos(\mu_k x) - \cos(\mu_k\ell)\cosh(\nu_k x)$ としていた．ところが，これでプログラムを組んでみると，何度やり直してもエラーになってしまう．初めは気付かなかったが，双曲線関数の値はかなり大きなもの，例えば，10^{64} 程度のものになってしまい，このような大きな数同士の引き算では有効数字の桁数を超えてしまいとんでもない答えが返ってくることに気が付いた．同じことは，初期波形 $U(x,0)$ を表す (3.32) 式のところでも，初めは，$\cosh\big(\lambda(\ell - |x|)\big)$ の部分を分解した形で計算していたが，やはりエラーが起こってしまった．これを分解すると双曲線関数同士の積になり非常に大きな数になった上で，その引き算になることがいけないらしい．このようなことは実際にやってみないと分からないことで，よい勉強になった．

[謝辞]

今回も，京都大学名誉教授の中西襄先生にこの原稿を見ていただき，たくさんのコメントをいただきました．特に，初期条件の入れ方については，先生から多大なご助言をいただきました．先生に心から感謝いたします．

なぜ $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = 1$ でないのか

矢野　忠 [1]

Why does $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = 1$ not hold ?

Tadashi YANO[2]

1　はじめに

これはすでに愛媛数学教育協議会の機関誌『研究と実践』[1] に掲載したものである．しかし，この『研究と実践』は読者が限られているから,『数学・物理通信』に転載すれば，広い読者の眼にとまることが期待される．

話はいまから 20 年以上も前のことになる．友人で同僚だった Y さんに尋ねられたことがあった．それは 1 変数の関数 $y = y(x)$ のときに導関数の間に

$$\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dy} = 1 \tag{1.1}$$

が成立するが, $z = z(x, y)$ と 2 変数の関数を考えたときに

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = -1 \tag{1.2}$$

となって, なぜ

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = 1 \tag{1.3}$$

とならないのかという．(1.3) が成り立たないことを直観的に納得できる説明はないのだろうかというのが Y さんの疑問であった． 計算をしたら, (1.2) が成り立つのはもちろん知っているが, それでは満足できないという．

なぜ (1.3) が成り立たないのが不思議かといえば,

$$\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dy} = 1$$

のときには, 形式的に左辺の導関数をそれぞれ dx と dy の分数だとみたときに, 左の因子の分子にあたる dy は右の因子の分母 dy と約分でき, 左の因子の分母 dx は右の因子の分子の dx と約分できて 1 となるのは明らかだが, 2 変数の偏導関数では一定値にとられた変数（偏導関数の下に添えられた変数）のことを度外視すれば, 3 つの偏導関数の積は分子と分母でやはり約分できて, 1 になると思われるが, とのことである．確かに, 高校までは $\frac{dy}{dx}$ とか $(\frac{\partial z}{\partial y})_x$ とかは, 一つの記号であってその分子, 分母という考え方はしないが, 大学に入って微分方程式を学ぶとその辺が融通無碍になる．特に微分 dx, dy の概念を学び, 導関数を微分商と呼んだりするのは dy/dx の dy が分子で dx が分母として取り扱ってもいいことを示している．だから, 高校までのような言い訳はもう通用しない．さて, どう考えたらいいのだろうか.

2 節ではヤコビアンによる説明を述べる．3 節では微分係数の多変数への一般化による説明を述べる．4 節はまとめである．5 節の付録では 2 節に述べた [定理 1]-[定理 3] の証明をする．6 節は世戸憲治さんからのコメントで (1.2) の導き方を述べる．7 節では (1.2) を導くもっとも普通の方法を述べる．

---

[1]元愛媛大学工学部
[2]yanotad@earth.ocn.ne.jp

2　ヤコビアンによる説明

私の退職前の 4 年間,「熱力学」をはじめて学生に教えるようになった．熱力学はわかり難い科目の一つである．1 年目は無我夢中で講義のノート作りに追われた．2 年目くらいから少しずつ余裕が出来てきて講義ノートを修正して教え方を改善したが, それでも学生にとってはやはり難しいらしい.

