数学・物理通信

7巻8号　　2017年12月

編集　新関章三・矢野　忠

2017 年 12 月 1 日

目次(Contents)

倍角サイン・コサインの冪乗の有限和

Finite Sum over a Power of Sines/Cosines for Multiple Angles

中 西　襄 [1]

Noboru NAKANISHI [2]

1　はじめに

この論文では，N，n を任意の正の整数とするときの有限級数

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_n(N,x) &\equiv \sum_{r=1}^{N}[\sin(rx)]^n, \\ \mathcal{C}_n(N,x) &\equiv \sum_{r=1}^{N}[\cos(rx)]^n\end{aligned} \tag{1.1}$$

の和公式を与える．

森口繁一ほか著「数学公式 II」（岩波全書）を眺めると，p.17-p.20 に次のような有限級数和の公式が載っている．

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{N}\sin(rx) &= \frac{\sin((N+1)x/2)\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)}, \\ \sum_{r=1}^{N}[\sin(rx)]^2 &= \frac{N}{2} - \frac{\cos((N+1)x)\sin(Nx)}{2\sin x}, \\ \sum_{r=1}^{N}[\sin(rx)]^3 &= \frac{3}{4}\cdot\frac{\sin((N+1)x/2)\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)} - \frac{1}{4}\cdot\frac{\sin(3(N+1)x/2)\sin(3Nx/2)}{\sin(3x/2)}, \\ \sum_{r=1}^{N}[\sin(rx)]^4 &= \frac{3N}{8} - \frac{\cos((N+1)x)\sin(Nx)}{2\sin x} + \frac{\cos(2(N+1)x)\sin(2Nx)}{8\sin(2x)};\end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{N}\cos(rx) &= \frac{\cos((N+1)x/2)\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)}, \\ \sum_{r=1}^{N}[\cos(rx)]^2 &= \frac{N}{2} + \frac{\cos((N+1)x)\sin(Nx)}{2\sin x}, \\ \sum_{r=1}^{N}[\cos(rx)]^3 &= \frac{3}{4}\cdot\frac{\cos((N+1)x/2)\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)} + \frac{1}{4}\cdot\frac{\cos(3(N+1)x/2)\sin(3Nx/2)}{\sin(3x/2)}, \\ \sum_{r=1}^{N}[\cos(rx)]^4 &= \frac{3N}{8} + \frac{\cos((N+1)x)\sin(Nx)}{2\sin x} + \frac{\cos(2(N+1)x)\sin(2Nx)}{8\sin(2x)}.\end{aligned} \tag{1.3}$$

[1] 京都大学名誉教授

[2] nbr-nak@trio.plala.or.jp

一見複雑でとても一般の n に対する公式が書けそうに思えないが，よく調べてみるとそれほど手に負えないこともないことがわかる．例えば，(1.2) の上 2 行の $\mathcal{S}_1(N,x)$，$\mathcal{S}_2(N,x)$ の式を使うと，(1.2) の下 2 行は，

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_3(N,x) &= \frac{3}{4}\mathcal{S}_1(N,x) - \frac{1}{4}\mathcal{S}_1(N,3x), \\ \mathcal{S}_4(N,x) &= \mathcal{S}_2(N,x) - \frac{1}{4}\mathcal{S}_2(N,2x) \end{aligned} \tag{1.4}$$

と書くことができる．さらに，(1.3) の第 1 式に注意すれば，

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2(N,x) &= \frac{N}{2} - \frac{1}{2}\mathcal{C}_1(N,2x), \\ \mathcal{S}_4(N,x) &= \frac{3N}{8} - \frac{1}{2}\mathcal{C}_1(N,2x) + \frac{1}{8}\mathcal{C}_1(N,4x) \end{aligned} \tag{1.5}$$

のようにして，すべて $\mathcal{S}_1$ と $\mathcal{C}_1$ でもって書き表すことができる．

2　$n = 1, 2$ の場合の証明

ウオーミングアップに $n = 1, 2$ の場合の証明を与える．使う道具は，三角関数の積和公式

$$\begin{aligned} \sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)], \\ \cos\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)], \\ \cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)] \end{aligned} \tag{2.1}$$

と半角公式

$$\begin{aligned} (\sin\alpha)^2 &= \frac{1}{2}[1 - \cos(2\alpha)], \\ (\cos\alpha)^2 &= \frac{1}{2}[1 + \cos(2\alpha)] \end{aligned} \tag{2.2}$$

である．

まず，$n = 1$ の場合を考える．積和公式 (2.1) の第 1 式を用いると，

$$\begin{aligned} \sin(x/2)\mathcal{S}_1(N,x) &= \sum_{r=1}^{N} \sin(x/2)\sin(rx) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N}\big[\cos\big((r-1/2)x\big) - \cos\big((r+1/2)x\big)\big] \\ &= \frac{1}{2}\big[\cos(x/2) - \cos\big((N+1/2)x\big)\big] \\ &= \sin\big((N+1)x/2\big)\sin(Nx/2) \end{aligned} \tag{2.3}$$

となるから，これから $\mathcal{S}_1(N,x)$ の公式

$$\mathcal{S}_1(N,x) = \frac{\sin\big((N+1)x/2\big)\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)} \tag{2.4}$$

を得る．同様に（ただし積和公式 (2.1) の第 2 式を用いて），$\mathcal{C}_1(N,x)$ の公式

$$\mathcal{C}_1(N,x) = \frac{\cos\big((N+1)x/2\big)\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)} \tag{2.5}$$

を得る．

$n=2$ の場合は，半角公式 (2.2) を用いると，

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_2(N,x) &= \frac{1}{2}\big[N-\mathcal{C}_1(N,2x)\big],\\ \mathcal{C}_2(N,x) &= \frac{1}{2}\big[N+\mathcal{C}_1(N,2x)\big]\end{aligned} \tag{2.6}$$

を得る．もちろん，$\mathcal{S}_2(N,x)+\mathcal{C}_2(N,x)=N$ はピタゴラスの定理から明らかである．

3　補助定理

一般の場合の証明の基礎になるのが次の公式である．

$$(1\pm\cos\alpha)^k=\frac{1}{2^{k-1}}\Big[\frac{{}_{2k}C_k}{2}+\sum_{j=0}^{k-1}(\pm1)^{k-j}{}_{2k}C_j\cos\big((k-j)\alpha\big)\Big]. \tag{3.1}$$

ここにもちろん ${}_nC_m\equiv n!/m!(n-m)!$ である．(3.1) の右辺の形は少し見苦しいと感ずる人は，コサインが偶関数であることを用いて次のように書き直してもよい．

$$(1\pm\cos\alpha)^k=\frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{2k}(\pm1)^{k-j}{}_{2k}C_j\cos\big((k-j)\alpha\big). \tag{3.2}$$

k に関する数学的帰納法を用いて (3.1) を証明する．$k=1$ の場合は自明の式になるので，(3.1) が成立するとして $(1\pm\cos\alpha)^{k+1}$ を計算する．

$$\begin{aligned}(1\pm\cos\alpha)^{k+1} &= \frac{1}{2^{k-1}}\Big[\frac{{}_{2k}C_k}{2}+\sum_{j=0}^{k-1}(\pm1)^{k-j}{}_{2k}C_j\cos\big((k-j)\alpha\big)\Big](1\pm\cos\alpha)\\ &= \frac{1}{2^k}\Big[{}_{2k}C_k+2\sum_{j=0}^{k-1}(\pm1)^{k-j}{}_{2k}C_j\cos\big((k-j)\alpha\big)\pm{}_{2k}C_k\cos\alpha+R_k(\alpha)\Big],\end{aligned} \tag{3.3}$$

ただし最後の項は，積和公式 (2.1) の第 3 式を使って，

$$R_k(\alpha)\equiv\sum_{j=0}^{k-1}(\pm1)^{k-j+1}{}_{2k}C_j\big[\cos\big((k-j+1)\alpha\big)+\cos\big((k-j-1)\alpha\big)\big] \tag{3.4}$$

である．

(3.3) の角括弧内を計算する．まず定数項は，第 1 項と (3.4) の第 2 和の中の $j=k-1$ 項との和だから，

$$\begin{aligned}{}_{2k}C_k+{}_{2k}C_{k-1} &= \frac{(2k)!}{(k+1)!k!}[(k+1)+k]\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{(2k+2)!}{(k+1)!^2}\\ &= \frac{{}_{2k+2}C_{k+1}}{2}\end{aligned} \tag{3.5}$$

となる．

残りの項を計算する前に，次の公式を示しておく．

$$2\cdot{}_{2k}C_{j-1}+{}_{2k}C_j+{}_{2k}C_{j-2}={}_{2k+2}C_j. \tag{3.6}$$

(3.6) の左辺は，

$$\frac{(2k)!}{(2k-j+2)!j!}[2(2k-j+2)j+(2k-j+2)(2k-j+1)+j(j-1)] \tag{3.7}$$

であるが，この角括弧内は $(2k+1)(2k+2)$ に等しいから，(3.7) は (3.6) の右辺に等しい．

さて，次に (3.3) の右辺の角括弧内の $\cos\alpha$ の係数を調べる．これは次の 3 つの寄与，すなわち和の中の $j=k-1$ 項，次の単独項，そして (3.4) の第 2 和の中の $j=k-2$ 項がある．これを書きだすと，

$$\pm(2\cdot {}_{2k}C_{k-1}+{}_{2k}C_k+{}_{2k}C_{k-2})=\pm{}_{2k+2}C_k \tag{3.8}$$

を得る．ただし (3.6) の $j=k$ の場合を用いた．

(3.3) の右辺の角括弧内の残りは，

$$\begin{aligned}
&2\sum_{j=0}^{k-2}(\pm1)^{k-j}{}_{2k}C_j\cos\bigl((k-j)\alpha\bigr)\\
&\quad+\sum_{j=0}^{k-1}(\pm1)^{k-j+1}{}_{2k}C_j\cos\bigl((k-j+1)\alpha\bigr)\\
&\quad+\sum_{j=0}^{k-3}(\pm1)^{k-j-1}{}_{2k}C_j\cos\bigl((k-j-1)\alpha\bigr)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

である．第 1 行の j を 1 だけ，第 3 行の j を 2 だけずらすと，(3.9) は

$$\sum_{j=0}^{k-1}(\pm1)^{k-j+1}(2\cdot {}_{2k}C_{j-1}+{}_{2k}C_j+{}_{2k}C_{j-2})\cos\bigl((k-j+1)\alpha\bigr) \tag{3.10}$$

と書き直される．ただし，負整数の階乗の逆数はゼロであることを用いた．公式 (3.6) により，(3.10) は

$$\sum_{j=0}^{k-1}(\pm1)^{k-j+1}{}_{2k+2}C_j\cos\bigl((k-j+1)\alpha\bigr) \tag{3.11}$$

となる．

(3.5),(3.8),(3.11) を (3.3) の右辺に代入すれば，

$$(1\pm\cos\alpha)^{k+1}=\frac{1}{2^k}\Bigl[\frac{{}_{2k+2}C_{k+1}}{2}+\sum_{j=0}^{k}(\pm1)^{k+1-j}{}_{2k+2}C_j\cos\bigl((k+1-j)\alpha\bigr)\Bigr] \tag{3.12}$$

