

数学・物理通信

8卷1号 2018年3月

編集 新関章三・矢野 忠

2018年3月15日

目次 (Contents)

1. 非アーベル ド・ラム理論とゲージ場の分数冪	浅田 明	2
2. 一般相対論周辺 (宇宙のダーク・サイドなど)	江沢 康生	11
3. Bessel 関数と金属円板の振動 (2)	世戸 憲治	19
4. 編集後記	新関章三	28
1. Non Abelian de Rham Theory and Fractional Powers of Gauge Field	Akira ASADA	2
2. Around the General Relativity (The Dark Side of the Universe etc.)	Yasuo EZAWA	11
3. Bessel Function and the Oscillation of a Metal Disk (2)	Kenji SETO	19
4. Editorial Comments	Shozo NIIZEKI	28

非アーベル ド・ラム理論と ゲージ場の分数冪

Non Abelian de Rham Theory and Fractional Powers of Gauge Field

浅田 明¹

Akira ASADA²

はじめに

非アーベル ド・ラム理論は (線形群 G とそのリー環 \mathfrak{g} に値を取る可積分接続の芽の層 \mathcal{M}_d の (非アーベル) コホモロジー論である ([3]. cf.[1],[10]). $p \geq 2$ のときは $H^p(M, \mathcal{M}_d)$, M は可微分多様体, の定義は面倒で右手系と左手系の区別があるが $H^1(M, \mathcal{M}_d)$ の定義は比較的簡単でゲージ (G -バンドル) の接続と曲率の非アーベル コホモロジー的定式化を与える.

$H^1(M, \mathcal{M}_d)$ は以下のようにチェック式定義ができる. $U = \{U\}$ を開被覆とし $\omega_{UV} = g_{UV}^{-1} dg_{UV}$ としたとき

$$\delta(\{\omega_{UV}\})_{UVW} = \omega_{VW} - \omega_{UW} + g_{VW}^{-1} \omega_{UV} g_{VW}, \omega_{UV} = g_{UV}^{-1} dg_{UV}$$

でコバウンダリー δ を定義する. $\delta\{\omega_{UV}\}_{UVW} = 0$ は

$$g_{UV} g_{VW} g_{WU} = c_{UVW}; \text{定数}$$

と同値である. バンドル (ゲージ) でなく ($c_{UVW} \neq 1$ でなく) 意味のあるものがあるかは問題だったがバンドルの分数冪がこのようなものの例であることを示すのが本稿の目的である.

見やすい例として $\{g_{UV}\}$ がライン・バンドルであれば p が非整数のとき

$$g_{UV}^p g_{VW}^p g_{WU}^p = 1^p (\neq 1)$$

となって (U, V, W ごとに 1^p を定めて) $\{g_{UV}^p\}$ はバンドルではないが非アーベル ド・ラム理論の意味では $H^1(M, \mathcal{M}_d)$ の元を与える (一意的ではない). M がリーマン面で p が有理数であれば $\{g_{UV}^p\}$ は M の分岐した有限葉被覆の上のライン・バンドルと解釈できる. 分数量子ホール効果は相互作用のある多粒子系を扱うがその幾何学的背景としてライン・バンドルの分数冪がつかえないかは問題である (cf.[8],[9]). 使えれば各粒子はそれぞれの被覆の上を動き分岐点で相互作用すると言う描像が考えられるがどうだろうか?

非アーベル・ゲージでは $g_{UV}^p g_{VW}^p \neq (g_{UV} g_{VW})^p$ だから分数冪の定義自体が問題である. ここでは M の部分空間 S があって $M \setminus S$ で $\xi = \{g_{UV}\}$ が自明となる場合を考える. この場合

$$\xi|_{M \setminus S} = \{h_U h_V^{-1}\}$$

として $h_U^p h_V^{-p} = cI$ を仮定すれば $\{h_U^p h_V^{-p}\}$ から $M \setminus S$ の上の非アーベル ド・ラム コサイクルが得られる. これを ξ の分数冪 (の替わり) とすればその非アーベル ド・ラム理論の意味での曲率は $M \setminus S$ では消えるがカレントとして S に台を持つ. これから意味の有ることが出ないかは興味がある.

ゲージ場の分数冪は切断として分数冪級数が現れる可能性があり これから分数冪微積や微分形式の分数冪を考えられないかは問題になる. これについて問題提起だけが最後の5節でふれる.

¹元信州大学

²asada-a@poporo.ne.jp

目次

1. 1次元非アーベル ド・ラム集合
2. ラインバンドルの分数冪
3. 非アーベル ゲージの「分数冪」
4. 「分数冪」についての補足
5. ゲージ場の分数冪と分数冪の級数

1 1次元非アーベル ド・ラム集合

M を可微分多様体とする. M の上の行列 ($M(n, \mathbb{C})$) に値を取る可微分 1-形式 ω で可積分; $d\omega + \omega \wedge \omega = 0$ となるものの芽の層を \mathcal{M}_d , $G = GL(n, \mathbb{C})$ とし G に値を取る定数関数と可微分関数の芽の層を $\mathcal{G}_t, \mathcal{G}_d$ とする. 定義から

$$0 \rightarrow \mathcal{G}_t \xrightarrow{\iota} \mathcal{G}_d \xrightarrow{\rho} \mathcal{M}_d \rightarrow 0 \quad (1)$$

は (広義で) 完全列である. ただし $\rho g = g^{-1}dg$, $\iota(g) = g$ である.

注意. ρ でなく $\rho_R: \rho_R g = dg \cdot g^{-1}$ をつかい $d\omega - \omega \wedge \omega = 0$ となる芽の層 \mathcal{M}_R をつかっても同様な議論ができる. $g^*(x) = g^{-1}(-x)$ とすれば

$$\rho g^*(x) = (\rho_R g)(-x)$$

だから \mathcal{M} と \mathcal{M}_R は同様に扱える.

コホモロジー集合 $H^1(M, \mathcal{G}_t), H^1(M, \mathcal{G}_d)$ は平坦な G -バンドル, 可微分 G -バンドルの同値類の集合である. 特に $H^1(M, \mathcal{G}_t) \cong \text{Hom}(\pi_1(M), G)$ であり完全列

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(M, \mathcal{G}_t) \xrightarrow{\iota} H^0(M, \mathcal{G}_d) \xrightarrow{\rho} H^0(M, \mathcal{M}_d) \rightarrow \\ \xrightarrow{\delta} H^1(M, \mathcal{G}_t) \xrightarrow{\iota} H^1(M, \mathcal{G}_d) \end{aligned} \quad (2)$$

が得られる. なお $\delta: H^0(M, \mathcal{M}_d) \rightarrow H^1(M, \mathcal{G}_t)$ は $\omega|_U = \rho(h_U)$ として $\delta(\omega) = \{h_U^{-1}h_V\}$ であたえられる. $\delta: H^0(M, \mathcal{M}_R) \rightarrow H^1(M, \mathcal{G}_t)$ では $\omega|_U = \rho_L(h_U)$ として $\delta(\omega) = \{h_U h_V^{-1}\}$ である.

なお $\pi_1(M)$ を M の基本群とすれば $H^1(M, \mathcal{G}_t) \cong \text{Hom}(\pi_1(M), G)$ であり $\delta(\omega)$ (による $\pi_1(M)$ の像) は方程式

$$dg = g\omega$$

のモノドロミー群である ([3], cf [10]).

注意. ρ を $\rho_R g = dg \cdot g^{-1}$ と取れば $\omega|_U = \rho_R(h_U) (= dh_U \cdot h_U^{-1})$ として $\delta(\omega) = h_U^{-1}h_V$ で与えられる. これはボックススタイン写像 δ によって右手系から左手系への変換が起きることを示している (cf.[3]).

$H^1(M, \mathcal{M}_d)$ は集合 $\{\omega_{UV}; \omega_{UV} = \rho(g_{UV}); g_{UV}g_{VW}g_{WU} = c_{UVW},$
; c_{UVW} は定数, を同値関係

$$\{\omega_{UV}; \omega_{UV} = \rho(g_{UV})\} \sim \{\omega'_{UV} = \rho(g'_{UV})\}; g'_{UV} = h_U g_{UV} h_V^{-1}, \quad (3)$$

で割った集合だが $c_{UVW} \neq 1$ なので $\{h_U\}$ は任意ではなく

$$h_U c_{UVW} h_U^{-1} = \text{定数} \quad (4)$$

の制約がある. 更に $\{c_{UVW}\}$ が 2 次元の非アーベル集合の元になることもしめされ完全列

$$H^1(M, \mathcal{G}_d) \xrightarrow{\rho} H^1(M, \mathcal{M}_d) \xrightarrow{\delta} H^2(M, \mathcal{G}_t) \quad (5)$$

がえられる.