しかし, いずれにしても自分が熱力学がわからないと教えられないので, 何冊か熱力学の本を新しく購入して, 勉強をしようとした．その中に池田和義著『基礎熱力学』[2] があった．この本の p.87-90 にヤコビアンの応用について書いてある．その中の重要な定義と定理を抜書きしておこう（文章を一部改変した）.

[定義]　変数 λ, μ の関数

$$x = x(\lambda, \mu) \tag{2.1}$$

$$y = y(\lambda, \mu) \tag{2.2}$$

を考えるとき, $\partial(x, y)/\partial(\lambda, \mu)$ をつぎの式で定義し, ヤコビアン (Jacobian) と名づける.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x,y)}{\partial(\lambda,\mu)} &= \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)_\mu & \left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)_\lambda \\ \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)_\mu & \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)_\lambda \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)_\mu \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)_\lambda - \left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)_\lambda \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)_\mu \end{aligned} \tag{2.3}$$

[定理 1]

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\lambda,\mu)} = -\frac{\partial(y,x)}{\partial(\lambda,\mu)} = -\frac{\partial(x,y)}{\partial(\mu,\lambda)} = \frac{\partial(y,x)}{\partial(\mu,\lambda)} \tag{2.4}$$

[定理 2]

$$\frac{\partial(x,\mu)}{\partial(\lambda,\mu)} = -\frac{\partial(\mu,x)}{\partial(\lambda,\mu)} = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)_\mu \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial(\lambda,y)}{\partial(\lambda,\mu)} = -\frac{\partial(y,\lambda)}{\partial(\lambda,\mu)} = \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)_\lambda \tag{2.6}$$

[定理 3]

変数 λ, μ の関数を

$$u = u(\lambda, \mu) \tag{2.7}$$

$$v = v(\lambda, \mu) \tag{2.8}$$

とし, さらに u, v の関数

$$x = x(u, v) \tag{2.9}$$

$$y = y(u, v) \tag{2.10}$$

を考えると

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(\lambda,\mu)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\lambda,\mu)}, \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{\frac{\partial(x,y)}{\partial(\lambda,\mu)}}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(\lambda,\mu)}}. \tag{2.12}$$

いまここでは証明はすべて省略したが, 少し偏微分について学んだ人なら, 各自で証明をすることはそれほど難しくはない[3].

ここでは [定理 2] に注目しよう．これはヤコビアンから単一の偏導関数を導く式である．この定理の記憶法として池田先生はつぎのように書いている．いま

$$\frac{\partial(x,\mu)}{\partial(\lambda,\mu)} \tag{2.13}$$

があれば,

$$\frac{\partial(x,\cancel{\mu})}{\partial(\lambda,\cancel{\mu})} \tag{2.14}$$

と同じ変数を縦線で消す（数式中では縦線が引けないので文字を縦にスラッシュを消された文字が上下の縦になっている．以下同様）．つぎに等号 = を書いて, その横に消された変数を除いた表示を書き, 全体をかっこでくくって, 消された変数を右下に小さく書く．すなわち

$$\frac{\partial(x,\mu)}{\partial(\lambda,\mu)} = \frac{\partial(x,\cancel{\mu})}{\partial(\lambda,\cancel{\mu})} = \left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)_\mu \tag{2.15}$$

つぎに

$$\frac{\partial(\mu,x)}{\partial(\lambda,\mu)} \tag{2.16}$$

があれば, ヤコビアンの斜め上下に同一の変数が重なっているから,

$$\frac{\partial(\cancel{\mu},x)}{\partial(\lambda,\cancel{\mu})} \tag{2.17}$$

と重なった変数を斜め線で消す（数式中では斜線が引けないのでスラッシュで消された文字が斜めになっている．以下同様）．つぎに等号 = を書いて, その横に符号 − を書き, その後に消された変数を除いた表示を書き, 全体をかっこでくくって, 消された変数を右下に小さく書く．すなわち,

$$\frac{\partial(\mu,x)}{\partial(\lambda,\mu)} = \frac{\partial(\cancel{\mu},x)}{\partial(\lambda,\cancel{\mu})} = -\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)_\mu \tag{2.18}$$