を得る．これは (3.1) の k を $k+1$ に置き換えた式である．よって帰納法が完結した．

4　級数和の公式

まず，n が偶数 $2k$ の場合を考える．半角公式 (2.2) により，

$$\mathcal{S}_{2k}(N,x)=\sum_{r=1}^{N}[\sin^2(rx)]^k=\frac{1}{2^k}\sum_{r=1}^{N}[1-\cos(2rx)]^k \tag{4.1}$$

である．公式 (3.1) を用いると，

$$\mathcal{S}_{2k}(N,x)=\frac{{}_{2k}C_k}{2^{2k}}N+\frac{1}{2^{2k-1}}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{k-j}{}_{2k}C_j\sum_{r=1}^{N}\cos\bigl(2r(k-j)x\bigr) \tag{4.2}$$

となる．したがって，級数和の公式

$$\mathcal{S}_{2k}(N,x) = \frac{{}_{2k}C_k}{2^{2k}}N + \frac{1}{2^{2k-1}}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{k-j}{}_{2k}C_j \cdot \mathcal{C}_1\big(N, 2(k-j)x\big) \tag{4.3}$$

を得る．ここに，$\mathcal{C}_1$ は (2.5) で与えられる．同様にして，級数和の公式

$$\mathcal{C}_{2k}(N,x) = \frac{{}_{2k}C_k}{2^{2k}}N + \frac{1}{2^{2k-1}}\sum_{j=0}^{k-1}{}_{2k}C_j \cdot \mathcal{C}_1\big(N, 2(k-j)x\big) \tag{4.4}$$

が得られる．

n が奇数 $2k+1$ の場合を考える．

$$\mathcal{S}_{2k+1}(N,x) = \sum_{r=1}^{N}\sin(rx)[\sin^2(rx)]^k = \frac{1}{2^k}\sum_{r=1}^{N}\sin(rx)[1-\cos(2rx)]^k \tag{4.5}$$

に公式 (3.1) を代入し，積和公式 (2.1) の第 2 式を用いると，

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{2k+1}(N,x) &= \frac{1}{2^{2k}}\Big[{}_{2k}C_k \cdot \mathcal{S}_1(N,x) + \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{k-j}{}_{2k}C_j\big(\mathcal{S}_1\big(N,(2k-2j+1)x\big) \\ &\qquad\qquad - \mathcal{S}_1\big(N,(2k-2j-1)x\big)\big)\Big] \\ &= \frac{1}{2^{2k}}\Big[\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}({}_{2k}C_{j-1} + {}_{2k}C_j)\mathcal{S}_1\big(N,(2k-2j+1)x\big) \\ &\qquad\qquad + (-1)^k\mathcal{S}_1\big(N,(2k+1)x\big)\Big]\end{aligned} \tag{4.6}$$

となる．(3.5) と同様にして，

$${}_{2k}C_{j-1} + {}_{2k}C_j = {}_{2k+1}C_j \tag{4.7}$$

であるから，結局，級数和の公式

$$\mathcal{S}_{2k+1}(N,x) = \frac{1}{2^{2k}}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}{}_{2k+1}C_j \cdot \mathcal{S}_1\big(N,(2k-2j+1)x\big) \tag{4.8}$$

が得られる．ここに $\mathcal{S}_1$ は (2.4) で与えられる．

同様にして（ただし積和公式の第 3 式を用いて），級数和の公式

$$\mathcal{C}_{2k+1}(N,x) = \frac{1}{2^{2k}}\sum_{j=0}^{k}{}_{2k+1}C_j \cdot \mathcal{C}_1\big(N,(2k-2j+1)x\big) \tag{4.9}$$

が得られる．

5 おわりに

有限級数の和 (1.1) は，n が偶数の場合は (4.3) と (4.4) で，奇数の場合は (4.8) と (4.9) で与えられることがわかった．このうち，コサインの公式は (3.2) で注意した変形を用いると，偶奇の区別なく n のままで公式をまとめることができる．$\mathcal{C}_1(N,x)$ が x の偶関数であることと，$\mathcal{C}_1(N,0) = N$ に注意すると，(4.4) と (4.9) は

$$\mathcal{C}_n(N,x) = \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n}{}_nC_j \cdot \mathcal{C}_1\big(N,(n-2j)x\big) \tag{5.1}$$

とまとめられる．(5.1) は形が二項定理と酷似している．じっさい，$x=0$ のときは，$\mathcal{C}_n(N,0)=N$ により，$2^n=\sum_{j=0}^n {}_nC_j$ になる．

サインの場合は $\mathcal{S}_1$ と $\mathcal{C}_1$ の両方が現れるので，n の式にまとめるのには少し工夫が要る．(2.5) を (5.1) に代入すると，

$$\mathcal{C}_n(N,x)=\frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^n {}_nC_j\cdot\frac{\cos\bigl((n-2j)(N+1)x/2\bigr)\sin\bigl((n-2j)Nx/2\bigr)}{\sin\bigl((n-2j)x/2\bigr)} \tag{5.2}$$

となる．これに対し $\mathcal{S}_n$ の公式は，

$$\mathcal{S}_n(N,x)=\frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^n {}_nC_j\cdot\frac{\cos\bigl((n-2j)\{(N+1)x-\pi\}/2\bigr)\sin\bigl((n-2j)Nx/2\bigr)}{\sin\bigl((n-2j)x/2\bigr)} \tag{5.3}$$

と書くことができる．

微分の対数の代数的定義

Algebraic Definition of Logarithm of Differentiation

浅田 明 [1]

Akira ASADA[2]

はじめに

これは「δ-関数等の分数冪微分と微分の対数の計算」(数学・物理通信 **7-2** (2017) 13-22) [7] の補足ですが,中西先生の「非整数階微分の新しい定義」(数学・物理通信 **7-6** (2017) 2-7) [12] に影響された所もあります.

[12] で指摘されているように非整数階微分の定義域にはいろいろ問題がある.例えば整数でない a を固定しても $\mathbb{C}[x^a]$ でさえ $\dfrac{d^a}{dx^a}$ の作用で閉じていない.これに反し $\log x$ の多項式環 $\mathbb{C}[\log x]$ は

$$\begin{aligned}\log\Big(\frac{d}{dx}\Big)(\log x)^m =& -(\log x+\gamma)(\log x)^m+\\ &+\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(-1)^{m-n-1}m!\zeta(m-n+1)}{n!}(\log x)^n\end{aligned}$$

だから $\log\Big(\dfrac{d}{dx}\Big)$ の作用で閉じている.

$\log x$ の冪級数については　$f(x)$ が有限指数型:;$f(x)=\sum_n c_nx^n$ として $|c_n|\le M\dfrac{L^n}{n1}$, $M>0, L>0$ となる関数のとき　$L<1$ であれば $\log\Big(\dfrac{d}{dx}\Big)f(\log x)$ が存在することがしめされる.しかし

$$\log\Big(\frac{d}{dx}\Big)x^c=-\log x\cdot x^c+\psi(1+c)x^c,$$

だから $L\ge 1$ であれば $\log\Big(\dfrac{d}{dx}\Big)f(\log x)$ の存在はわからない.ただし　$f(x)$ が有限指数型であれば $f_t(x)=f(tx)$ として $|t|$ が小さければ $\log(\frac{d}{dx})f_t(x)$ は存在する.よって t についての解析接続を使って $\log\Big(\dfrac{d}{dx}\Big)f(\log x)$ を定義することができる.実際 $\log\Big(\dfrac{d}{dx}\Big)x^c$ は c が負の整数でなければ定義できる.さらに

$$\frac{d^a}{dx^a}=e^{a\log(\frac{d}{dx})},\quad x^c=e^{c\log x},$$

を使えば

$$\frac{d^a}{dx^a}x^c=\frac{\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+c-a)}x^{c-a}$$

も導ける.ただしこの計算では　積分変換

$$\mathcal{R}[f(s)](x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^s}{\Gamma(1+s)}f(s)ds$$

をつかい,公式

$$\log\Big(\frac{d}{dx}\Big)\mathcal{R}[f(s)](x)=\mathcal{R}\Big[\frac{df(s)}{ds}\Big](x),\quad \mathcal{R}[\delta_c]=\frac{x^c}{\Gamma(1+c)},$$

を利用するので $\log\Big(\dfrac{d}{dx}\Big)(\log x)^n$ の公式だけで得られたのではない.この公式だけから $\exp\Big(a\log\Big(\dfrac{d}{dx}\Big)\Big)x^c=\dfrac{\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+c-a)}x^{c-a}$ を導くのはかなり面倒な計算問題だろうと思われる.

---

[1]元信州大学

[2]asada-a@poporo.ne.jp

$\dfrac{d^a}{dx^a} = \exp(a\log\Big(\dfrac{d}{dx}\Big))$ と定義すれば非整数階微分についてかなり望ましい性質がえられるが，これが有効な関数の範囲は狭い．x^c, $|c| \geq 1$ 程度の関数でも非整数階微分の定義には解析接続が入ってくる．これが一般の非整数階微分の性質が (12) での要請をみたさず煩雑な理由とも見られるが，他方この煩雑性を利用して（定数係数）非整数階微分方程式の解が構成出来る ([3],[4]) のでやむをえない所もある．

$\mathbb{C}[\log x]$ の上の作用素として

$$\log\Big(\frac{d}{dx}\Big) = -(\log x + \gamma) + N_{\log}$$

とおけば $N_{\log}$ は一般冪零作用素だから $\log\Big(\dfrac{d}{dx}\Big) + \log x$ は逆をもつ．また分数幂も定義できる．$N_{\log}$ を変形消滅作用素，$\log xI$ を変形生成作用素と見ることもでき交換子の計算も行ったが，あまり役にたちそうにない．なお最後の節で $\dfrac{1}{\log x}$ の計算をこころみたが，

$$\log\Big(\frac{d}{dx}\Big)\Big(\frac{1}{\log x}\Big) = -\int_0^\infty x^s \psi(1+s)ds, \quad 0 < x < 1$$

という中間的な結果で終わっている．

目次

1 $\log\Big(\dfrac{d}{dx}\Big)$ についての準備

分数幂（非整数階）微分の集合 $\{\dfrac{d^a}{dx^a}|a \in \mathbb{R}\}$ が 1 係数群として良い働く（超）関数の空間 $\mathcal{F}$ を調べるのは重要な問題である．例えば [12] で導入された空間 $\mathcal{G}$ にミッターハ・レフラー関数が含まれるかは定数係数の非整数幂微分方程式への応用をかんがえる上で大事な問題になる．

普通非整数幂微分の定義域としては 1 価の（超）関数を考えるが，$f(x)$ が整関数などであれば a が 0 または正の整数でないとき

$$\frac{d^a f(x)}{dx} = \frac{x^a}{\Gamma(1-a)}\big(f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}a}{(n-a)n!}(x^n \frac{d^n}{dx^n})f(x)\big),$$