1 の分解とコサイクル条件 $\omega_{VW} - \omega_{UW} + g_{VW}^{-1} \omega_{UV} g_{VW} = 0$ から

$$\omega_{UV} = \theta_V - g_{UV}^{-1} \theta_U g_{UV} \quad (6)$$

という分解が出来る (接続の存在). これから「曲率」を

$$\Theta_U = d\theta_U + \theta_U \wedge \theta_U \quad (7)$$

で定義すればチャーン・ベユの構成が適用できて $H^1(M, \mathcal{M}_d)$ の元 $\xi = \{\omega_{UV}\}$ の特製類 $c^p(\xi) \in H^{2p}(M, \mathbb{C})$ が定義される. 一般に $c^p(\xi) \notin H^{2p}(M, \mathbb{Z})$ である ([3]).

非整の特性類は数学ではあまり表れないが物理では分数量子ホール効果などいろいろあらわれるようである ([8].[9].[11]). これらに数学的位置づけを与えようというのが非アーベル ド・ラム理論の研究を始めた動機だった.

$\theta \in H^0(M, \mathcal{M}_d)$ にたいしても $\beta^p(\theta)$ を

$$\frac{(-1)^{p-1}(p-1)!}{(2\pi i)^p(2p-1)!} \text{Tr} \theta^{2p-1} \quad (8)$$

のコホモロジー類 ($\in H^{2p-1}(M, \mathbb{C})$) として定義すれば $\theta = \rho(g)$ と M で書けるとき

$$\beta^p(\theta) = g^*(e^{2p-1}) \in H^{2p-1}(M, \mathbb{Z}),$$

e^{2p-1} は $GL(n, \mathbb{C})$ (あるいは $U(n)$) のコホモロジー環の $2p-1$ 次元の生成元である. よって $\beta^p(\theta)$ を $\text{mod. } H^{2p-1}(M, \mathbb{Z})$ での $\beta^p(\theta)$ の $H^{2p-1}(M, \mathbb{C}^*)$ の元とするとこれは θ が M で大域的積分を持つための障害になる (チャーン・サイモン型特性類).

2 ラインバンドルの分数冪

$U \cap V$ は単連結とし $\xi = \{g_{UV}\}$ を複素ラインバンドルとすれば 任意の非整数 p について

$$g_{UV}^p g_{VW}^p g_{WU}^p = 1^p (= e^{2\pi i n_{UVW}}), \quad (9)$$

n_{UVW} は整数, である. よって $\xi^p = \{\rho(g_{UV}^p)\}$ は 1-次元非アーベル ド・ラム コサイクルになる. g が (C^* の値をとる) 関数なら

$$\rho(g^p) = p\rho(g)$$

だから $\{\omega_{UV}\}; \omega_{UV} = \rho(g_{UV})$ で与えられる非アーベル ド・ラム コサイクルとの間には

$$\{\rho(g_{UV}^p)\} = p\{\omega_{UV}\} \quad (10)$$

の関係がある.

(10) から $\{\theta_U\}$ が ξ の接続なら $\{p\theta_U\}$ が ξ^p の接続になる. よって

定理. ξ を複素ラインバンドル, $c(\xi)$, $c(\xi^p)$ を ξ, ξ^p の特性類とすれば

$$c(\xi^p) = p c(\xi) \quad (11)$$

である.

逆に任意の 2-次元コホモロジー類 $c = \langle \Theta \rangle$, θ は M の 2 次の閉形式が与えられたとし

$$\Theta|_U = d\theta_U$$

とすれば

$$\theta_U - \theta_V = df_{UV}$$

となる関数 (族) $\{f_{UV}\}$ が存在し $f_{UV} + f_{VW} + f_{WU} = c_{UVW}$ は定数である. よって $g_{UV} = e^{2\pi i f_{UV}}$ とおけば $\{g_{UV}\}$ は c_{UVW} が整数の時に限りラインバンドルを与える (量子化条件). しかし

$$g_{UV}g_{VW}g_{WU} = e^{2c_{UVW}\pi i}$$

は定数だから $\{g_{UV}\}$ は (\mathbb{C}^* にかんする) 1-次元非アーベルド・ラム類である. よって

定理. M の任意の複素係数 2 次元コホモロジー類 c にたいしそれを特性類とする 1 次元非アーベルド・ラム類が存在する. これがラインバンドルであるためには c が整なコホモロジー類 ($c \in \iota^*(H^2(M, \mathbb{Z}))$) であることが必要充分である.

S を M の部分空間で局所的には座標系の一部で $x_1 \cdots x_m = 0$ で定義されるとし ξ は $M \setminus S$ で自明とする (M が代数多様体, ξ が複素解析的バンドルとすれば ξ は M の因子で定義されるからこのような S が存在する可能性は大きい (cf.[6]). 特に M がリーマン面なら常に存在する).

$\xi = \{g_{UV}\}$ は $M \setminus S$ で自明だが さらに M の開被覆 $\mathcal{U} = \{U\}$ と各 $U \setminus S \cap U$ で定義された \mathbb{C}^* の値をとる可微分関数 $h_U(x)$ が存在して

$$g_{UV}(x)h_V(x) = h_U(x), \quad x \in (U \cap V) \setminus S$$

となる事を仮定する. この仮定は M が代数多様体で S が非特異なら満たされる. 仮定から

$$g_{UV}^p(x)h_V^p(x) = h_U^p(x), \quad x \in (U \cap V) \setminus S,$$

である ($g_{UV}^p = h_U^p h_V^{-p}$). p が有理数 r/q であれば $x_1^{1/q}, \dots, x_m^{1/q}$ に局所座標をとりかえれば (M の S で分岐する q -葉の被覆 $\tilde{M}; \pi: \tilde{M} \rightarrow M$ を考えれば $\pi^*(\xi^p)$ は \tilde{M} のライン・バンドルになる.

この例から S が存在すれば複素ライン・バンドルの分数冪は M の S で分岐する分岐被覆の上の複素ライン・バンドルとみなせることが推測されるが厳密な議論は課題である.

3 非アーベル ゲージの「分数冪」

$\xi = \{g_{UV}\}$ がライン・バンドルであれば $(g_{UV}g_{VW})^p = g_{UV}^p g_{VW}^p$ だが非アーベルゲージなら ($g^p = e^{p \log g}$ として)

$$g_{UV}^p g_{VW}^p \neq (g_{UV}g_{VW})^p$$

だから分数冪はそのままでは意味がない. 分数冪に替わる物として次のような構成を提案する.

提案. ξ を M の上の G -バンドル, S を M の低次元部分空間で $M \setminus S$ で ξ が自明になるとする. さらに M の開被覆 $\mathcal{U} = \{U\}$ と $U \setminus S$ で定義された G に値をとる可微分関数 $h_U(x)$ がすべての $U \in \mathcal{U}$ について存在し

$$g_{UV}(x) = h_U(x)h_V(x); \quad x \in (U \cap V) \setminus S,$$

となると仮定する. この時定数行列 P にたいし

$$g_{UV}^{[P]}(x) = h_U^P(x)h_V^{-P}(x), \quad x \in (U \cap V) \setminus S \quad (12)$$

と定義する. ただし $g(x)^P = e^{P \log g(x)}$ である. さらに $g_{UV}^P(x)$ が $U \cap V$ から G への可微分写像であれば ξ の「分数冪」 $\xi^{[P]}$ を

$$\xi^{[P]} = \{g_{UV}^{[P]}(x)\} \quad (13)$$

で定義する.

この定義では $\xi^{[P]}$ は S と $\{h_U\}$ に関する. $\{g_{UV}\}$ が固定されても $h_U h_V^{-1} = h'_U h'_V^{-1}$ であれば $h'_U^{-1} h_U = h_V^{-1} h'_V$ だから $h'_U^{-1} h_U = f|_U, f: M \rightarrow G$ である. よって

$$h_U = h'_U f$$

である. よって

補題. $\xi = \{g_{UV}\}$ の $X \setminus S$ での自明化 $h_U h_V^{-1}$ は ある自明化 $g_{UV} = \tilde{h}_U \tilde{h}_V^{-1}$ を与えたとき

$$h_U = f_U \tilde{h}_U f; \quad f_U: U \rightarrow G, f: M \rightarrow G \quad (14)$$

と表される.

しかし一般に $(f_U h_U f)^P = f_U^p h_U^p f^P$ は成立しないのでこれから $\xi^{[P]}$ がどう $\{h_U\}$ の選び方に関するかしらべるのは今後の問題である.