消す線（消す文字）が斜めならば, マイナス − がつき, 消す線（消す文字）が垂直ならば, マイナスがつかない．

この記憶法によって計算すれば,

$$\frac{\partial(\lambda,y)}{\partial(\lambda,\mu)} = \frac{\partial(\cancel{\lambda},y)}{\partial(\cancel{\lambda},\mu)} = \left(\frac{\partial y}{\partial\mu}\right)_\lambda \tag{2.19}$$

$$\frac{\partial(y,\lambda)}{\partial(\lambda,\mu)} = \frac{\partial(y,\cancel{\lambda})}{\partial(\cancel{\lambda},\mu)} = -\left(\frac{\partial y}{\partial\mu}\right)_\lambda \tag{2.20}$$

であることは明らかであろう．

長々とした説明であったが, この計算法を

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = -1 \tag{1.2}$$

に適用してみよう．

いま $z = z(x,y)$ とすると, ヤコビアンを定義するときには x, y のもう一つ別の関数が欲しいので, それを $t = t(x,y)$ としよう．すなわち

$$z = z(x,y) \tag{2.21}$$

$$t = t(x,y) \tag{2.22}$$

[3]付録 5 にその証明を述べる．

とする．このときヤコビアンがつぎのように定義できる．

$$\begin{aligned}\frac{\partial(z,t)}{\partial(x,y)} &= \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y & \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \\ \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_y & \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_x \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_x - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_y \end{aligned} \tag{2.23}$$

このヤコビアン (2.23) で $t = x$ とすれば,

$$\frac{\partial(z,\cancel{x})}{\partial(\cancel{x},y)} = -\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \tag{2.24}$$

また, (2.23) で $t = y$ とすれば,

$$\frac{\partial(z,\cancel{y})}{\partial(x,\cancel{y})} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \tag{2.25}$$

また

$$\frac{\partial(x,\cancel{y})}{\partial(z,\cancel{y})} = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \tag{2.26}$$

が成り立つことも，ヤコビアンから

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,y)} &= \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \left(\frac{\partial y}{\partial y}\right)_z - \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_y \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \end{aligned} \tag{2.27}$$

が成り立つことからわかる．

ここまで用意すれば,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y &= -\frac{\partial(z,x)}{\partial(x,y)} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \frac{\partial(x,y)}{\partial(z,y)} \\ &= -\frac{\partial(\cancel{z},x)}{\partial(\cancel{z},y)} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \\ &= -\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \\ &= -1 \end{aligned} \tag{1.2}$$

と (1.2) の結果が得られる．上式の 1 行目から 2 行目では，(2.11) の関係を用いた．

これによると -1 が出てきたのは計算の途中で 1 回だけ斜めの線で重なった変数を消す操作 (2.24) があったためであることがわかる．こんなことで Y さんが納得するとは思われないが, 一つの説明にはなっているだろうか.

3　微分係数の多変数への一般化

(1.2) について上の説明はやはり計算の結果であって釈然としない．十分な説明になっているかどうかは別としてつぎのような説明もあるかもしれない.

Y さんが問題にした, 1 変数の場合の微係数（または導関数）についての関係

$$\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dy} = 1 \tag{1.1}$$

に対応した, 多変数の場合の類似式は実は

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = -1 \tag{1.2}$$

ではないというのが, その答である．

『微分と積分』[3] によれば, (1.1) に対応しているのは (1.2) ではなく, 偏微分係数からつくられたヤコビアンである．そして, そのヤコビアンをとれば (1.1) に対応した式が確かに成立している（後出の (3.16) 参照）．詳しいことは上記の本 [3] にあるので, ここではくり返さないが, 多変数の場合の合成関数についてベクトル値関数

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{3.1}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{t}) \tag{3.2}$$

を考えれば,

$$d\mathbf{y} = \mathbf{f}'(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{x}}d\mathbf{x} \tag{3.3}$$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{g}'(\mathbf{t})d\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{t}}d\mathbf{t} \tag{3.4}$$