となるから $f(x)$ が負の実軸でも定義されていれば $\dfrac{d^a}{dx^a}f(x)$ は多価関数になる．従って多価関数を定義域にすることは意味がある．例えば a が無理数のとき

$$\mathbb{C}[x^a, x^{-a}] = \{\sum_{n=-N}^{M} c_n x^{na}| -\infty < -N < m < \infty\}$$

とすれば

$$\frac{d^{na}}{dx^{na}}x^{ma} = \frac{\Gamma(1+(m-n)a)}{\Gamma(1+ma)}x^{(m-n)a},$$

$\mathbb{Z} \cong \{\dfrac{d^{an}}{dx^{an}} | n \in \mathbb{Z}\}$ は $\mathbb{C}[x^a, x^{-a}]$ は $\mathbb{C}[x^a, x^{-a}]$ に $\mathbb{Z}$-作用として働く．しかしこの例は　a に関係するし $\mathbb{R}$-作用ではない．そこで定義域として　まず $\log x$ の多項式の空間 $\mathbb{C}[\log x]$ を取り，分数冪微分でなく分数冪微分の１ー係数群の生成作用素である微分の対数 $\log(\dfrac{d}{dx})$ ([1],[11]) の作用を考える．

便宜のため　数学・物理通信 **7-2** の「δ-関数等の分数冪微分と微分の対数の計算」とかさなるが，簡単に微分の対数についてまとめておく．

積分変換 $\mathcal{R}$;　 $\mathcal{R}[f(s)](x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^s}{\Gamma(1+s)} f(s)ds$ を用いると

$$\log\quad \Big(\frac{d}{dx}\Big)\mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{R}\Big[\frac{df(s)}{ds}\Big](x),$$

となる．また $\mathcal{R}[\delta_c](x) = \dfrac{x^c}{\Gamma(1+c)}$， $\delta_c = \delta(x-c)$, だから c が負の整数でなければ

$$\begin{aligned}\log\Big(\frac{d}{dx}\Big)x^c &= \Gamma(1+c)\mathcal{R}[\delta_c'](x) = -\Gamma(1+c)\frac{d}{ds}\Big(\frac{x^s}{\Gamma(1+c)}\Big)|_{s=c} \\ &= -\log x \cdot x^c + \psi(1+c)x^c, \end{aligned} \tag{1}$$

$\psi(1+c) = \dfrac{\Gamma'(1+c)}{\Gamma(1+c)}$ である．また $\dfrac{\partial^m}{\partial c^m} x^c|_{c=0} = (\log x)^m$ だから

$$\log(\frac{d}{dx})(\log x)^m = \frac{\partial^m}{\partial c^m}(\log(d)dx)x^c)|_{c=0}$$

である．これと $\psi(1+c) = -\gamma + \sum_{k\geq 2}(-1)^k\zeta(k)c^{k-1}$ を使えば

$$\begin{aligned}\log\Big(\frac{d}{dx}\Big)(\log x)^m =& -(\log x+\gamma)(\log x)^m + \\ &+\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(-1)^{m-n-1}m!\zeta(m-n+1)}{n!}(\log x)^n \end{aligned} \tag{2}$$

が得られる．

(2) から $\log\Big(\dfrac{d}{dx}\Big) : \mathbb{C}[\log x] \to \mathbb{C}[\log x]$ だが　さらに $\log x$ の冪級数（$\mathbb{C}\setminus\{0\}$ の普遍被覆空間上の正則関数）にまで $\log\Big(\dfrac{d}{dx}\Big)$ を定義できるか調べる．

$k \geq 2$ であれば $|\zeta(k)| \leq \zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$ だから

補題１．数列 b_m が $|b_n| \leq \dfrac{ML^m}{m!}, |L| < 1$ であれば

$$\sum_{m\geq n} |m! b_m \zeta(m-n+1)| \leq \frac{M\pi^2}{6(1-|L|)} \tag{3}$$

がすべての n について成立する．

定理 1．$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$, $|b_m| \leq \dfrac{ML^m}{m!}$, $L<1$ であれば $\log(\frac{d}{dx})f(\log x)$ は存在する．

証明．仮定と (2) から

$$\begin{aligned}\log\Big(\frac{d}{dx}\Big)\Big(\sum_{m=0}^{\infty} b_m(\log x)^m\Big) &= \sum_{m=0}^{\infty} b_m\Big(\log\Big(\frac{d}{dx}\Big)(\log x)^m\Big) \\ = -(\log x+\gamma)f(\log x) &+ \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sum_{n=0}^{m-1}\frac{(-1)^{m-n-1}m!\zeta(m-n+1)}{n!}(\log x)^n \\ = -(\log x+\gamma)f(\log x) &+ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m\geq n}\frac{(-1)^{m-n-1}b_m m!\zeta(m-n-1)}{n!}(\log x)^n \end{aligned}$$

である．さらに補題 1 から

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m\geq n}\left|\frac{(-1)^{m-n-1}b_m m!\zeta(m-n+1)}{n!}\right||\log x|^n\\ \leq&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{M\pi^2}{6(1-L)}|\log x|^n\end{aligned} \tag{4}$$

となるから定理が得られる．

注意．$x^{-1}=e^{-\log x}$ だから定理の仮定 $L<1$，は (1) によりこれ以上改良できない．

$f(x)$ が有限指数型であっても $\log(\frac{d}{dx})f(\log x)$ は必ずしも定義できないが $f_t(x)=f(tx)$ とすれば $f_t(\log x)=f(t\log x)$ は $|t|$ が充分小さければ $\log(\dfrac{d}{dx})f_t(\log x)$ は存在する．

定義 1．$f_t(\log x)$ は t,x の関数として解析的だから $\log(\frac{d}{dx})f_t(\log x)$ が $t=1$, $x=c$ まで解析接続されればその値で $\log(\dfrac{d}{dx})f(\log x)$ を定義する．

なお (1) から冪級数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ については（形式的冪級数）

$$\log\left(\frac{d}{dx}\right)f(x)=-\log x\cdot f(x)+\sum_{n=0}^{\infty}c_n\psi(1+n)x^n$$

となるが，$\psi(1+n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\gamma=O(\log n), n\to\infty$ だから $f(x)$ が $|x|<r$ で収束すれば $(\log(\frac{d}{dx})+\log x)f(x)$ は $|x|<r$ で収束する．

2 $\log\left(\dfrac{d}{dx}\right)$ の代数的定義

$\mathbb{C}[\log x]$ を $\log x$ の多項式の空間とし $1,\log x,\ldots,(\log x)^n$ で張られるその部分ベクトル空間を $[\log x]_n$ とする．(1) から $\mathbb{C}[\log x]$ では $\log\left(\dfrac{d}{dx}\right)$ は

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{d}{dx}\right)(\log x)^n=&-(\log x+\gamma)(\log x)^n+\\&+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k+1}n!\zeta(n-k+1)}{k!}(\log x)^k\end{aligned}$$

で代数的に定義できる．特に

$$\log\left(\frac{d}{dx}\right)1=-(\log x+\gamma).$$

である．定義から

$$\log\left(\frac{d}{dx}\right):\mathbb{C}[\log x]_n\to\mathbb{C}[\log x]_{n+1},$$

だが，さらに $\log\left(\dfrac{d}{dx}\right)=-(\log x+\gamma)+N_{\log}$ とすれば，

$$N_{\log}:\mathbb{C}[\log x]_n\to\mathbb{C}[\log x]_{n-1}, \tag{5}$$

だから $N_{\log}$ は一般冪零元であり

$$N_{\log}^{n+1}\mathbb{C}[\log x]_n=\{0\},$$

である．よって

命題１．$\log\Big(\dfrac{d}{dx}\Big)+\log x=-\gamma I+N_{\log}$ の非整数冪は

$$
\begin{aligned}
&(\log\Big(\frac{d}{dx}\Big)+\log x)^a\\
=&(-\gamma)^a(I+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n a(a-1)\cdots(a-n+1)}{\gamma^n n!}N_{\log}^n
\end{aligned}
\tag{6}
$$

で定義できる．とくに $\log\Big(\dfrac{d}{dx}\Big)+\log x$ は $\mathbb{C}[\log x]$ の線形作用素として逆を持つ．

a が整数でなければ $(\log\Big(\dfrac{d}{dx}\Big)+\log x)^a$ は一意ではないが $(-\gamma)^a$ を指定すれば定まる．また $\log\Big(\dfrac{d}{dx}\Big)$ の分数冪などは $\dfrac{1}{\log x}$ の分数冪微分や微分の対数の計算が出来れば調べられるようだが，その計算は次節であつかうように簡単ではなさそうである．

定義から $\exp(a\log\Big(\dfrac{d}{dx}\Big))=\dfrac{d^a}{dx^a}$ となるはずだが，変換 $\mathcal{R}$ を使えば $f(x)$ が整関数で $\mathcal{R}[f(s)]$ が定義できるとき

$$
e^{a\log(\frac{d}{dx})}\mathcal{R}[f(s)](x)=\mathcal{R}[e^{a\frac{d}{ds}}f(s)](x)=\mathcal{R}[\tau_{-a}f(s)](x),
$$

とこれが検証される．しかし x^a などにはこれは適用できない．以下では a が負の整数でないとき

$$
e^{a\log(\frac{d}{dx})}x^c=\frac{\Gamma(1+c-a)}{\Gamma(1+c)}x^{c-a}
$$

を直接検証する．

仮定から $x^a=\Gamma(1+a)\mathcal{R}[\delta_H a]$ である．よって

$$
\begin{aligned}
(\log\Big(\frac{d}{dx}\Big))^m x^a&=\Gamma(1+a)\mathcal{R}[\delta_a^{(m)}](x)\\
&=(-1)^m\Gamma(1+a)\frac{\partial^m}{\partial s^m}(\frac{x^s}{\Gamma(1+s)})|_{s=a}
\end{aligned}
$$

である．なおライプニッツの公式から

$$
\frac{\partial^m}{\partial s^m}\frac{x^s}{\Gamma(1+s)}|_{s=a}=\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}(\log x)^k x^s\frac{\partial^{m-k}}{\partial s^{m-k}}(\frac{1}{\Gamma(1+s)})|_{s=a}
$$

となる．よって $\dfrac{\partial^m}{\partial s^m}\frac{1}{\Gamma(1+s)}|_{s=c}=P_m(c)$ と書いて (和の順序が交換できるとき)

$$
\begin{aligned}
e^{a\log(\frac{d}{dx})}x^c&=\Gamma(1+c)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-a)^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}P_{n-k}(c)(\log x)^k x^c\\
&=\Gamma(1+c)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\Big(\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(-a)^n}{(n-k)!}P_{n-k}(c)(\log x)^k\Big)x^c\\
&=\Gamma(1+c)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-a)^k}{k!}\Big(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-a)^m}{m!}P_m(c)(\log x)^k\Big)x^c,\ m=n^k.
\end{aligned}
$$