注意 $H^*(M, \mathbb{Z})$ が自由アーベル群なら M の上の G -バンドルはそのチャーン類 $c(\xi)$ できまる. $c(\xi)$ が M の部分空間 S_1, \dots, S_m によって $\sum_{i=1}^m n_i S_i$ のコホモロジー類となるときは留数の完全列

$$\dots \rightarrow H^p(M, \mathbb{C}) \xrightarrow{\iota} H^p(M \setminus S) \xrightarrow{res} R^{p-1}(S) \xrightarrow{\delta} H^{p+1}(M, \mathbb{C}) \rightarrow \dots$$

(S に特異点があれば $R^{p-1}(S)$ の定義は面倒だが $S = \cup_{i=1}^m S_i$ が余次元 2 の非特異部分多様体であれば $R^{p-1}(S) = H^{p-1}(S, \mathbb{C})$, である. cf [2]). から $S = \cup_{i=1}^m S_i$ と採れば $H^*(M \setminus S, \mathbb{Z})$ が自由アーベル群であるとき $\xi|(M \setminus S)$ は自明になる. とくに M がコンパクト リーマン面ならこの方法で S を与えることができる.

$P = pI, p \in \mathbb{C}, I$ は単位行列のときは

$$g_{UV}^{[P]} = g_{UV}^{[p]} \quad (15)$$

と書く. また $\log h_U = f_U$ を定めれば $h_U^{-1} = e^{-f_U + C_U}; e^{C_U} = I, f_U C_U = C_U f_U$ であり C_U は定数行列である. このとき

$$g_{UV}^{[p]} g_{VW}^{[p]} g_{WU}^{[p]} = h_U^p h_V^{-p} h_V^p h_W^{-p} h_W^p h_U^{-p} = h_U^p e^{-pC_V} e^{-pC_W} h_U^{-p}$$

となるから

補題. $f_U C_V = C_V f_U$ ($h_U e^{C_V} = e^{C_V} h_U$) がすべての U, V について成り立てば $\xi^{[p]} = \{g_{UV}^{[p]}\}$ は非アーベル ド・ラム コサイクルである. 特に $C_U = c_U I, c_U \in \mathbb{C}$ であれば $\xi^{[p]}$ は非アーベル ド・ラム コサイクルになる.

$\xi = \rho \otimes \tau, \rho$ はライン バンドル, ρ は自明なバンドルとすれば この補題の仮定をみたく.. しかしこの場合は $\xi = \{g_{UV}(x)\}$ として $g_{UV}(x) = f_{UV}(x)I, f_{UV}(x): U \cap V \rightarrow \mathbb{C}^*$ だから任意の行列 P について $g_{UV}^P(x)$ が定義できて

$$g_{UV}^P(x) g_{VW}^P(x) g_{WU}^P(x) = e^{2n_{UVW} \pi i P}$$

となるから $\xi^{[P]}$ を考える必用がない. この例は非可換ゲージではないのでそれ以外にどのような例があるかは探す必要がある.

$C_{UV} = c_{UV} I$ のときは

$$g_{UV}^{[p]}(x) g_{VW}^{[p]}(x) g_{WU}^{[p]}(x) = c_{UVW} I$$

だから $\xi^{[p]}$ は非アーベル ド・ラム コサイクルとしては特別なものしかあらわさない. P や C_{UV} に一般の行列をとってあらわされる $x_i^{[P]}$ が何処まで一般の非アーベル ド・ラム コサイクルをあらわすかは課題である. 一方 $\xi^{[p]}$ についてはラインバンドルの時と同様に p が有理数なら (適当な仮定で) M の $\$ S \$$ で分岐する有限葉の被覆空間の上のバンドルとみなせる.

$\xi^{[p]} = \{h_U^p h_V^{-p}\}$ だから $M \setminus S$ では

$$\theta_U = dh_U^p (h_U^{-p})$$

が $\xi^{[p]}$ の接続になる. $M \setminus S$ では $d\theta - \theta \wedge \theta = 0$ だが M のカレントとして $d\theta, \theta \wedge \theta$ が意味を持てば $d\theta - \theta \wedge \theta$ は S に台をもつカレントになる. これから $\xi^{[p]}$ の特性類は S のコサイクルで実現されることが推測される. 厳密な議論は課題である.

4 「分数冪」についての補足

前節の「分数冪」はいろいろ不十分なところがある. この節ではいくつか補足的な議論をする.

仮想特性類.

ξ に付随した旗多様体 $F_n = U(n)/T^n$ をファイバーとする M 上のバンドルの全空間を $M_F, \pi : M_F \rightarrow M$ とする. このとき

$$\pi^*(\xi) \cong \tau_1 \oplus \cdots \oplus \tau_n$$

τ_i はラインバンドル, である. τ_i の特性類を $c(\tau_i) \in H^2(M_F, \mathbb{C})$ とし $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{C}^n$ とする. このとき

$$\prod_{i=1}^n (1 + p_i c(\tau_i)) = 1 + \sum_{q=1}^n c^q(\mathbf{p}; \tau_1, \dots, \tau_n) \quad (16)$$

とすれば $c^q(\mathbf{p}; \tau_1, \dots, \tau_n) \in H^{2q}(M_F, \mathbb{C})$ はワイル群の $H^*(M_F, \mathbb{C})$ への作用で不変だから

$$c^q(\mathbf{p}; \tau_1, \dots, \tau_n) = \pi^*(c^q(\xi^{(\mathbf{p})})) \quad (17)$$

となる $H^{2q}(M, \mathbb{C})$ の元 $c^q(\xi^{(\mathbf{p})})$ がすべての $q; 1 \leq q \leq n$ についてただ一つ存在する (cf.[6]). $p_i c(\tau_i) = c(\tau_i^{p_i})$ だから

主張. $c^q(\xi^{(\mathbf{p})}), 1 \leq q \leq n$, は ξ の仮想 \mathbf{p} 冪の特製類である.

$\xi^{(\mathbf{p})}$ が M の非アーベル ド・ラム コサイクルとして存在するかは解らない. もし $\omega \in H^1(M, \mathcal{M}_d)$;

$$\pi^*(\omega) = (\tau_1)^{p_1} \oplus \cdots \oplus (\tau_n)^{p_n}$$

となる ω が存在すれば $\xi^{(\mathbf{p})} = \omega$ と定義してよい. これが実現出来るか, また存在しても一意的かは課題である.

M が複素多様体で ξ が複素解析的バンドルであるときはこれまでと同じ議論を複素解析的カテゴリーで出来る. しかしこのときは $F_n = GL(n, \mathbb{C})/\Delta(n, \mathbb{C})$ と取る必要がある. このときは解析的バンドルとして $\pi^*(\xi)$ はラインバンドル τ_1, \dots, τ_n の直和でなく複合拡大; $\xi_1 * \xi_2$ を ξ_1 の ξ_2 による拡大として

$$\pi^*(\xi) \cong \tau_1 * \cdots * \tau_n$$

となる. よってラインバンドル τ_1 の τ_2 による拡大があるとき $\tau_1^{p_1}$ の $\tau_2^{p_2}$ による拡大が非アーベル ド・ラム コサイクルとして (複素解析的カテゴリーで) 定義できるかが問題となる.

キャンペルーハウスドルフの公式との関係

非アーベル ゲージの分数冪の定義がうまくできないのは G が可換でなければ: $U \rightarrow G, g: U \rightarrow G$ のとき $f^p g^p = (FG)^p$ が必ずしも成立しないからである. この障害は (U が小さいとして) $\log F = f, \log G = g$ とすればキャンベル-ハウスドルフの公式から

$$FG = e^f e^g = e^{f+g+CH(f,g)}$$

となるので $CH(f,g)$ で与えられる. $F^p G^p = e^{p(f+g)+CH(pf,pg)}$;

$CH(pf,pg) = \sum_{p \geq 2} p^n CH_n(f,g)$ である. よって $F^p G^p = (FG)^p, p \in \mathbb{C}$ が成立するには $[f,g] = 0$ が必要充分である.

$FGH = I$ であれば

$$\begin{aligned} FGH &= e^{f+g+CH(f,g)} e^h = e^{f+g+h+CH(f,g)+CH(f+g+CH(f,g),h)} \\ &= e^f e^{h+g+CH(g,h)} = e^{f+g+h+CH(g,h)+CH(f,g+h+CH(g,h))} = e^N \end{aligned}$$

$e^N = I$, 単位行列, である. これから ($FGH = I$ でなくても)

$$\begin{aligned} &CH(f,g) + CH(f+g+CH(f,g),h) \\ &= CH(g,h) + CH(f,g+h+CH(g,h)) \end{aligned} \quad (18)$$

が得られる.