であるから,

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{t}} = \frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{x}}\frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{t}} \tag{3.5}$$

が得られる．$\frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{x}}$ と $\frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{t}}$ はヤコビアン行列といわれ,

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial t_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

で与えられる．これらの行列の積をつくれば

$$\frac{\partial y_1}{\partial t_1} = \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \cdots + \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1} \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial t_2} = \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \cdots + \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_2} \tag{3.9}$$

$$\vdots$$

等が得られる．これは n 変数の場合の合成関数の微分法の公式であり, チェーン・ルール (chain rule) といわれている．

つぎに関数

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{3.10}$$

とその逆関数

$$\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y}) \tag{3.11}$$

を考えてみよう．関数 $\mathbf{y}$ とその逆関数 $\mathbf{x}$ の微分をとれば

$$d\mathbf{y} = \mathbf{f}'(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{x}}d\mathbf{x} \tag{3.12}$$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{g}'(\mathbf{y})d\mathbf{y} = \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{y}}d\mathbf{y} \tag{3.13}$$

(3.12) の逆写像が存在する条件は

$$\det\left[\frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{x}}\right] \neq 0 \tag{3.14}$$

である．(3.12) と (3.13) から

$$d\mathbf{y} = \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{g}'(\mathbf{y})d\mathbf{y} = \frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{x}}\frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{y}}d\mathbf{y} \tag{3.15}$$

となる．これから

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{x}}\frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{y}} = \mathbf{1} \tag{3.16}$$

が得られる．ここで $\mathbf{1}$ は単位行列である．この (3.16) は 1 変数の場合の

$$\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dy} = 1 \tag{1.1}$$

の一般化になっている．

4　おわりに

2 節では (1.2) の右辺の -1 がどうして出てきたのかの直観的な説明をした．また 3 節では Y さんの疑問は本来比べるべきでないもの, (1.1) と (1.2) を比べていたということを述べた．1 変数の (1.1) に対応した n 変数の式は (3.16) である．こうして 1 変数の微係数の n 変数への一般化は偏微分係数からつくられたヤコビアンであることがわかる．

[追補]
『微分と積分』[3] には微分の意味について, 関数の「局所 1 次関数近似」であると述べており, その本質的な点が詳述されているが, その点はこのエッセイではあまり触れていない．宮本氏 [3] によれば, この微分の意味をはじめて明確に述べたのは森毅氏の著書 [4][5] であったという．　(2006.3.3)(2017.9.2 改訂)

5　付録　定理 1-3 の証明

5.1　定理 1 の証明

[定理 1] の証明はヤコビアン (2.3) の定義より明らかであるが，ヤコビアンの行列式の中の偏導関数をそれぞれ

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)_\mu = a, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)_\lambda = b, \quad \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)_\mu = c, \quad \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)_\lambda = d \tag{5.1}$$

とおけば

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\lambda,\mu)} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial(y,x)}{\partial(\lambda,\mu)} = \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\frac{\partial(x,y)}{\partial(\lambda,\mu)} \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\mu,\lambda)} = \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\frac{\partial(x,y)}{\partial(\lambda,\mu)} \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial(y,x)}{\partial(\mu,\lambda)} = \begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\lambda,\mu)} \tag{2.4}$$

これで (2.4)，すなわち，[定理 1] が証明された．

5.2　定理 2 の証明

ヤコビアンの定義 (2.3) で $y = \mu$ とすれば

$$\frac{\partial(x,\mu)}{\partial(\lambda,\mu)} = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)_\mu \left(\frac{\partial \mu}{\partial \mu}\right)_\lambda - \left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)_\lambda \left(\frac{\partial \mu}{\partial \lambda}\right)_\mu \tag{5.3}$$

であるが，λ と μ とが独立であることに注意すれば

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial \mu}\right)_\lambda = 1, \quad \left(\frac{\partial \mu}{\partial \lambda}\right)_\mu = 0$$