$|x-c|<1$, $|a|<1$ であれば $P_m(c)$ の定義から

$$
\Gamma(1+c)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-a)^m}{m!}P_m(c)=\frac{\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+c-a)},
$$

である．よって

$$
\begin{aligned}
e^{-a\log(\frac{d}{dx})}x^c=&\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-a)^k}{k!}(\log x)^k\Big)\frac{\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+c-a)}x^c\\
=&\frac{\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+c-a)}x^{c-a}=\frac{d^a}{dx^a}x^c.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

が $|a|<1$, $|x-c|<1$ で成立する．しかし $\exp(a\log\Big(\frac{d}{dx}\Big))x^c$ と $\frac{\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+c-a)}x^c$ は x,s,c の関数として解析的で $\mathbb{C}^3$ の一価有理型関数として解析接続される．よって次の定理がえられる．

定理２． $c,\ c-a$ が負の整数で無ければ解析接続続の意味で

$$e^{a\log(\frac{d}{dx})}x^c=\frac{\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+c-a)}x^{c-a}(=\frac{d^a}{dx^a}x^c) \tag{8}$$

が成立する．

3 $[N_{\log},\log xI]$ の計算

定理 2 から $e^{a(N_{\log}-(\log x+\gamma)}=\frac{d^a}{dx^a}$ だが $\log xI$，I は恒等作用素，と $N_{\log}$ は可換でないのでこれから $e^{aN_{\log}}$ などを導くことは難しい．以下では $[N_{\log},\log xI]=N_{\log}\log xI-\log xIN_{\log}$ の計算を試みる．

定義から

$$\begin{aligned}N_{\log}(\log x)^n=&\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k+1}n!\zeta(n-k+1)}{k!}(\log x)^k\\=&n\zeta(2)(\log x)^{n-1}-n(n-1)\zeta(3)(\log x)^{n-2}+\\&+\cdots+(-1)^{n-1}n!\zeta(n+1),\quad n\geq 1,\\N_{\log}1=&0\end{aligned}$$

である．よって $n\geq 1$ として

$$\begin{aligned}(\log xN_{\log})(\log x)^n=&\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k+1}n!\zeta(n-k+1)}{k!}(\log x)^{k+1}\\=&n\zeta(2)(\log x)^{n}-n(n-1)\zeta(3)(\log x)^{n-1}+\\&+\cdots+(-1)^{n-1}n!\zeta(n+1)\log x\\(N_{\log}\log x)(\log x)^n=&\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}(n+1)!\zeta(n-k+2)}{k!}(\log x)^k\\=&(n+1)\zeta(2)(\log x)^{n}-(n+1)n\zeta(3)(\log x)^{n-1}+\\&+\cdots+(-1)^{n}(n+1)!\zeta(n+2).\end{aligned}$$

$\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-j+1}n!\zeta(n-j+1)}{j!}(\log x)^{j+1}=$
$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n-k}n!\zeta(n-k+2)}{(k-1)!}(\log x)^k$ であり

$$\begin{aligned}&\frac{(-1)^{n-k}(n+1)!\zeta(n-k+2)}{k!}-\frac{(-1)^{n-k}n!\zeta(n-k+2)}{(k-1)!}\\=&\frac{(-1)^{n-k}(n-k+1)n!\zeta(n-k+2)}{k!}\end{aligned}$$

だから

$$
\begin{aligned}
&[N_{\log}, \log xI](\log x)^n \\
=&\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}(n-k+1)n!\zeta(n-k+2)}{k!}(\log x)^k + \\
=&\zeta(2)(\log x)^n - 2n\zeta(3)(\log x)^{n-1} + \\
&+ \cdots + (-1)^n (n+1)!\zeta(n+2).
\end{aligned}
\tag{9}
$$

である．また $n=0$ のときは $[N_{\log}, \log xI]1 = N_{\log}\log x = \zeta(2)$ だから　作用素 $N_{\log;2}$ を

$$
\begin{aligned}
&N_{\log;2}(\log x)^n \\
=&\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}(n-k+1)n!\zeta(n-k+2)}{k!}(\log x)^k \\
=&-2n\zeta(3)(\log x)^{n-1} + 3n(n+1)\zeta(4)(\log x)^{n-2} + \\
&+ \cdots + (-1)^n (n+1)!\zeta(n+2),
\end{aligned}
\tag{10}
$$

で定義すれば

$$
[N_{\log}, \log xI] = \zeta(2)I + N_{\log;2} \tag{11}
$$

である．(11) から $N_{\log}$ と同様

$$
N_{\log;2} : \mathbb{C}[\log x]_n \to \mathbb{C}[\log x]_{n-1}, \quad N_{\log;2}^{n+1}\mathbb{C}[\log x]_n = \{0\} \tag{12}
$$

となる．よって

命題２． $\mathbb{C}[\log x]$ の上の作用素として $[N_{\log}, \log xI]$ の非整数冪は定義できる．とくに $[N_{\log}., \log xI]$ は逆をもつ．

(11) から $\log xI$ と $N_{\log}$ は一見変形生成作用素と消滅作用素のように見えるが　そう解釈するのはかなり無理があるようである．以下それを説明する．(10) から

$$
\begin{aligned}
&(N_{\log;2}\log x)(\log x)^n = (N_{\log;2})(\log x)^{n+1} \\
=&\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n+1-k}(n-k)(n+1)!\zeta(n-k+3)}{k!}(\log x)^k. \\
&(\log x)N_{\log;2}(\log x)^n \\
=&\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n+1-k}(n-k+2)n!\zeta(n-k+3)}{(k-1)!}(\log x)^k
\end{aligned}
$$

である．

$$
\frac{(n-k)(n+1)!}{k!} - \frac{(n-k+2)n!}{(k-1)!} = \frac{((n-k)(n+1)-(n-k+2)k)n!}{k!}
$$

だから　$[N_{\log;2}, \log xI] = -\zeta(3)E + N_{\log;3}$, $E(\log x)^n = n(\log x)^n$ とおけば $N_{\log;3}$ は一般冪零作用素である．しかし E は恒等作用素ではないので $[[N_{\log;2}, \log xI]\log xI] \neq [N_{\log;3}, \log xI]$ である．

4　$\dfrac{1}{\log x}$ の微分

$\log\left(\dfrac{d}{dx}\right)$ の $\mathbb{C}[\log x]$ の作用を $\mathbb{C}(\log x)$ まで拡張できるかは問題である．その手がかりとして不十分な結果だが $\log\left(\dfrac{d}{dx}\right)\left(\dfrac{1}{\log x}\right)$ の計算を試みる．

x を正の実数とすれば $\lim_{s\to\infty} x^s = 0,\ 0 < x < 1$, $\lim_{s\to-\infty} x^s = 0, s > 1$ だから

$$\frac{1}{\log x} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{0} x^s ds, & x > 1, \\ -\int_0^\infty x^s ds, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

である．よって $Y = Y(s)$ をヘヴィサイド関数 $Y(s) = 1, s > 0, Y(s) = 0, s < 0$ とすれば

$$\frac{1}{\log x} = \begin{cases} \mathcal{R}[\Gamma(1+s)(1-Y(s))](x), & x > 1, \\ -\mathcal{R}[\Gamma(1+s)Y(s)](x), & 0 < x < 1, \end{cases} \tag{13}$$

である．これから

$$\frac{d^a}{dx^a}\Big(\frac{1}{\log x}\Big) = \begin{cases} \mathcal{R}[\Gamma(1+s+a)(1-Y(s+a))](x), & x > 1, \\ -\mathcal{R}[\Gamma(1+s+a)Y(s+a)](x), & 0 < x < 1. \end{cases} \tag{14}$$

が得られるが　a が整数でないとこれ以上の計算は難しそうである．また $0 < x < 1$ のときは

$$\mathcal{R}[\Gamma'(1+s)Y(s)](x) = \int_0^\infty x^s \psi(1+s) ds$$

であり，この積分は $|\psi(1+x)| = O(|\log x|), \to \infty$ だから $0 < x < 1$ では収束する．よって

$$\log\Big(\frac{d}{dx}\Big)\Big(\frac{1}{\log x}\Big) = -\int_0^\infty x^s \psi(1+s) ds - 1, \tag{15}$$

が導かれる．しかし $x > 1$ であれば $\psi(1+s)$ は負の整数で極をもつから積分 $\int_{-\infty}^0 x^s \psi(1+s) ds$ は発散する．従って $\log\Big(\frac{d}{dx}\Big)\Big(\frac{1}{\log x}\Big)$ の $x > 1$ での計算は（存在するかを含めて）問題である．

参考文献

[1] 浅田　明，関数を $\frac{1}{2}$ 回微分する，藤井一幸編『数理の玉手箱』 90-131 遊星社 (2010)

[2] Asada, A., Integral transform arose from fractional calculus and discrete delta potential, *Contemporary Topics in Mathematics and Statics with Applications*, ed. Adhikari, M. R. , Chap. 3. Kolkata, (2013)

[3] 浅田　明，分数冪微分に関係した積分変換とその応用，数学・物理通信 **5-3** (2015) 22-34

[4] 浅田　明，分数冪微分で現れた群と離散デルタ・ポテンシャル，数学・物理通信 **5-6** (2015) 1-15

[5] Asada, A., Extended Borel transform and fractional calculus, in *Fractional Calculus: History, Theory and Applications*, eds. Daou, R. Xavier,M. Nova Publishers, (2014). *An integral transform arising from fractional calculus, Fractional Calculus with Applications to Dynamical System*, eds. Cario, C. Yang, X. J. DeGruyter, (2016)

[6] 浅田　明, 分数冪微積で現れたリー環の適切な完備化, 数学･物理通信 **6-8** (2016) 15-25 . Minimal completion of the Lie algebra arising from fractional calculus, preprint.

[7] 浅田　明，δ-関数等の分数冪微分と微分の対数の計算, 数学・物理通信 **7-2** (2017) 13-22 .