$p \in \mathbb{C}$ であれば

$$F^p G^p H^p = e^{p(f+g+h)+CH(pf,pg)+CH(pf+pg+CH(pf,pg),ph)}, \quad (19)$$

$$(FGH)^p = e^{p(f+g+h)+pCH(f,g)+p(CH(f+g+CH(f,g),h))} \quad (20)$$

である. $FGH = I$ (または定数行列) であれば

$$\begin{aligned} &d_x(f+g+h+p^{-1}(CH(pf,pg)+CH(pf+pg+ \\ &+CH(pf+pg+CH(pf,pg),ph))))|_{p=1} = 0, \end{aligned}$$

である. $f+g+h$ は p に関係しないので $p \neq 1$ でこの式が成立する可能性は低い. 言い換えれば本質的にアーベル ゲージである場合を除けばゲージの分数冪から直接非アーベル ド・ラム コサイクルを得る可能性は低いように思われる. しかし G_d に値をとる 2-コチン $g_{UV}; g_{UV} = e^{f_{UV}}$ のとき

$$\begin{aligned} &d(f_{UV} + f_{VW} + f_{WU} + cH(f_{UV} + f_{VW} + CH(f_{UV} + f_{VW} + \\ &+ CH(f_{UV} + f_{VW} + CH(f_{UV} + f_{VW} + CH(f_{UV}, f_{VW}), f_{WU}))) = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

が ド・ラム類の対数が考えられるかと言う問題に役立つかもしれない.

5 ゲージ場の分数冪と分数冪の級数

この節では $M \setminus S$ が (複素) n -次元の平坦なスタイン多様体であると仮定する (cf.[7]).

仮定から $M \setminus S$ には独立で $M \setminus S$ で定義された正則関数 z_1, \dots, z_n が存在する. p_1, \dots, p_n を自然数とすれば z_i^{1/p_i} は S に分岐点と特異点をもつ $M \setminus S$ の多値関数である. $\xi|(M \setminus S)$ が自明であれば $(\xi \otimes \Lambda T^*(M))^{[1/p]}|(M \setminus S)$ の解析的切断は $z_1^{1/p_1}, \dots, z_n^{1/p_n}$ の解析的な関数である. ただし $\Lambda T^*(M)$ は M の複素解析的) 微分形式のバンドルであり $1/\mathbf{p} = (1/p_1, \dots, 1/p_n)$ である. 従って $M \setminus S$ で ξ に係数をもつ (複素解析的) 微分形式を考えるときは $z_1^{1/p_1}, \dots, z_n^{1/p_n}$ を変数として扱える. ただし x_i^{1/p_i} は S に分岐点だけでなく特異点を持つ可能性が有る

ので係数となる関数は $z_1^{1/p_1}, \dots, z_n^{1/p_n}$ のテーラー級数でなくローラン級数を考える必要がある。しかし分数冪微分の観点からは以下に説明するようにここでは自然である。

簡単の為 $n = 1$ とし $z^{1/p}$ の級数を考える。

$$\frac{d^{1/p}}{dz^{1/p}} z^{m/p} = \frac{\Gamma(1 + m/p)}{\Gamma(1 + (m-1)/p)} z^{(m-1)/p}$$

だから $m = Np$, N は負の整数でなければ $\frac{d^{1/p}}{dz^{1/p}} z^{mp}$ は定義でき $m = (1-N)p$, N は自然数でなければ $\frac{d^{1/p}}{dz^{1/p}} z^{m/p} \neq 0$ である。したがって $z^{1/p}$ の冪級数環 $\mathbb{C}[[z^{1/p}]]$ は分数冪微分 $\frac{d^{1/p}}{dz^{1/p}}$ の作用では閉じないがローラン級数環を $\mathbb{C}_L[[z^{1/p}]]$ と書けば

$$\frac{d^{1/p}}{dz^{1/p}} : \mathbb{C}_L[[z^{1/p}]] \rightarrow \mathbb{C}_L[[z^{1/p}]] \quad (22)$$

である。ただし z^{-n} には $\frac{d^{1/p}}{dz^{1/p}}$ は定義できないし $\frac{d^{1/p}}{dz^{1/p}}$ の像になる事もない。

$$\frac{d^{q/p}}{dz^{q/p}} z^{m/p} = \frac{\Gamma(1 + m/p)}{\Gamma(1 + (m-q)/p)} z^{(m-q)/p}$$

だから $\frac{d^{q/p}}{dz^{q/p}}$ も $\mathbb{C}_L[[z^{1/p}]]$ から $\mathbb{C}_L[[z^{1/p}]]$ への写像となる。
 $(m-1)/p, \dots, (m-q+1)/p$ がすべて負の整数でなければ

$$\frac{d^{q/p}}{dz^{q/p}} = \left(\frac{d^{1/p}}{dz^{1/p}} \right)^q$$

だが $(m-j)/p$ が $1 \leq j \leq q-1$ のどれかで負の整数となればこの式は成り立たない。これは $\frac{d^{1/p}}{dz^{1/p}} z^{1/p-m} = 0$ から起きる。しかしこのような不都合だけでなく この式から

$$\frac{d^{1/p}}{dz^{1/p}} e_p(\lambda^p z) = \lambda e_p(\lambda^p z), \quad (23)$$

$$e_p(\lambda^p z) = \sum_{m \geq 1-p} \frac{1}{\Gamma(1 + m/p)} (\lambda^p z)^{m/p} \quad (24)$$

などの有用な公式がえられる (cf.[4]). 一般化ミッターハ・レフラー関数 (cf.[5])

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k/\rho)}$$

を使えば $k = m + p - 1$ とおいて $e_p(z) = z^{p-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k/p}}{\Gamma(1 - 1/p + k/p)}$ だから

$$e_p(z) = z^{1-1/p} E_p(z^{1/p}; 1 - 1/p) \quad (25)$$

と書ける。

問題. これらの計算をつかって $\Lambda T^*(M)^{[p]} | M \setminus S$ に微分形式の分数冪を定義できないか? またそれから M の微分形式の分数冪が定義できないか?

$\xi^{[c]}$ は $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$ は c_i が無理数でも定義できる。しかし1変数の場合でも c が無理数であれば

$$\mathbb{C}_L[[x^c]] \cap \mathbb{C}_L[[x]] = \{0\}$$

だから微分作用素 $\frac{d}{dx}$ を使うには2元生成の環 $\mathbb{C}_L[[x, x^c]]$ を考える必要があり c が有理数の時と大きく違うようである。

参考文献

- [1] Andersson, S.I.: Vector bundle connections and liftings of partial differential operators, Lect. Notes in Math. 905, 119-132, Springer 1982, Non-abelian Hodge theory via heat flow, Lect. Notes in Math. 1209, 8-36, Springer 1985.
- [2] Asada,A.: Current and residue exact sequence, J. Fac. Sci. Shinshu Univ. 3(1968), 85-151.
- [3] Asada,A.: Curvature forms with singularities and non integral characteristic class, Lect. Notes in Math. 1139, 152-168, Springer,1985. Non abelian de Rham theory, Prospects of Mathematical Sciences, 13-40, World Sci. 1986.
- [4] Asada,A.:Extended Borel transform and fractional calculus, in Fractional Calculus:History, Theory and Applications, eds. Daou,R. Xavier,M. Nova Publishers, 2014. An integral transform arising from fractional calculus, Fractional Calculus with Applications to Dynamical Systems, eds. Cario, C. Yang, X,J. Chapter 4. De Gruyter Open, 2015.
- [5] Erdéli,A. Magnus,W. Oberbettinger,F. Tricomi,F.G.: Higher Transcendental Functions, New York 1981. Digital Library of Mathematical Functions, <http://dlmf.nist.gov>.
- [6] Hirzebruch,F.: Topological Methods in Algebraic Geometry, Springer, 1966.
- [7] Hörmander, An Introduction to Complex Analysis in Several Variables, Van Nostrand, 1966.
- [8] Klevsov.S.: Geometr and large N limits in Laughlin states, Travaux math. 24(2016), 63-127
- [9] Laughlin, R.B.: Quantum Hall conductivity in two dimensions, Phys. Rev. B23 (1981), 5632. Anomalous quantum Hall effect: an incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations, Phys. Rev. Lett. 50(1983), 1395.
- [10] Oniščik, A.L.: Connection with zero curvature and de Rham theorem, Sov. Math., Doklady 5 (1964), 1654-1657, Some concepts and applications of non-abelian cohomology theory, Trans. Moscow Math. Soc. 17(1967), 49-98.
- [11] Shapsonik,F.A.Solomin,J.E.: Gauge field singularities and non integer topological charge, J. Math. Phys. 20(1979), 2110-2114.