であるから

$$\frac{\partial(x,\mu)}{\partial(\lambda,\mu)} = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)_\mu = -\frac{\partial(\mu,x)}{\partial(\lambda,\mu)} \tag{2.5}$$

が成り立つ．

同様に，ヤコビアンの定義 (2.3) で $x = \lambda$ とすれば

$$\frac{\partial(\lambda,y)}{\partial(\lambda,\mu)} = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \lambda}\right)_\mu \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)_\lambda - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \mu}\right)_\lambda \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)_\mu \tag{5.4}$$

であるが，λ と μ とが独立であることに注意すれば

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \lambda}\right)_\mu = 1, \quad \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \mu}\right)_\lambda = 0$$

であるから

$$\frac{\partial(\lambda,y)}{\partial(\lambda,\mu)} = \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)_\lambda = -\frac{\partial(y,\lambda)}{\partial(\lambda,\mu)} \tag{2.6}$$

が成り立つ．(2.5), (2.6)，すなわち，[定理 2] が証明された．

5.3　定理 3 の証明

[定理 3] の証明として

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(\lambda,\mu)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\lambda,\mu)} \tag{2.11}$$

を証明する．まずヤコビアンの定義を使うと左辺は

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(\lambda,\mu)} = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_v & \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_u \\ \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_v & \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_u \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right)_\mu & \left(\frac{\partial u}{\partial \mu}\right)_\lambda \\ \left(\frac{\partial v}{\partial \lambda}\right)_\mu & \left(\frac{\partial v}{\partial \mu}\right)_\lambda \end{vmatrix} \tag{5.5}$$

となる．ここで偏導関数を

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_v = e, \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_u = f, \qquad \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_v = g, \qquad \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_u = h,$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right)_\mu = A, \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial \mu}\right)_\lambda = B, \qquad \left(\frac{\partial v}{\partial \lambda}\right)_\mu = C, \qquad \left(\frac{\partial v}{\partial \mu}\right)_\lambda = D$$

と表せば

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(\lambda,\mu)} &= \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} eA + fC & eB + fD \\ gA + hC & gB + hD \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{5.6}$$

(5.6) の最後の 4 つの等式

$$a = eA + fC, \tag{5.7}$$
$$b = eB + fD, \tag{5.8}$$
$$c = gA + hC, \tag{5.9}$$
$$d = gB + hD \tag{5.10}$$

が成り立つことはつぎのように示される．

まず μ を一定として，$x = x(u(\lambda,\mu), v(\lambda,\mu))$ を λ で偏微分すれば，λ は u にも v にも含まれることに注意して

$$a = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)_\mu = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_v \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right)_\mu + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_u \left(\frac{\partial v}{\partial \lambda}\right)_\mu = eA + fC \tag{5.7}$$

が成り立つ．

つぎに，λ を一定として，$x = x(u(\lambda,\mu), v(\lambda,\mu))$ を μ で偏微分すれば，μ は u にも v にも含まれることに注意して

$$b = \left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)_\lambda = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_v \left(\frac{\partial u}{\partial \mu}\right)_\lambda + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_u \left(\frac{\partial v}{\partial \mu}\right)_\lambda = eB + fD \tag{5.8}$$

が成り立つ．

同様に，$y = y(u(\lambda,\mu), v(\lambda,\mu))$ を λ と μ の関数と考え，μ を一定として λ で偏微分すれば，λ は u にも v にも含まれることに注意して

$$c = \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)_\mu = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_v \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right)_\mu + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_u \left(\frac{\partial v}{\partial \lambda}\right)_\mu = gA + hC \tag{5.9}$$

が成り立つ．

最後に λ を一定として，$y = y(u(\lambda,\mu), v(\lambda,\mu))$ を μ で偏微分すれば，μ は u にも v にも含まれることに注意して

$$d = \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)_\lambda = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_v \left(\frac{\partial u}{\partial \mu}\right)_\lambda + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_u \left(\frac{\partial v}{\partial \mu}\right)_\lambda = gB + hD \tag{5.10}$$