[8] Erdéli, A. Magnus, W. Oberbettinger, F. Tricomi, F. G., *Higher Transcendental Functions*, Chap.18, New York (1981)

[9] Hermann, R., *Fractional Calculus - An Introduction for Physicists*, World Sci. (2011)

[10] Martineau, A., Sur les fonctionelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel, J. Ann. Math. **11** (1963) 1-164

[11] Naknishi, N., Logarithmic type functions of the differential operator, Yokohama J. Math. **55** (2010) 149-163

[12] 中西　襄，非整数微分の新しい定義, 数学・物理通信 **7-6** (2017) 2-7

Bessel 関数と膜振動の問題 (1)

世戸 憲治 *

Bessel Function and Problems of Membrane Oscillation (1)

Kenji Seto*

1　はじめに

前回の「誤解を招く弦振動の問題 (2)」(「数学・物理通信」7 巻 6 号) では，弦の初期波形を与えたときの振動様式について述べた．今回は，これを 2 次元に拡張した膜振動について述べる．

初めは，ドラムあるいは太鼓の膜を想定して，周辺を固定した円形膜の中心点を持ち上げてから初速度なしに離したときに膜がどのように振動するかという問題設定にしようと考えていた．しかし，これがそもそも間違いであることに気付いた．原理的には，膜の 1 点だけを持ち上げようとすると，無限に持ち上がってしまうからである．以下，波動方程式の立場で解析してみる．

2　波動方程式を解いてみると

よく知られているように，膜上の座標 (x, y), 時刻 t における膜に垂直方向の変位を $U(x, y, t)$ としたとき，その波動方程式は

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}U(x,y,t) = c^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)U(x,y,t), \qquad c = \sqrt{T/\rho} \tag{2.1}$$

となる．ここに，c は波動伝播速度で，膜の面密度を ρ, 膜に沿った単位長さあたりの張力を T としたとき，この第 2 式で表される．ここで扱う膜は，周辺部を固定された半径 ℓ の円形膜とし，その中心を座標原点とする．また，ここでは，座標原点に対し回転対称な現象しか扱わないので，原点からの距離，すなわち，動径座標を r としたとき，2 次元の Laplacian は

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \tag{2.2}$$

と書ける．変位の方もこれに合わせて $U(r, t)$ と書くことにして，方程式 (2.1) は

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}U(r,t) = c^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big)U(r,t) \tag{2.3}$$

となる．

初めに，この方程式の静的な解を求めてみる．このときは，方程式の左辺がゼロとなるので，このときの変位を $S(r)$ として，

$$\Big(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Big)S(r) = 0 \tag{2.4}$$

* 北海学園大学名誉教授　　E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

となり，膜の半径 $r=\ell$ のところで $S=0$ となる解は，

$$S(r) = C\log(r/\ell) \tag{2.5}$$

と求められる．C は積分定数である．この式からわかるように，もし，$r=0$ の原点だけを持ち上げたとすると，そのときの変位は無限大となってしまう．これは 1 点だけを持ち上げるからよくないのであって，一定の面積を持った領域を持ち上げるのなら無限大にはならないはず．ここでは，初期変位 $S(r)$ を，膜の半径 ℓ より小さい適当な半径 r_0 の内部では一定値 U_0, その外側では (2.5) 式に従うものとし，

$$S(r) = \begin{cases} U_0, & 0 \le r \le r_0 \\ \dfrac{U_0}{\log(r_0/\ell)}\log(r/\ell), & r_0 \le r \le \ell \end{cases} \tag{2.6}$$

と定義することにする．初期変位をこのように設定するということは，$r=r_0$ のところでは膜を手で強制的に押さえつけることであり，そのぶんだけ外部から膜に力を加えることになるので，当然のことながら，この点では，方程式 (2.4) を満たしてはいない．また，$r=r_0$ を除いた他の範囲では，膜に外部から力を加えていないので，方程式 (2.4) を満たしていることに注意する．

この初期条件の下に方程式 (2.3) に戻って，膜を押さえる手を離した後の解を求めてみよう．変位 $U(r,t)$ を変数分離形の

$$U(r,t) = R(r)P(t) \tag{2.7}$$

と置くことにする．このとき方程式は

$$\frac{1}{c^2P}\frac{d^2P}{dt^2} = \frac{1}{R}\Big(\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\Big) \tag{2.8}$$

となるので，この式の値，すなわち分離定数を負の $-k^2$ とおくと *1，

$$\frac{d^2P}{dt^2} + c^2k^2P = 0, \qquad \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + k^2R = 0 \tag{2.9}$$

と 2 本の式に分離される．この第 1 式から，全体に付く定数を除いて，

$$P(t) = \cos(ckt) \tag{2.10}$$

と求められる．sine 関数の方は初速度がゼロであることから排除した．第 2 式の解は 0 次の Bessel 関数で，

$$R(r) = J_0(kr) \tag{2.11}$$

と求められる．このとき，第 2 種 Bessel 関数 $N_0(kr)$ も解となるが，これは $r=0$ で発散することから排除した．このときは，初期変位 $S(r)$ を決めるときとは違って，膜を押さえる手を離した後なので，すべての r に対し，方程式 (2.9) を満たす発散しない解を求めることが要求されることに注意する．

*1 もし，この分離定数を正の k^2 とすると，時間依存部分 $P(t)$ は e^{ckt}, or e^{-ckt} となり，k の符号によって，どちらか一方は時間 $t\to\infty$ で発散してしまい，他方は，ゼロとなって動きがなくなってしまうので，いずれも解として不適格である．また，分離定数を正の k^2 とすると，r 依存部分 $R(r)$ は変形 Bessel 関数の $I_0(kr)$, or $K_0(kr)$ となり，$K_0(kr)$ は $r=0$ で発散するので不適格，$I_0(kr)$ の方は発散はしないが，$r\ge 0$ でゼロ点を持たないので，$r=\ell$ で変位をゼロにすることができなくなってしまう．したがって，ここでは分離定数を負の $-k^2$ とする．

ここで，r が膜の半径 ℓ で変位がゼロとなる境界条件を課すと $J_0(k\ell)=0$ となるので，$k\ell$ は Bessel 関数のゼロ点でなければならない．したがって，この 0 次の Bessel 関数の n 番目のゼロ点を ξ_n と記すことにすると，

$$k=\xi_n/\ell \tag{2.12}$$

となるので，(2.10) (2.11) の解は，

$$P(t)=\cos(\xi_n ct/\ell), \qquad\qquad R(r)=J_0(\xi_n r/\ell) \tag{2.13}$$

となる．方程式 (2.3) の一般解はこれら関数の積の重ね合わせで表されるので，

$$U(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(\xi_n r/\ell)\cos(\xi_n ct/\ell) \tag{2.14}$$

となる．ここで，定数 C_n は初期条件から決められるが，その前に，この式の第 n 項における周期 t_n とその逆数である振動数 ν_n は

$$t_n=\frac{2\pi\ell}{\xi_n c}, \qquad \nu_n=\frac{\xi_n c}{2\pi\ell} \tag{2.15}$$

となる．この振動数 ν_n に表れる因子 ξ_n/π の値を数値的に求めたものを $n=1$〜10 までの 10 個を，少数点以下 5 桁の精度で挙げると [*2]，

$$\frac{\xi_n}{\pi}=0.76548,\quad 1.75710,\quad 2.75457,\quad 3.75336,\quad 4.75266,\quad 5.75220,\quad 6.75187,$$
$$7.75163,\quad 8.75145,\quad 9.75130 \tag{2.16}$$

となる．Bessel 関数はその変数の値が大きくなると漸近的に三角関数で表されるので，そのゼロ点の間隔も漸近的に π となる．したがって，ここに挙げた ξ_n/π の数列は，漸近的にその間隔が 1 となることがこの式から見てとれる．ちなみに，$n=1$ のときの周期と振動数は

$$t_1=\frac{1}{0.76548}2\ell/c, \qquad \nu_1=0.76548\times c/(2\ell) \tag{2.17}$$

となる．しかし，つぎの n が 2 以上の振動モードのときは，周期，振動数共に，この $n=1$ のときのものとは整数比になっていないので，この (2.17) 式で与えられる t_1 が変位 $U(r,t)$ の全体の周期になる訳ではなく，単に 1 つの項の周期を意味しているにすぎない．その意味で，膜振動の場合は，基本周期，基本振動数という言葉自体の意味が失われるものと考えられる．ドラムあるいは太鼓を叩いたときの深みのある音は，このことに原因しているのかもしれない．

つぎに，(2.14) 式に表れる係数 C_n を決定しよう．この式で $t=0$ としたときは，初期条件の (2.6) 式で与えられるので，

$$S(r)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(\xi_n r/\ell) \tag{2.18}$$

が満たされなければならない．この式の両辺に $J_0(\xi_{n'} r/\ell)\,r$ を掛け r で積分すると，Bessel 関数のゼロ点を用いた直交式 [*3]

$$\int_0^{\ell} J_0(\xi_n r/\ell)J_0(\xi_{n'} r/\ell)\,r dr=\frac{\ell^2}{2}\big[J_1(\xi_n)\big]^2\delta_{n,n'} \tag{2.19}$$

[*2] 岩波全書「数学公式 III」P.269. この本では，Bessel 関数 $J_n(z)$ の k 番目のゼロ点を $j_{n,k}$ と記すようになっているが，ここでは 0 次の Bessel 関数のゼロ点しか用いないので，n 番目のゼロ点を ξ_n と書いた．

[*3] 岩波全書「数学公式 II」P.259

が利用できる．これから，

$$C_n = \frac{2}{\ell^2\left[J_1(\xi_n)\right]^2}\int_0^\ell S(r)J_0(\xi_n r/\ell)rdr$$

$$= \frac{2U_0}{\ell^2\left[J_1(\xi_n)\right]^2}\Big[\int_0^{r_0} J_0(\xi_n r/\ell)rdr + \frac{1}{\log(r_0/\ell)}\int_{r_0}^\ell \log(r/\ell)J_0(\xi_n r/\ell)rdr\Big] \quad (2.20)$$

となる．この 2 項目の積分は，対数関数と残りの部分に分けて部分積分を使うと不定積分の公式 *4

$$\int zJ_0(az)dz = (z/a)J_1(az), \qquad \int J_1(az)dz = -(1/a)J_0(az) \quad (2.21)$$

に帰着する．結果は，相殺が起こるので，意外にもまとまった形

$$C_n = -\frac{2U_0}{\log(r_0/\ell)}\frac{J_0(\xi_n r_0/\ell)}{[\xi_n J_1(\xi_n)]^2} \quad (2.22)$$

となり，これを (2.14) 式に戻して，解 $U(r,t)$ は

$$U(r,t) = -\frac{2U_0}{\log(r_0/\ell)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\xi_n r_0/\ell)}{[\xi_n J_1(\xi_n)]^2}J_0(\xi_n r/\ell)\cos(\xi_n ct/\ell) \quad (2.23)$$

と求められたことになる．弦振動のときは，三角関数の積が入り，積和公式でうまく処理ができたが，今回の場合は，Bessel 関数と三角関数の積となる．これをうまく処理する公式は存在しないので，これ以上解析的に簡単化することは無理であろう．

3 数値計算による解法

以下，この (2.23) 式に基づいて数値計算をしてみる．ここでは，n の和を $n = 20$ までをとることにし，ξ_n，$J_1(\xi_n)$ には，数値計算のための公式 *5

$$\xi_n = \frac{\pi a}{4}\Big[1 + \frac{2}{(\pi a)^2} - \frac{62}{3(\pi a)^4} + \frac{15116}{15(\pi a)^6} - \frac{12554474}{105(\pi a)^8} + \frac{8368654292}{315(\pi a)^{10}} - + \cdots\Big], \qquad [a = 4n-1] \quad (3.1)$$

$$J_1(\xi_n) = (-1)^{n+1}\frac{2^{3/2}}{\pi\sqrt{a}}\Big[1 - \frac{56}{3(\pi a)^4} + \frac{9664}{5(\pi a)^6} - \frac{7381280}{21(\pi a)^8} + \cdots\Big], \qquad [a = 4n-1] \quad (3.2)$$

を利用する．結果のグラフを以下の図 1 から図 4 までに示す．これらの図では，水平右向きに r 軸，斜め上向きに t 軸，上向きに U 軸をとって，立体的に描いたものである．なお，これらの図では，陰線処理をしているので，陰になる部分は描かないようにしてある．

ここでは，$r_0 = 0.1\ell$ とし，図 1 は $t = 0$〜t_1 までを，図 2 は $t = t_1$〜$2t_1$ まで，図 3 は $t = 2t_1$〜$3t_1$ まで，図 4 は $t = 3t_1$〜$4t_1$ までを描いた．これらの図を見て分かるように，変位 $U(r,t)$ はおおよそ周期 t_1 で周期的に変化しているように見えるが，厳密には周期関数にはなっていない．

また，ここでは，単純な 1 枚膜の振動を扱ったが，実際の太鼓やドラムの場合は，筒中の空気や反対側の膜に共鳴振動がおこるので，ここで扱ったものよりはるかに複雑な振動になるであろう．

---

*4 岩波全書「数学公式 III」P.189.