一般相対論周辺 (宇宙のダーク・サイドなど)

江沢 康生¹

Around the General Relativity (The Dark Side of the Universe etc.)

Yasuo EZAWA²

1 はじめに

本稿は、この数学・物理通信の編集者の一人である矢野さんが世話人の一人をされている「雑談会」という会で報告したものに基いている。雑談会のメンバーは文系・理系共に含む数名 (10 名弱) である。

最近の一般相対論についての話題に、2017 年のノーベル物理学賞が LIGO (Laser Interferometric Gravitational Wave Observatory) グループ (100 グループ以上) による重力波の初めての直接観測に対して、グループの 3 名の指導的立場の研究者に与えられた、というのがある。

重力波の間接的な観測については、1974 年にジョゼフ・テイラーとラッセル・ハルスが連星パルサー PSR B1913+16 (パルサーと暗い伴星) を発見した。測定された周期変化は、重力波放出によるものとして説明できることを主張した。これが重力波の存在を間接的に示したとして、1993 年に 2 名はノーベル物理学賞を与えられた。

これらの観測は一般相対論の検証にとっては勿論極めて重要である。しかし、相対論 (その他) に対して、何か変更を要求するものではない。ところで、最近の宇宙の観測の進歩は相対論あるいは素粒子論 (物質の理論) に変更を要求していると思われる観測結果を示している。いわゆる、ダーク・サイド、ダーク・マターおよびダーク・エネルギー、の存在を認めざるを得ないようである。そこで、現在、一般相対論の主要な応用である宇宙論において盛んに研究されているこれらの事柄およびその意義について概略を記述しよう。

2 ダーク・マター

ダーク・マターのようなものがありそうだということは、1930 年代から銀河団中の銀河の速さの観測結果 (ニュートン力学と見えている銀河からのニュートン重力によって予想されるよりも速い) から考えられていたが、観測精度が十分ではなく、確定的ではなかった [1]。その分布も含めて存在の証拠と見做せる観測が得られるようになったのは以下のように 1960 年代からである。

2.1 円盤型銀河の回転曲線

円盤型銀河は光っている星から構成される円盤状部分とその周囲の光っていないガス状の部分からなる。銀河全体は 1 億年のオーダーで回転している。この回転運動について、銀河の各物体の速度と銀河中心からの距離の関係が調べられた。この中心からの距離と回転の速さの関係を表す曲線を『回転曲線』という。この関係は周囲のガスに対しても測定された。ガスについては、円盤の半径の数倍の距離まで測定された。回転運動の加速度は、その物体よりも中心に近い所にある物質からの重力である。ガスの質量は光っている円盤部分の質量に比べて無視できるので、ニュートン力学とニュートン重力を仮定すれば、ガスの速さは中心からの距離の平

¹元愛媛大学理学部

²ytar@hi2.enjoy.ne.jp

方根に反比例して減少するはずである(ケプラーの法則)。しかし、観測結果は測定された範囲で速さはほぼ一定であった(星の速さも中心からの距離が光っている部分の半径の半分以上ではほぼ一定)。

この結果は、回転運動の加速度を与える重力を生じる質量が光っている部分の半径の数倍の距離まで分布していると考えられる。この重力源は重力以外の相互作用をしない(従って、光らない)ので、『ダーク・マター』と呼ばれる。

他の円盤型銀河のいくつかについても回転曲線が測定されたが、いずれも同様な振る舞いを示した。このことは、銀河の周辺にはダーク・マターが存在することを意味していると解釈されている [2]。

2.2 銀河団から放出される X 線

それでは、より大きなスケールではどうなっているであろうか。

その後、銀河団から X 線が放出されているのが観測された。X 線は可視光よりもエネルギーが高いため、その放出体の温度も高い。従って、放出体の平均の運動エネルギーも高くなる。そうすると、速度が大きくなり、それを銀河内に留める重力も大きくなければならない。この重力に対応する質量と、見えている銀河の(上記の銀河に付随したダーク・マターの質量も含めた)質量を比べると、前者の方が大きい。このことは銀河団内全体にダーク・マターが存在していることを示している。

2.3 宇宙全体ではどうだろうか？

現在の銀河団と宇宙全体のスケールとの関係は『銀河団を 1 個の分子とみなすと、宇宙はこの分子が一様に分布している』(内山龍雄「一般相対性理論」;裳華房)というイメージ(モデル)が今でもほぼそのまま使われています。観測から導かれた『宇宙原理』を満たす Robertson-Walker(RW)時空が『背景時空』として用いられている。ただし、観測の進歩で、定量化が大いに進み、背景時空からの揺らぎもかなり詳細にわかってきたと言える。宇宙での物質全体の質量密度は宇宙背景放射(Cosmic Microwave Background Radiation;CMBR)の方向的な揺らぎが、質量密度が大きいと遅くなる音波(粗密波)の速さに依存することを利用して求められている。また、光る物質(バリオン;この問題では通常電子などの軽粒子も含めているようである)の密度も観測から求められているので、それらの差としてダーク・マターの密度が求められる。後者が約 5 倍になる。

2.4 ダーク・マターの候補

ダーク・マターの候補はいくつか考えられている。主なものを挙げてみよう。

2.4.1 通常の物質

通常の物質も温度が低いと光らないのでダーク・マターの候補(の一部)になる。通常の物質の総量は宇宙初期から不変(バリオン数の保存)と考えられている。ヘリウムやリチウムなどの軽元素は、星の中で生成されるが、それだけでは観測量に足りない。高温で核融合が可能な宇宙初期にも生成された(陽子と中性子が何段階かで結合して)とされている。それらの軽い元素量の比は物質の総量に関係している(原料が多いと生産量も多い)。観測された比から、総量に制限が付くが、必要なダーク・マターの量には足りないと言われている。(計算は解析的な方法だけでは不十分のようなので、詳細は略す。)

2.4.2 ニュートリノ

光と相互作用しない物質として知られているのはニュートリノだけなので、ダーク・マターがニュートリノで

ある可能性は当然調べられた。問題はニュートリノの質量であった。宇宙論でのダーク・マターの重要な役割は銀河や銀河団などの宇宙の『構造』に対する説明においてである。これらの構造は光る物質の観測によって認められ、重力の引力によって形成されたと考えられている(『重力不安定説』)。しかし、光る物質による構造形成は宇宙がプラズマで満たされていた高温状態が終わり、宇宙が『晴れ上がった』以後でないと始まらない(プラズマで満たされていると、重力よりもはるかに強い電磁氣的な力によって、重力の引力はかき消されてしまう)。晴れ上がり後、物質の密度が揺らいで周囲よりも密度の高い所ができると、その重力が強く周囲の物質を引き付けることによって構造が形成されたとされている。しかし、このようにして現在の構造が出来るには時間がたりず、晴れ上がりよりも前に構造形成が始まらなければならない。この形成には電磁相互作用をしないダーク・マターが必要と考えられている。ただし、それでもダーク・マターの質量が小さすぎると、速度が大きく、密度の大きい所から重力に逆らって『逃げ出して』しまい、構造はできない。

ニュートリノの質量は加速器を用いた場合には、ベータ崩壊の測定から、太陽ニュートリノの観測を用いる場合には、それから得られるニュートリノ振動の解析から、その上限が得られているが、それらの上限は構造形成に関しては小さすぎることはない(精度が良くなく制限がきつくない)。

他方、宇宙的な観測からは、宇宙背景輻射の強度の分布を調べると、ダーク・マターがニュートリノの場合には、質量の上限は『小さすぎる』といわれている。宇宙観測の結果が最も精密なのは珍しい。

以上のことから、ダーク・マターはニュートリノではないと考えられている。

2.4.3 超対称性理論で予言される粒子

超対称性理論では各ボーズ粒子とフェルミ粒子が1対1に対応する。これらの対のうち、これまでには一方だけしか見出されていない。理由は超対称性の破れが大きく、現在の加速器のエネルギーでは生成できないくらい質量が大きいためと考えられている。このように大きな質量の粒子は短時間でより質量の小さい粒子に崩壊すると考えられる。ただし、これらの粒子の質量には下限があり、崩壊できない粒子(Lightest Supersymmetric Particle, 省略してLSP)はダーク・マターの候補と考えられている。