が成り立つ．

したがって，(5.2) と (5.6) から (2.11)，すなわち，[定理 3] が成り立つことが証明された．

6　補遺 1

このエッセイが完成してから，世戸憲治さんから以下のようなコメントを頂いた．ここに記して世戸さんに感謝します．

> 矢野さんが書かれた 2 変数関数の微分に関する公式ですが，これはいままで私も知りませんでしたが，大変おもしろい式ですね．ただ，この式の証明ですが，私の考えでは，ほんの数行の式で証明ができてしまいます．
>
> 2 変数の関数
>
> $$z = f(x, y) \tag{6.1}$$
>
> があるものとする．これを y を一定として，z を x で微分すると
>
> $$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = \frac{\partial f}{\partial x} \tag{6.2}$$

が得られる．つぎに，z を一定とし，x を y の関数と考えて (6.1) を y で微分すると，

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} \tag{6.3}$$

これから，

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}} \tag{6.4}$$

が得られる．最後に x を一定とし，y を z の関数と考えて，(6.1) を z で微分すると，

$$1 = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} \tag{6.5}$$

から

$$\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}} \tag{6.6}$$

が得られる．これらの (6.2),(6.4),(6.6) をかけ合わせると

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -1 \tag{1.2}$$

が求められる.（世戸憲治）

7　補遺 2

世戸さんからの補遺 1 に示したようなコメントを頂いたので，この (1.2) をどのように導びいているかを調べてみた [6].

3 つの変数の間に

$$f(x, y, z) = 0 \tag{7.1}$$

が成り立つ場合には，その全微分 $df = 0$ が成り立つ．すなわち，

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0 \tag{7.2}$$

が成り立つ.

$x =$ 一定 のとき，$dx = 0$ が成り立つので

$$\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)} \tag{7.3}$$

$y =$ 一定 のとき，$dy = 0$ が成り立つので

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} \tag{7.4}$$

$z =$ 一定 のとき，$dz = 0$ が成り立つので

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)} \tag{7.5}$$

(7.3),(7.4),(7.5) の 3 つの積をつくれば，

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)} \cdot \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)} \cdot \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} = -1 \tag{1.2}$$

となり，確かに (1.2) が成り立っている．これは多分 Y さんも行った計算法であろうと思われる．ただ，彼は計算の結果ではなく根本的な疑問をもっていた．

(1.2) に対して，具体的に考えてみれば，ある物質のもつ性質として，熱力学でその圧力 p，体積 V，絶対温度 T の間には一つの関係式が存在する．それを $f(p,V,T)=0$ とすれば，

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = -1$$

が成り立っている．この結果は実験的にも確かめられているという．

参考文献

[1] 矢野　忠，なぜ $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = 1$ でないのか,『研究と実践』（愛数協），92 号 (2006.10) 8-13

[2] 池田和義,『基礎熱力学』（朝倉書店, 1991）87-90.

[3] 松田信行, 宮本敏雄,『微分と積分』（講談社, 1982）

[4] 森　毅,『現代の古典解析』（日本評論社, 1985)

[5] 森　毅,『ベクトル解析』（日本評論社, 1989)

[6] マージナウ・マーフィ（佐藤次彦・国宗眞　訳）,『物理学と化学のための数学 I』（改訂版）（共立出版，1959）6-8

編集後記

7巻6号に続けて，7巻7号を発行する．さらに，8号も続けて発行できるかと8月中には思ったりしていたが，どうもこの9月はこの7号で手一杯である．さらに8号を続けて発行する余力は残っていない．こういうことがあってもいいだろう．

ようやく夏の暑さが少し陰ってきたという感じがする．6月には午後7時でもまだ明るかったが，いまでは午後7時になると少し暗くなっている．ということは日照時間がだんだん減ってきているということだ．

秋風らしい風はまだ吹いてはいないが，これから秋めいていくだろう．一日の最低気温が25度をきるようになると涼しく感じる．まだ一日の最高気温が30度を記録してはいても．つぎの号の発行は12月を予定している．ご投稿をお願いします．

（矢野　忠）