*5 岩波全書「数学公式 III」P.152. 実は，この (3.1) (3.2) 式とも $n = 1$ の場合は誤差が大きく少数第 1 位までしか合っていないので，これらの式は $n = 2$ 以上に対して使うようにし，$n = 1$ の場合は P.269 の数値表を使うようにした．

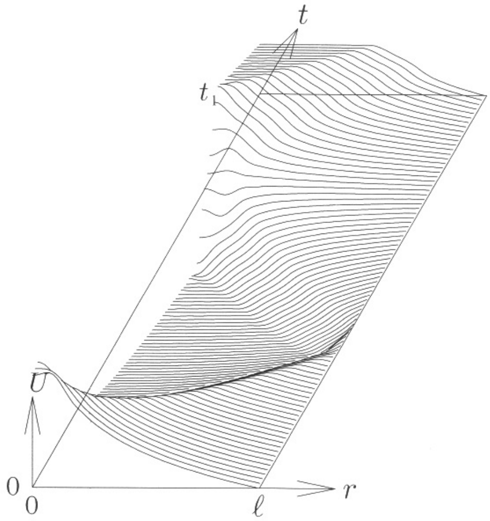

図 1　$t = 0 \sim t_1$

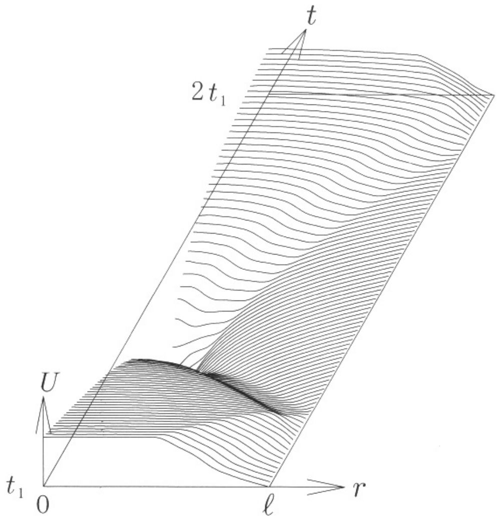

図 2　$t = t_1 \sim 2t_1$

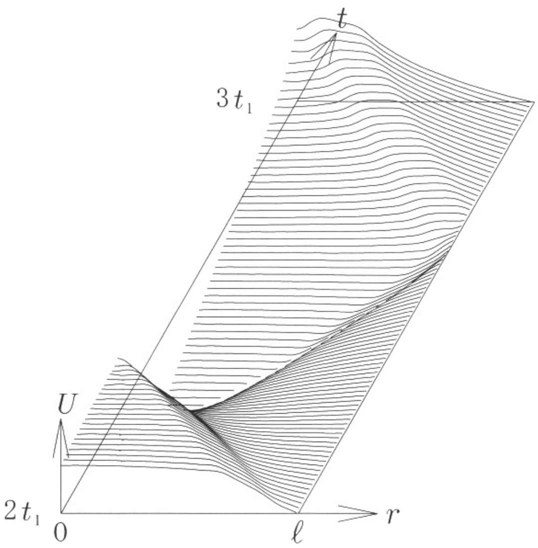

図 3　$t = 2t_1 \sim 3t_1$

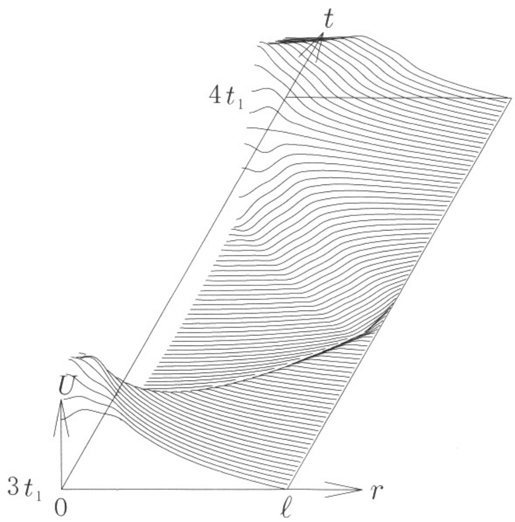

図 4　$t = 3t_1 \sim 4t_1$

4　おわりに

ここでは，膜振動の初期値問題を扱ってみた．弦とは違って，膜の場合は厳密な周期振動にはならないことが分かった．この事に関し思い付いたことを記しておく．楽器には数えきれないほどの種類があるが，大きく分けると，ピアノも含めたギターやヴァイオリンのような弦楽器と，ドラムやシンバルのような打楽器，および，サックスやクラリネットの類の管楽器がある．弦楽器は弦という 1 次元的な物体の振動であるが，管楽器も管の中の空気の 1 次元的な振動ということで，物理的には同じようなものとして扱える．それに対し，ドラムやシンバルの類は振動体自身が 2 次元的なものである．以前から不思議に思っていたのだが，打楽器では音階を演奏できるようなものは存在せずに，もっぱら，リズムを演奏するためのリズム楽器としてしか使われていない．しか

し，大小たくさんのドラムを並べて叩いていけばメロディーも演奏できるはずなのに，そのようなものはいままでに見たこともない．このようなことをやろうとすると，確かに広い場所をとってしまうので現実的ではないのかとも考えられるが，世の中には色々な人がいるので，こんなことを試してみる人がいてもよさそうである．何か他に理由があるのではと考えていたが，今回扱ったように，膜振動では完全な形の周期振動にはなっていないために，例えそのようなことを試してもきれいなメロディーにはならないというのがその理由であろう．

これに近いものとしては，スティールパンという楽器があることを最近になって知った [*6]．これはカリブ海の島国，トリニダード・トバコ共和国で発明されたもので，直径 1 メートルほどの鍋のような形をしており，その底面には 30 個ほどの大小の凸凹が付けられており，その凸凹のどれを叩くかで音階が出るようになっている．これはインターネットでも視て聴くことができ，それなりの曲が演奏できるようであるが，我々が普通に楽器というものに比べるといまいちの感がある．また，楽器とは言えないかもしれないが，グラス・シロホンあるいはグラス・ハープと言うのがある．これは，いろいろな高さに水を入れたたくさんのコップを並べ，それをグラス・シロホンの場合は棒で叩いて，あるいは，グラス・ハープの場合は手で擦ることでメロディーを奏でるものである．これらは実際に聴いたことがあるが本当にきれいな音がするものである．

[謝辞]

今回も，京都大学名誉教授の中西襄先生にこの原稿を見ていただき，たくさんのコメントをいただきました．いただいたコメントの中で，先生の音楽，美術に対する造詣の深さに感銘してしまった部分を，そのままの形で，引用させていただきます．

『ここで扱っているのは，論文にも指摘されているように，太鼓のように 2 枚膜の振動ではありませんよね．

ここの状況に一番近い楽器は銅鑼 (どら) だと思います．どらは，仏教で使う楽器ですが，船舶の非常ベルとか，レスリングのゴングにも使われています．オーケストラに使われた例としては，レスピーギの「ローマの祭り」で非常に効果的に使われています．オーケストラで通常使われる楽器としては，ティンパニーが 1 枚膜です．鐘は打楽器と言うべきかどうか知りませんが，カリヨンは鐘をたくさん並べてメロディを奏でます．

なお，有名な俵屋宗達や尾形光琳の「風神雷神図」の雷神は，たくさんの太鼓を背負って雷のゴロゴロという音を鳴らすという設定で描かれています．太鼓のみでは音楽にならないでしょう．ハイドンの交響曲に「太鼓連打」というのがあることはありますが．』

というもので，大変勉強になりました．この他にもたくさんのコメントをいただきそれに従って修正したものが今回のものです．先生に深く感謝いたします．

[*6] 「視て聴くドレミ・フーリエ音楽学への招待」小方厚　他著 (大阪大学出版会)

Bessel 関数と膜振動の問題 (2)

世戸 憲治 *

Bessel Function and Problems of Membrane Oscillation (2)

Kenji Seto*

1 はじめに

前回の「Bessel 関数と膜振動の問題 (1)」(「数学・物理通信」7 巻 8 号) では，膜の中心部を持ち上げてから静かに初速度なしで離したとき，膜がどのように振動するかを解析した．また，「誤解を招く弦振動の問題 (3)」(「数学・物理通信」7 巻 7 号) では，弦に剛性を持たせたときの弦の振動様式について解析を行った．今回は，これら 2 つの要素を取り入れて，膜に剛性を持たせたときの振動様式について解析することにする．

2 方程式の導入

膜の横振動方程式は前回の論文で扱ったように，膜面上の座標 (x, y), 時刻 t における変位を $U(x, y, t)$ としたとき，

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}U(x,y,t) = T\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)U(x,y,t) \tag{2.1}$$

と書かれる．ここに，ρ は，膜の単位面積あたりの質量，すなわち面密度，および，T は，膜面上の単位長さあたりの張力を表す．一方，剛性が入った板の横振動方程式は

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}U(x,y,t) = -ED\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)^2U(x,y,t) \tag{2.2}$$

と書かれる．ここに，E は Young 率，また，D は，σ を Poisson 比として，面上の単位長さにおける断面 2 次モーメントを $1-\sigma^2$ で割ったものである *1．これら 2 つの方程式から，膜に剛性を考慮したときの方程式は

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}U(x,y,t) = \Big[T\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big) - ED\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)^2\Big]U(x,y,t) \tag{2.3}$$

と考えられる．

以下では，半径 ℓ の円形膜を考え，この中心部を持ち上げたときの振動様式を解析する．このときは，円の中心に関して回転対称な振動となるので，このときの Laplacian は動径成分 r を用いて，

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \tag{2.4}$$

* 北海学園大学名誉教授 E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

*1 厚さ h の板の場合は，$D = h^3/12(1-\sigma^2)$.