超対称性は確認されたわけではないので、ダーク・マターの研究から手掛かりが得られれば、望ましいのだが。

2.4.4 その他の理論的に考えられている粒子

対称性の破れに伴って理論的に生じ得ると考えられる、Higgs粒子のような粒子がある。これらの粒子は質量が大きいたとは限らないが、ダーク・マターの候補になり得ると考えられている。

2.4.5 ステライル(sterile; 不活性な)ニュートリノ

以上のように理論的に予言されている候補は多いが、もちろん見出されていない。以前は、まとめてWIMP(Weakly Interacting Massive Particles; 相互作用が弱い大きな質量の粒子)と呼ばれることがよくあった。

これらの候補に対して、理論的な予言はなく、実験精度も十分ではないが、既知ではない粒子があるかも知れないという複数の実験がある。このような粒子は、もちろん、素粒子論の標準理論には含まれず(多分、超対称性理論にも)、従って強い相互作用や電磁相互作用をせず、重力相互作用以外は、ニュートリノとだけ相互作用すると考えられている。理由は、原子炉で生成された反電子ニュートリノを観測したところ、数が予想よりも少なかったり、予想されない種類のニュートリノが生成されたように見える場合があったのである。このような現象は、その数が標準理論に含まれる粒子が関与しているとすると少なすぎるが、既知のニュートリノ

以外のニュートリノがある場合にニュートリノ振動によって起こり得るからである。また、観測が正しければ、振動は太陽ニュートリノの振動の場合よりも速いので、未知のニュートリノの質量は既知のものよりも大きいことになる。このようなニュートリノは相互作用が弱い(不活性な)のでステライルニュートリノと呼ばれており；

- (1) 太陽からのニュートリノの振動の発見から必要になった「標準理論の拡張」に対する手掛かりを与えるかもしれない。
- (2) 質量の大きさによってはダーク・マターの候補になり得る：短距離で振動が見られると振動が速い、すなわち、質量が大きい。

これらのことによって、素粒子論、宇宙論の両方から注目されていて、確定的な結果を得ようとする実験が盛んに考えられている、以下でこれらの実験について簡単に記述しよう。

2.5 ステライルニュートリノの実験について

太陽の中心部で生成されて、地球に到達する反電子ニュートリノの数は予想されるものの約半分である。この現象は素粒子論の標準理論に含まれる3種類のニュートリノの振動によって説明できる。この振動は、太陽と地球の間の飛行距離あるいは飛行時間で見いだされた。この振動の速さはニュートリノの質量差が大きいほど速い。観測された振動の速さは、質量の2乗の差に対して $\Delta m_{12}^2 \approx 7.5 \times 10^{-5} \text{eV}^2$, $\Delta m_{13}^2 \approx \Delta m_{23}^2 \approx 2.3 \times 10^{-3} \text{eV}^2$ ($c=1$ とする単位系) に対応する。このニュートリノ振動の精密な測定によって、日本を含むグループにノーベル賞が与えられたことはよく知られている。

ところが、最近、確定的ではなさそうだが、**10メートル程度**でもニュートリノ振動があるのではないかという以下のような実験が報告されている。

- (i) 『原子炉からの反電子ニュートリノの測定された数が予想よりも少なそう。』

原子炉中の核分裂で生成される原子核は不安定で(放射能を持ち) β 崩壊(中性子 \rightarrow 陽子+電子+反電子ニュートリノ)して、反電子ニュートリノを放出するものが多い。

この反電子ニュートリノは測定機中の陽子と衝突し、中性子と陽電子を生成する(反電子ニュートリノ+陽子 \rightarrow 陽電子+中性子)：1個の反電子ニュートリノからは1個の陽電子が生成される。この陽電子の数を測れば、反電子ニュートリノの数が分かる。

この数を原子炉から10mほど離れた所で測定すると、反電子ニュートリノの数が予想よりも少なそうだというのである。この現象の数はニュートリノ以外の素粒子の標準理論に含まれる粒子が関与していると少なすぎる。従って、新しい種類のニュートリノが関与するニュートリノ振動によると考えられた。すると、10m程度での振動は、太陽ニュートリノの振動よりも速く、関与するニュートリノの質量は比較的大きくなければならない。

この現象の測定精度を上げるために進行中あるいは計画中の実験が多数ある。ただし、すべてがこのためだけの実験ではなく、より基礎的なニュートリノ・フラックスの精密測定なども目的にしているものもある。原子炉からのニュートリノを使う利点はニュートリノの数が多いためである。

実験の例としては次のものなどがある：

Nucifer (Saclay, フランス)、NEOS(韓国)、DANSS(Kalinin, ロシア)、Neutrino-4(ロシア)、Stereo(Grenoble, フランス)、SoLid(ベルギー)、Prospect(Oak Ridge, アメリカ)

ただし、これまでには確定的な結果は得られていないようである [3]。

(ii) 『加速器で生成されたニュートリノを用いる実験』

この場合には、ニュートリノは殆どがミューオンニュートリノ ν_μ で $\left(\frac{\text{No of } \nu_e}{\text{No of } \nu_\mu} \approx \left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2\right)$, エネルギーは数 GeV 程度で、原子炉からの反電子ニュートリノのエネルギーの数 MeV 程度よりも大きい。

* 初めの実験では、CERN(初めてニュートリノビームを用いた実験をした)で生成されたニュートリノビームをイタリアの LNGS(Laboratori Nazionali Gran Sasso) の測定器に送った。

現在では OPERA 実験 (CNGS1) と ICARUS 実験 (CNGS2) とに発展した。

* ロスアラモス研究所で液体シンチレーターニュートリノ測定器 (LSND) を用いた実験がされた。

* フェルミ研究所の miniBooNE 実験 ; LSND 測定の結果と宇宙観測結果の矛盾を調べる。 ν_μ ビーム中に ν_e が見つければ LSND の結果を支持。(Boo は Booster の略)

* microBooNE 実験 ; miniBooNE 実験の不確定性を調べる (補強する)。

* T2K 実験 ; 東海村にある加速器で生成されたミューオン・ニュートリノ (反ミューオン・ニュートリノ) ビームを Kamiokande にある測定器でそれぞれその振動を測定する。測定したパラメーターは $\sin^2 \theta_{23}$ および Δm_{23}^2 。新しい物理を示す結果はなかった [4]。

(iii) 宇宙観測 ; ニュートリノの種類についての制限が調べられている。ただし、原子炉、加速器を用いた場合の結果とは必ずしも一致しているとは言えないようである [5]。

(iv) 太陽ニュートリノの利用

太陽からのニュートリノ ν_e を金属 Ga に衝突させ、反応 $\text{Ga} + \nu_e \rightarrow \text{Ge} + e^-$ を生じさせる。ニュートリノのエネルギーを制限するなどして、ニュートリノ振動などについて詳しい測定をした。SAGE、GALLEX、GNO 実験がある。

† 小生は実験家ではないので、このセクションの事柄の詳細は必ずしも理解しているわけではない。上記の文献が参考になるかも知れない。

3 ダーク・エネルギー

宇宙膨張は以前から知られていたが、世紀が変わる (21 世紀になる) 頃、膨張が加速度的であることが、遠方の Ia 型の超新星 (SNeIa) や宇宙背景放射の観測から認められた。宇宙に通常物質だけがある場合には (宇宙定数がなければ、一般相対論によれば)、膨張は減速的になる。従って、宇宙定数があることが強く示唆される (存在が初めて認められた)。宇宙定数の効果は、物質と比べると、エネルギー (密度) に対応する作用を持ち、物質がなくても存在するので、現在では『真空のエネルギー』、また、重力の作用しかないのでダーク・エネルギーとも呼ばれる。

宇宙膨張が加速度的か減速的かは重力源のエネルギー密度と圧力の関係で決まる :

$$\text{エネルギー密度} + 3 \times \text{圧力} < 0$$

のとき加速膨張。圧力は 1 方向の運動エネルギー (密度) の平均値で与えられる。このエネルギーは座標系による。宇宙の物質と共に『自由落下』(重力だけを受けてする運動) する座標系 (『共動座標系』) では、現在は、物質はほぼ静止しているので物質の圧力はほぼ 0 と見做せる。ただし、光は質量がなく、静止しないので、エネルギー $\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ (p は運動量の大きさ) はすべて運動エネルギーである。この運動エネルギーは左右、

前後、上下の3方向で同じなので、圧力はエネルギーの3分の1である。物質は一般に静止していなくても光よりも遅く、質量(静止エネルギー = mc^2 に対応)もあるので、圧力はエネルギーの3分の1よりも小さい。