と書かれる．これから，変位を $U(r,t)$ と書くことにして，方程式は，

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}U(r,t)=\Big[T\Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big)-ED\Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big)^2\Big]U(r,t) \tag{2.5}$$

となる．

3 方程式の解法

3.1 固有値と固有関数

方程式 (2.5) を解くために，変位 $U(r,t)$ を変数分離型の

$$U(r,t)=R(r)P(t) \tag{3.1}$$

とおく．このとき方程式は，

$$\frac{1}{P}\frac{d^2P}{dt^2}=\frac{1}{\rho R}\Big[T\Big(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Big)-ED\Big(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Big)^2\Big]R \tag{3.2}$$

となるので，この分離定数の値を $-\omega^2$ とおくと，2 本の式

$$\frac{d^2P}{dt^2}+\omega^2P=0,\qquad \Big[T\Big(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Big)-ED\Big(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Big)^2\Big]R+\rho\,\omega^2R=0 \tag{3.3}$$

を得る．この第 1 式から，

$$P(t)=\cos(\omega t) \tag{3.4}$$

となる．このとき sine 関数の方は，初速度をゼロとすることから排除した．第 2 式の方は 4 階の微分方程式となるので，一見難しそうに見えるが，この解を 0 次の Bessel 関数を用いて，$R=J_0(kr)$ とおいてみると，$J_0(kr)$ が，

$$\Big(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Big)J_0(kr)=-k^2J_0(kr) \tag{3.5}$$

を満たすことから，(3.3) 式に代入すると，

$$EDk^4+Tk^2-\rho\,\omega^2=0 \tag{3.6}$$

が満たされればよい．ここで，ω に依存する 2 個の正定数を，

$$\mu=\sqrt{\frac{\sqrt{T^2+4ED\rho\,\omega^2}-T}{2ED}},\qquad \nu=\sqrt{\frac{\sqrt{T^2+4ED\rho\,\omega^2}+T}{2ED}} \tag{3.7}$$

と定義すると，(3.6) 式の解 k は，

$$k=\pm\mu,\qquad k=\pm i\nu \tag{3.8}$$

となる．これから (3.3) 第 2 式の解は，0 次の Bessel 関数 $J_0(\mu r)$, あるいは 0 次の変形 Bessel 関数 $I_0(\nu r)$ となるので，A, B を任意定数として，

$$R(r)=AJ_0(\mu r)+BI_0(\nu r) \tag{3.9}$$

となる．ここでは，第 2 種 Bessel 関数の $N_0(\mu r)$，$K_0(\nu r)$ はいずれも $r=0$ で発散するので，排除した．ここで，さらに境界条件として，半径 ℓ の円周上は埋め込み固定になっているものとして，

$$R(\ell)=0, \qquad \frac{dR(r)}{dr}\Big|_{r=\ell}=0 \tag{3.10}$$

という条件を付けると，(3.9) 式から，微分公式 $J_0{}'(z)=-J_1(z)$，$I_0{}'(z)=I_1(z)$ を用いて，

$$AJ_0(\mu\ell)+BI_0(\nu\ell)=0, \qquad -A\mu J_1(\mu\ell)+B\nu I_1(\nu\ell)=0 \tag{3.11}$$

となる．これから，A，B が共にゼロとならないためには，これら方程式の係数行列式の値がゼロでなければならず，

$$\begin{vmatrix} J_0(\mu\ell) & I_0(\nu\ell) \\ -\mu J_1(\mu\ell) & \nu I_1(\nu\ell) \end{vmatrix}=0, \qquad \text{すなわち} \quad J_0(\mu\ell)\frac{I_1(\nu\ell)}{I_0(\nu\ell)}+\frac{\mu}{\nu}J_1(\mu\ell)=0 \tag{3.12}$$

となる．この式から，μ，ν の中に含まれる ω の値が固有値として決まる．この意味で，この式は固有値方程式となる．このときの固有値はとびとびに決まるものと考えられるので，それを正の小さい方から ω_k $(k=1,2,3,\cdots)$ とし，対応する μ，ν の値を μ_k，ν_k $(k=1,2,3,\ \cdots)$ とする．

以下，(3.11) 式の第 1 式が満たされるように

$$A=1, \qquad B=-\frac{J_0(\mu\ell)}{I_0(\nu\ell)} \tag{3.13}$$

ととることにし，(3.9) 式を固有関数として，

$$F_k(r)=J_0(\mu_k r)-\frac{J_0(\mu_k\ell)}{I_0(\nu_k\ell)}I_0(\nu_k r) \tag{3.14}$$

と定義する．もちろん，これはまだ規格化されたものではない．

3.2 固有関数の直交性と規格化

固有関数 $F_k(r)$ が満たす方程式は (3.3) の第 2 式から，

$$-\rho\,{\omega_k}^2F_k(r)=\Big[T\Big(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Big)-ED\Big(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Big)^2\Big]F_k(r) \tag{3.15}$$

となる．ここで，k を l に変えた式

$$-\rho\,{\omega_l}^2F_l(r)=\Big[T\Big(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Big)-ED\Big(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Big)^2\Big]F_l(r) \tag{3.16}$$

を作り，第 1 式に $F_l(r)r$ を，また，第 2 式に $F_k(r)r$ を掛けて，辺々を引き算すると，

$$\begin{aligned} -\rho({\omega_k}^2-{\omega_l}^2)F_k(r)F_l(r)r=\frac{d}{dr}\Big\{&T(F_lF_k{}'-F_kF_l{}')r \\ -ED\Big[&(F_lF_k{}'''-F_kF_l{}''')r-(F_l{}'F_k{}''-F_k{}'F_l{}'')r+(F_lF_k{}''-F_kF_l{}'')-(F_lF_k{}'-F_kF_l{}')\frac{1}{r}\Big]\Big\} \end{aligned} \tag{3.17}$$

となる．ここで，プライムは微分を表す．この式の計算には

$$\Big(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Big)^2=\frac{d^4}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{d}{dr} \tag{3.18}$$

なることを用いた．この (3.17) 式を r で 0 から ℓ まで積分すると，

$$
\begin{aligned}
&-\rho({\omega_k}^2-{\omega_l}^2)\int_0^\ell F_k(r)F_l(r)rdr=\Big[T(F_lF_k{}'-F_kF_l{}')r\Big]_0^\ell\\
&\quad -ED\Big[(F_lF_k{}'''-F_kF_l{}''')r-(F_l{}'F_k{}''-F_k{}'F_l{}'')r+(F_lF_k{}''-F_kF_l{}'')-(F_lF_k{}'-F_kF_l{}')\frac{1}{r}\Big]_0^\ell
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

となるが，固有関数 F_k，F_l は，$r=\ell$ で関数自身とその微係数がゼロとなることから，右辺の初めの 3 項は自動的に消え，残る 2 項も $r=\ell$ のところは消え，

$$
-\rho({\omega_k}^2-{\omega_l}^2)\int_0^\ell F_k(r)F_l(r)rdr=ED\Big[(F_lF_k{}''-F_kF_l{}'')-(F_lF_k{}'-F_kF_l{}')\frac{1}{r}\Big]_{r=0}
\tag{3.20}
$$

となる．ここで，(3.14) 式の固有関数を $r=0$ の近くで展開すると，

$$
F_k(r)=\Big(1-\frac{1}{4}{\mu_k}^2r^2+\cdots\Big)-\frac{J_0(\mu_k\ell)}{I_0(\nu_k\ell)}\Big(1+\frac{1}{4}{\nu_k}^2r^2+\cdots\Big)
\tag{3.21}
$$

となり，これから，

$$
F_k{}''(0)=F_k{}'(r)\frac{1}{r}\Big|_{r=0}
\tag{3.22}
$$

が証明できるので，結局，(3.20) 式の右辺はゼロとなる．したがって，左辺で $\omega_k\neq\omega_l$ のときは，

$$
\int_0^\ell F_k(r)F_l(r)rdr=0
\tag{3.23}
$$

でなければならず，固有関数の直交性が証明される．$\omega_k=\omega_l$ のときは，積分公式 *2

$$
\begin{aligned}
&\int {J_0}^2(\alpha r)rdr=\frac{r^2}{2}\big[{J_0}^2(\alpha r)+{J_1}^2(\alpha r)\big],\qquad \int {I_0}^2(\beta r)rdr=\frac{r^2}{2}\big[{I_0}^2(\beta r)-{I_1}^2(\beta r)\big],\\
&\qquad\qquad\int J_0(\alpha r)I_0(\beta r)rdr=\frac{r}{\alpha^2+\beta^2}\big[\alpha J_1(\alpha r)I_0(\beta r)+\beta J_0(\alpha r)I_1(\beta r)\big]
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

を用いて直接積分してしまう．結果として，固有関数の直交式

$$
\int_0^\ell F_k(r)F_l(r)rdr={N_k}^2\delta_{k,l}
\tag{3.25}
$$

を得る．ここに，規格化定数 ${N_k}^2$ は，

$$
{N_k}^2=\frac{\ell^2}{2}\Big[\Big(2-\frac{{I_1}^2(\nu_k\ell)}{{I_0}^2(\nu_k\ell)}\Big){J_0}^2(\mu_k\ell)+{J_1}^2(\mu_k\ell)\Big]
\tag{3.26}
$$

と与えられる．この計算には，(3.12) の固有値方程式を用いた．これから，$F_k(r)/N_k$ が規格化された固有関数となる．

3.3 初期値問題

ここでは，膜の中心部を持ち上げたときの形を決めるために，方程式 (2.5) の静的な場合を解いてみる．このときは，方程式の左辺をゼロとし，また，このときの変位を $S(r)$ と書くことにして，

$$
\Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\lambda^2\Big)\Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big)S(r)=0
\tag{3.27}
$$

*2 「数学公式 Ⅲ」(岩波全書) P.189 上から 6 番目，P.190 上から 4 番目

となる．ここに，長さの逆数の次元を持つ定数 λ を

$$\lambda = \sqrt{\frac{T}{ED}} \tag{3.28}$$

とおいた．この方程式の一般解は，対数関数，定数，および，0 次の変形 Bessel 関数 I_0，K_0 を用い，長さの次元を持つ a，b，c，d を任意定数として，

$$S(r) = a\log(r/\ell) + b + cI_0(\lambda r) + dK_0(\lambda r) \tag{3.29}$$

と書ける．ここで，$r \to 0$ のとき，対数関数と $K_0(\lambda r)$ は発散してしまうので，前回同様，円形膜の半径 ℓ より小さい r_0 を設定し，それより小さい r に対しては，一定値，

$$S(r) = U_0, \qquad 0 \le r \le r_0 \tag{3.30}$$

とし，$r_0 \le r \le \ell$ に対しては，(3.29) 式を採用し，これに境界条件

$$S(r_0) = U_0, \qquad \left.\frac{dS(r)}{dr}\right|_{r=r_0} = 0, \qquad S(\ell) = 0, \qquad \left.\frac{dS(r)}{dr}\right|_{r=\ell} = 0 \tag{3.31}$$

を課す．ここで，微分式 ${I_0}'(z) = I_1(z)$，${K_0}'(z) = -K_1(z)$ を用いて，これら条件を (3.29) 式に適用すると，

$$\begin{aligned} a\log(r_0/\ell) + b + cI_0(\lambda r_0) + dK_0(\lambda r_0) = U_0, \qquad \frac{a}{r_0} + c\lambda I_1(\lambda r_0) - d\lambda K_1(\lambda r_0) = 0, \\ b + cI_0(\lambda\ell) + dK_0(\lambda\ell) = 0, \qquad \frac{a}{\ell} + c\lambda I_1(\lambda\ell) - d\lambda K_1(\lambda\ell) = 0 \end{aligned} \tag{3.32}$$