ところが、重力源の作用は2階のテンソル(エネルギー・運動量テンソル $\equiv T_{\mu\nu}$) で表されるので、ダーク・エネルギーは圧力も持ちます。ただし、マイナスで、大きさはエネルギー密度と等しい。従って、このような『物質』(スカラーとしよう)があるとすると、それは通常物質ではなく『お化け(phantom)』と呼ばれているものになる(通常物質は運動が速くなると、エネルギーが増加する: エネルギッシュになる。しかし、お化けは速くなると、エネルギーが減少する)。

4 終りに

最後に、上述のダーク・マターやダーク・エネルギーの候補以外に、現在提案され、研究されているダーク・サイドを説明しようとする候補について触れておこう。

物理法則、特に基礎的なものは『変分原理』を用いて表されているものがほとんどである。その際に用いられる重要な量にラグランジアン(密度)がある。一般相対論の場合はラグランジアン密度 \mathcal{L}_G はスカラー曲率(R)の1次式で次のように与えられる;

$$\mathcal{L}_G = \frac{1}{16\pi G}(R - 2\Lambda)$$

ここで、 G は重力定数、 Λ は宇宙定数である。一般化座標は、通常、計量テンソルの成分 $g_{\mu\nu}$ が採られる。ただし、このときには、宇宙にある物質が通常物質だけとすると $\Lambda \neq 0$ でなければ加速膨張を説明できず、上述のように、お化け物質があるとしなければならない。お化け物質を考えない場合には、 $\Lambda \neq 0$ とするか、重力の理論が一般相対論を変更(修正)したものとしなければならない。お化けを考えることを好まない人も多く、この修正を研究する人は多い。また、加速膨張という重要な事柄を1個の定数の導入だけで済ませることに納得しない人も多い。このような人も修正理論を考えることになる。

修正方法はいろいろあるが、最も簡単な修正としてはラグランジアン密度をスカラー曲率の一般的な関数 $f(R)$ とする場合 ($f(R)$ 型重力理論) の研究が多い [6]。この重力理論のラグランジアン密度 \mathcal{L}_{GG} (GG は generalized gravity から来る) は

$$\mathcal{L}_{GG} = f(R) \quad \left(\text{or} = \frac{1}{16\pi G} f(R) \right)$$

と表される(一般化座標は一般相対論と同じく $g_{\mu\nu}$ [†])。重力源のラグランジアン密度を \mathcal{L}_M とするとき、全ラグランジアン密度 $\mathcal{L}_{GG} + \mathcal{L}_M$ から変分原理によって導かれる重力場の方程式は

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - [\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \nabla^2]f(R) = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (\kappa \equiv 8\pi G)$$

となる。 $R_{\mu\nu}$ は Ricci テンソル。 $T_{\mu\nu}$ は重力源の物質のエネルギー・運動量テンソルで、物質の作用を S_M とすると、次のように表せる;

$$S_M = \int_{t_1}^{t_2} dt d^3x \mathcal{L}_M, \quad T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-\det g_{\mu\nu}}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}$$

[†] 4 脚場を一般化座標に用いる Palatini の方法もある。一般相対論の場合は両者は同じ場の方程式を与える。

上の重力場の方程式は4階の微分方程式で複雑である。古典論では、この理論は $f(R)$ によって性質が決まるスカラー場がある場合の一般相対論と等価であることが示されている(『等価定理』)。 $f(R)$ は任意で良いの

で、一般相対論で宇宙定数がある場合を含む。従って、ダーク・エネルギーを記述できそうであり、多くの研究がなされている。また、スカラー場はお化けの場合はダーク・エネルギーの問題に利用されたが、お化けでない場合には、重力相互作用しかないので、ダーク・マターの役割をするかも知れない。このことに関する研究もされている。 $f(R)$ の具体的な関数形は理論的には決められていないが、宇宙の観測結果をせつめいするにはどのような条件を満たすべきかについては研究されている。

また、ステライルニュートリノに関する宇宙観測と原子炉、加速器を用いた場合の不一致の可能性は、一般相対論に基づいたものであるが、 $f(R)$ 型重力理論では $f(R)$ の関数形についての自由度を利用して、不一致を解消する可能性も議論されている [7]。

このような研究がうまく行けば、お化けのスカラー場などの未知の物質を導入する代わりに、重力の理論を修正することによって、宇宙に関する問題が説明できるかもしれない。20 世紀までの観測結果については、宇宙は一般相対論で記述できると考えられていた。21 世紀になり、観測範囲が広がり、精度が上がると、重力の理論を修正した方が良いのではないかという訳である。

また、初めの部分に記した重力波については、一般相対論では縦波と横波だけがあるが、 $f(R)$ 型重力理論では“斜め波”もある。この波の種類の観測は難しいであろうが、観測されれば重力理論に重要な情報が得られることになる。

歴史的には、扱う対象や現象の範囲が広がったり (新しい実験や観測によって)、実験や観測の精度が上がったりすると、理論が拡張 (一般化) されてきた (相対論など)。重力理論のこの修正の延長線上にあると考えることもできよう。理論を拡張する場合に必要な数学は殆どの場合に開発がされていた。

重力理論も最終的には量子化されるとするのは自然な考えと思われる。量子化法は一通りとは限らないが、正準量子化法が最も説得力があり、失敗例を知らない。一般相対論は重力を幾何学的に表現した理論なので『葉層構造』とそれに付随した『Lie 微分』を用いるのが最も自然だと思われる [8]。一般化座標は ADM(Arnold-Desre-Misner) 変数 (3 次元超局面上の計量テンソル $h_{mn}(\mathbf{x}, t)$, lapse 関数 $N(\mathbf{x}, t)$ および shift ベクトル $N^m(\mathbf{x}, t)$ (\mathbf{x} は超局面上の位置ベクトル、 t は時刻)[9] が最もよく使われている。この変数を用いた正準量子論では、重力子 (グラビトン) の理論はうまく行かない (繰り込みが出来ない) ことが知られている。一般化された重力理論の場合には、うまく行く例が知られている [10]。 $f(R)$ 型重力理論の場合には、高階微分の理論なので Ostrogradski の正準形式 [11] を拡張した方法での正準量子化が与えられている [12, 13]。それによれば、古典論の等価定理は量子論では厳密には成立しないことが示せるが、繰り込みについてはまだ結論は得られないと思われる。

References

- [1] Zwicky F., *Helv. Phys. Acta.*, **6**(1933), 110
- [2] Sofue Y., Honma M. and Arimoto N., *Astron. and Astrophys.*, **296**(1994), 33
Sofue Y. and Rubin V., *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **39**(2001), 137(arXiv: astro-ph/0010594)
- [3] Giunti C., Invited contribution to the Nuclear Physics **B** Special Issue on Neutrino Oscilltions
celebrating the Nobel Prize in Physics 2015(arXiv:1512.04753[hep-ph])
Buck C., Talk presented at NuPhys 2016(London, 12-14 December 2016) ;(arXiv: 1704.08885[hep-ex])

- [4] Abe K. et. al, *Phys.Rev.*, **D96**(2017), 011102 ; (arXiv: 1704.06409[hep-ex])
 Del Tutto M., Talk given at the Moriond conference(La Thuile, Italy, 18-25 March)(arXiv :
 (1705.04894[hep-ex])
- [5] Abazajian K.N., Invited review for *Physics Reports* (arXiv: 1705.01837[hep-ph])
- [6] Sotiriou T.P. and Faraoni V., *Rev. Mod. Phys.*, **82**(2008), 451(arXiv: 0805.1726[gr-qc])
 Nojiri S. and Odintsov S.D., *Int. J. Geom. Met. Mod. Phys.*, **4**(2007), 115
 Capozziello S and De Laurentis M., arXiv: 1307.4523[gr-qc]
- [7] Motohashi H., Starobinsky A. and Yokoyama J., *Int. J. Mod. Phys.*, **D20**(2011), 1347
 (arXiv: 1101.0716[astro-ph.CO]); *Phys. Rev. Lett.*, **110**(2013), 121302
 (arXiv: 1203.6828[astro-ph.CO])
 Li Y.-H., Zhang J.-F. and Zhang X., *Phys. Lett.*, **B744**(2015),213 (arXiv: 1502.01136[astro-ph.CO])
- [8] Wald R.M., “General Relativity”, Appendix E.2 (The University of Chicago Press)
- [9] Arnowitt R., Deser S. and Misner C., arXiv: gr-qc/0405109 “The Dynamics of General Relativity’
- [10] Utiyama R. and DeWitt B.S., *J. Math. Phys.*, **3**(1962), 608
 Stelle K., *Phys. Rev.*, **D16**(1977), 1572
- [11] Ostrogradski M., *Mem. Acad. Sci. St. Petersburg*, **VI 4**(1850), 385
- [12] Buchbinder I.L. and Lyakhovich S.L., *Class. Quantum Grav.*, **4**(1987), 1487
 Buchbinder I.L., Karataeva I.Yu and Lyakhovich S.L., *Class. and Quantum Grav.*, **8**(1991), 1113
- [13] Ezawa Y., Iwasaki H., Ohkuwa Y., Watanabe S., Yamada N. and Yano T.,
Class. Quantum Grav., **23**(2006), 3205 ; *Nuovo Cim.*, **125B**(2010), 1039
 Ezawa Y. and Ohkuwa Y., “The Equivalence Theorem in the Generalized Gravity of
 $f(R)$ -type Gravity and Canonical Formalism” in a book “Advances in
 Quantum Theory”(2012), ed. Cotaescu I. I. (InTech Open Access Publisher);
 arXiv: 1204.2396[gr-qc]
 Ohkuwa Y. and Ezawa Y., *Eur. Phys. J. Plus*, **130**(2015), 77