となる．この方程式を解いて，a，b，c，d を求めるわけだが，かなり煩雑な式になってしまうので，ここでは要点だけの式にする．まず，無次元定数 P，Q を

$$P = \frac{\ell K_1(\lambda\ell) - r_0 K_1(\lambda r_0)}{\ell r_0\lambda\big[I_1(\lambda\ell)K_1(\lambda r_0) - I_1(\lambda r_0)K_1(\lambda\ell)\big]}, \qquad Q = \frac{\ell I_1(\lambda\ell) - r_0 I_1(\lambda r_0)}{\ell r_0\lambda\big[I_1(\lambda\ell)K_1(\lambda r_0) - I_1(\lambda r_0)K_1(\lambda\ell)\big]} \tag{3.33}$$

と定義しておく．この定義を用いて，a は

$$a = \frac{U_0}{\log(r_0/\ell) + [I_0(\lambda r_0) - I_0(\lambda\ell)]P + [K_0(\lambda r_0) - K_0(\lambda\ell)]Q} \tag{3.34}$$

と求まり，a が求まると c，d は

$$c = Pa, \qquad d = Qa \tag{3.35}$$

となり，c，d が決まると，最後に b は

$$b = -I_0(\lambda\ell)c - K_0(\lambda\ell)d \tag{3.36}$$

と求まる．これら求められた a，b，c，d を (3.29) 式に代入すればよいわけだが，これはあまりに冗長になってしまうので，やめておくことにする．

3.4 最終的な解

変位 $U(r,t)$ の一般解は，これまでに求めた固有関数を重ね合わせることによって得られ，C_k を任意定数として，

$$U(r,t)=\sum_{k=1}^{\infty}C_kF_k(r)\cos(\omega_kt) \tag{3.37}$$

と与えられる．定数 C_k は初期波形で決められる．すなわち，ここでは，$t=0$ における波形を $S(r)$ としているので，この式から，

$$S(r)=\sum_{k=1}^{\infty}C_kF_k(r) \tag{3.38}$$

が成立するように C_k を決めるとよい．両辺に $F_l(r)r$ を掛け，r で積分し，固有関数の直交性 (3.25) 式を用いると，

$$C_k=\frac{1}{{N_k}^2}\int_0^{\ell}F_k(r)S(r)rdr \tag{3.39}$$

と求まるので，これを (3.37) 式に戻し，

$$U(r,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{{N_k}^2}\int_0^{\ell}F_k(r')S(r')r'dr'\Big)F_k(r)\cos(\omega_kt) \tag{3.40}$$

と求められる．

4 $ED\to 0$ の極限では

方程式 (2.5) において，剛性の強さを表す ED の値を小さくした極限では，前回の剛性を入れない解析結果につながるはずである．ここでそのことを確かめてみよう．(3.7) 式で定義される μ, ν は ED が十分に小さいときの漸近形として，

$$\mu\simeq\frac{\omega}{c_0},\qquad\qquad \nu\simeq\lambda \tag{4.1}$$

となる．ここに，c_0 は，剛性が入らないときの通常の波動方程式 (2.1) における波動伝播速度で，

$$c_0=\sqrt{\frac{T}{\rho}} \tag{4.2}$$

で定義される．また，λ は (3.28) 式で定義されたものである．(4.1) 式の μ, ν の積をとると，$\mu\nu=\dfrac{\lambda\omega}{c_0}$ となるが，この式自体は，ED の値に無関係にいつでも成立する式である．

つぎに，固有値，固有関数がどうなるかを見てみよう．そのために，変形 Bessel 関数 $I_0(z)$, $I_1(z)$ の z が十分に大きいときの漸近形を [*3]

$$I_0(z)\simeq\frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\Big(1+\frac{1}{8z}+\cdots\Big),\qquad I_1(z)\simeq\frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\Big(1-\frac{3}{8z}+\cdots\Big) \tag{4.3}$$

と引用しておく．ここで，$ED\to 0$ の極限をとると，(4.1) 式から，

$$\mu\to\frac{\omega}{c_0},\qquad \nu\to\infty \tag{4.4}$$

[*3] 「数学公式 Ⅲ」(岩波全書) P.173

となり，さらに，(4.3) 式から，

$$\frac{I_1(\nu\ell)}{I_0(\nu\ell)} \to 1 \tag{4.5}$$

となるので，(3.12) 第 2 式の固有値方程式は，

$$J_0(\omega\ell/c_0) = 0 \tag{4.6}$$

となる．これは，前回に求めたもので，$\omega\ell/c_0$ が Bessel 関数 J_0 のゼロ点であればよい．また，このときの固有関数は，(3.13) 式から，$A = 1$，$B = 0$ となるので，(3.14) 式の固有関数は

$$F_k(r) = J_0(\omega_k r/c_0) \tag{4.7}$$

となり，(3.26) 式の規格化定数は，

$${N_k}^2 = \frac{\ell^2}{2}{J_1}^2(\omega_k\ell/c_0) \tag{4.8}$$

となる．これらの結果はすべて前回に求めたものと一致する．

さらに，この $ED \to 0$ の極限では，$\lambda \to \infty$ となるので，(3.33) 式の P, Q は両方ともゼロとなり，(3.34) (3.35) (3.36) から，

$$a = \frac{U_0}{\log(r_0/\ell)}, \quad c = 0, \quad d = 0, \quad b = 0 \tag{4.9}$$

となるので，初期波形の $S(r)$ は

$$S(r) = \begin{cases} U_0, & 0 \le r < r_0 \\ \dfrac{U_0}{\log(r_0/\ell)}\log(r/\ell), & r_0 < r \le \ell \end{cases} \tag{4.10}$$

となって，これも前回のものと一致する．

5 おわりに

「はじめに」のところで述べたように，このシリーズは，初め，弦の振動を初期値問題から解くことで始まった．ところが，ピアノを初め，ハープやヴァイオリンの弦は，ナイロンや金属で出来ているので，少なからず剛性を持ったものと考えられる．物理でいう弦とは，まったく剛性を持たない鎖のようなものを指すので，弦の波動方程式を解いても現実の弦楽器の弦には適用できないのではと考えだし，剛性を考慮した弦の振動方程式を解くことになった．今回はそれをさらに発展させ，弦という 1 次元の発音体を，膜という 2 次元の発音体に変えた場合の解析を試みた．しかし，膜の振動というとドラムや太鼓くらいしか思いつかず，これらの膜は普通，牛革で作られているので，それほど剛性が問題になるとは考えにくい．という訳で，今回のように剛性を考慮した膜の振動解析をやってもただちには実用に供さないのかもしれない．膜とは言えないかもしれないが，金属で出来たシンバルのようなものにはここでの解析が使えるかもしれないが，この場合はまた別の問題が生じるために，ここでは議論せずに次回まわしにすることにする．

「なぜ $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = 1$ でないのか」へのコメント

中西　襄[1], 矢野　忠[2]

A Comment on "Why does $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = 1$ not hold ?"

Noboru NAKANISHI[3] and Tadashi YANO[4]

1　コメント

「数学・物理通信」7-7 の貴論文を拝見しました．

最後の補遺 2 の推論を n 変数に拡張すれば，陰関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ に対して

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial x_j}{\partial x_{j+1}}\right)_{\text{all others}} = (-1)^n, \quad (x_{n+1} \equiv x_1) \tag{1.1}$$

が導けますね．この式ならば「Y さん」にも納得していただけるのでは？（中西）

2　コメントの補足

コメントを有難うございます．こういう一般式を考えるなどということはまったく思いつきもしませんでした．あまりに簡潔なコメントなので，少し補足をさせてください．

陰関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ に対して，全微分 df をとると

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n = 0 \tag{2.1}$$

である．このとき

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_{i+1}} = -\frac{f_{i+1}}{f_i}, \quad \text{ここで} \quad f_i \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{2.2}$$

ただし，$x_{n+1} \equiv x_1$ とサイクリックに定義してあるから

$$\frac{\partial x_n}{\partial x_{n+1}} = \frac{\partial x_n}{\partial x_1} = -\frac{f_1}{f_n} \tag{2.3}$$

である．

したがって，

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial x_1} = \left(-\frac{f_2}{f_1}\right)\left(-\frac{f_3}{f_2}\right)\cdots\left(-\frac{f_n}{f_{n-1}}\right)\left(-\frac{f_1}{f_n}\right) = (-1)^n \tag{2.4}$$

となる．

n が偶数のときは +1 で，奇数のときは –1 となっていると答えれば，Y さんが納得されただろうという中西先生のお考えである．

[1]京都大学名誉教授
[2]元愛媛大学
[3]nbr-nak@trio.plala.or.jp
[4]yanotad@earth.ocn.ne.jp

中西先生のコメントにコメントされた私の名前が載るのはおかしい．補足を書いたのが私だったことから共著にとのご提案をいただいた．アイディアはあくまで中西先生のもので，私は単なる通訳である．

ところで，今年（2017 年 10 月 9 日）この疑問を私に出された Y （山川浩二）さんが亡くなられた．ここに謹んで哀悼の意を表します.（矢野）

編集後記

読者の皆様，お元気でお過ごしのことと存じます．

こちら伊予路は，暑い夏が長引き，それから急に寒くなったような天候で，冷房からあまり間をおかずに，暖房がほしくなるといった気候です．

まえおきが長くなってしまった．本論に入ろう．今回は 4 編の論文と 1 編のコメントを掲載できた．いうまでもなくいずれも力作ばかりでこの分野に関心をもつ読者には貴重な文献になるであろう．

一般に理論物理学はその意味するところを数学でもって表現するために，書かれた論文だけを見ると，数学なのか物理学なのか判別に迷う場合がすくなくない．しかし，今号の冒頭の論文は素粒子論の世界的権威による執筆であるから，物理学の一断面であろうとは推察できる．しかし，実際にこの論文を拝読してみると，これは三角関数の有限和に関する重要な数学の公式である．また，今回も投稿していただいたようにオペレーター法，いわゆる演算子法も数学と物理学とのはざまにある．

上に述べたことからもわかるが，数学と物理学とは，切っても切れない深い縁で結ばれている．そのために，このサーキュラーも「数学・物理通信」と名づけたくらいである．

とはいっても，物理学とは直接関係しない解析学の初歩的ではあるが，重要な例を扱った論文を作成してみたい．その完成が次巻の締め切りに間に合えばいいのだがと考えている．

今年も残すは一月となりましたが，北朝鮮や大相撲等のいろいろな問題を抱えつつ過ぎ去ろうとしております．世界平和とこのサーキュラーの発展を祈りつつ，編集後記を閉じたいと思います．

よいお年を皆様に．来年もご投稿をお願いします．(2017.11.25)

（新関章三）