Bessel 関数と金属円板の振動 (2)

世戸 憲治*

Bessel Function and the Oscillation of a Metal Disk (2)

Kenji SETO*

1 はじめに

前回の「Bessel 関数と金属円板の振動 (1)」(「数学・物理通信」7 巻 9 号) では、銅鑼をモデルとした金属円板の振動を扱った。今回は、シンバルをモデルとして、同じく金属円板の振動を扱うが、振動に対する条件が変わってくるため解析方法はまったく異なるものとなる。

シンバルの 1 種にハイハットというのがある。これは 2 個のシンバルを上下に向かい合わせて並べて、ステックで上のシンバルを叩くか、ペダルを踏むことで上のシンバルを下のシンバルに衝突させて音をだす。ここでは、この後者の方のモデルとして、円板の中心は固定しておき、その周辺部に一定の初期変位を与えたとき、または、初速度を与えたときの振動を解析する。このときは、円板の中心を固定とするために、第 2 種の Bessel 関数も関与し、式はかなりの程度煩雑なものになることをお断りしておく。

2 方程式の導入とその解法

2.1 方程式の導入

前回の論文で扱ったように、ここでは、円板の中心に関し、回転対称な振動のみを扱うので、変位 U は、円の中心を座標原点にとったとき、動径成分 r と時間 t の関数となるので、これを $U(r, t)$ と書くことにする。このときの方程式は前回同様、

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(r, t) = -ED \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 U(r, t) \quad (2.1)$$

となる。ここに、 ρ は円板の面密度、 E は Young 率である。また、 D は、Poisson 比を σ としたとき、面上の単位長さあたりの断面 2 次モーメントを、 $1 - \sigma^2$ で割ったものである*¹。

この方程式を解くために、変位 $U(r, t)$ を変数分離形の

$$U(r, t) = R(r)P(t) \quad (2.2)$$

を仮定する。このとき、方程式は

$$\frac{1}{P} \frac{d^2 P}{dt^2} = -\frac{ED}{\rho} \frac{1}{R} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^2 R \quad (2.3)$$

* 北海学園大学名誉教授

E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

*¹ 厚さ h の板のときは、 $D = h^3/12(1 - \sigma^2)$ となる。

となるので、この式の値、すなわち、分離定数を負の $-\omega^2$ とおくと、方程式は、

$$\frac{d^2 P}{dt^2} + \omega^2 P = 0, \quad ED \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^2 R = \rho \omega^2 R \quad (2.4)$$

と、2本の方程式に分離される。この第1式から、定数係数を除いて、

$$P(t) = \cos(\omega t), \quad \text{or} \quad \sin(\omega t) \quad (2.5)$$

となる。第2式は4階の微分方程式となるが、この解を0次のBessel関数として、 $R = J_0(kr)$ とおいてみると、 $J_0(kr)$ が

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) J_0(kr) = -k^2 J_0(kr) \quad (2.6)$$

を満たすことから、 k は

$$EDk^4 = \rho \omega^2 \quad (2.7)$$

を満たすことになる。ここで、長さの逆数の次元を持ち、 ω に依存する正の量

$$\mu = \left(\frac{\rho}{ED} \right)^{1/4} \sqrt{\omega} \quad (2.8)$$

を定義すると、(2.7) 式の k は

$$k = \pm \mu, \quad \text{or}, \quad k = \pm i\mu \quad (2.9)$$

となる。これから、(2.4) 第2式の解 $R(r)$ は、第1種、第2種のBessel関数 $J_0(\mu r)$, $N_0(\mu r)$ 、あるいは、第1種、第2種の変形Bessel関数の $I_0(\mu r)$, $K_0(\mu r)$ となる。ここまでは、前回の論文と同じであるが、ここから先は違ってくる。ここでは、円板の中心 $r = 0$ は固定されているものとして、常に $R(0) = 0$ となる解を選ぶものとする。これら4個の解のうち、 $N_0(\mu r)$, $K_0(\mu r)$ は $r = 0$ で発散するので、これらを単独で使うことはできないが、発散が打ち消される形では使うことができる。これら関数の展開式を挙げると、 γ をEuler数として、

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} N_0(z) &= J_0(z) \left(\gamma + \log \frac{z}{2} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k} \left[\sum_{m=1}^k \frac{1}{m} \right] \\ K_0(z) &= -I_0(z) \left(\gamma + \log \frac{z}{2} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k} \left[\sum_{m=1}^k \frac{1}{m} \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

となる。ここで、 $J_0(0) = I_0(0) = 1$ を考慮すると、 $\frac{\pi}{2} N_0(\mu r) + K_0(\mu r)$ の形にすると発散することなく、 $r = 0$ でゼロとすることができる。以下では、もっぱらこの第2種Bessel関数 N_0 , N_1 に関して、 $\pi/2$ を掛けた形で使うので、記述上の簡便さから、これを

$$\hat{N}_k(z) = \frac{\pi}{2} N_k(z), \quad k = 0, 1 \quad (2.11)$$

とハット付きで書くことにする。

また、 $J_0(\mu r)$, $I_0(\mu r)$ の方は、 $J_0(\mu r) - I_0(\mu r)$ の形にすると、 $r = 0$ でゼロとすることができる。以上から、(2.4) 第2式の解 $R(r)$ は、 A , B を任意定数として、

$$R(r) = A[J_0(\mu r) - I_0(\mu r)] + B[\hat{N}_0(\mu r) + K_0(\mu r)] \quad (2.12)$$

と置くことができる．このように，第 2 種 Bessel 関数を $\hat{N}_0(\mu r) + K_0(\mu r)$ の形で導入することで， $r = 0$ の変位を発散させることなくゼロとすることができる．しかし，これに 2 次元の Laplacian を作用させたものは，この先に掲げる公式 (2.15) によって

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right) [\hat{N}_0(\mu r) + K_0(\mu r)] = -\mu^2 [\hat{N}_0(\mu r) - K_0(\mu r)] \quad (2.13)$$

となり，これは 2 次元的な曲率を表すものであるが，明らかに $r = 0$ の原点で発散し，この点では尖った形になることを意味する．これは原点にデルタ関数的な力を加えて，強制的に変位がゼロとなるように押さえているから許されるのであって，まったく力を加えていないときは，前回の論文で見たように，第 2 種 Bessel 関数が入ってくる余地はないことに注意する．

2.2 固有値と固有関数

ここで，半径 ℓ の円板の周囲は自由端になっていて自由境界条件を満たすとしよう．これについては前回の論文でも述べたように，ここでの変位 $R(r)$ に当てはめて書くと，条件式は 2 本あって，

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) R \Big|_{r=\ell} = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{d}{dr} \right) R \Big|_{r=\ell} = 0 \quad (2.14)$$

となる^{*2}．この第 2 式に表れる σ は，(2.1) 式の下で述べた Poisson 比である．ここで，Bessel 関数に関する微分公式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \begin{pmatrix} J_0(\mu r) \\ \hat{N}_0(\mu r) \end{pmatrix} &= -\mu \begin{pmatrix} J_1(\mu r) \\ \hat{N}_1(\mu r) \end{pmatrix}, & \frac{d}{dr} \begin{pmatrix} I_0(\mu r) \\ K_0(\mu r) \end{pmatrix} &= \mu \begin{pmatrix} I_1(\mu r) \\ -K_1(\mu r) \end{pmatrix}, \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \begin{pmatrix} J_0(\mu r) \\ \hat{N}_0(\mu r) \end{pmatrix} &= -\mu^2 \begin{pmatrix} J_0(\mu r) \\ \hat{N}_0(\mu r) \end{pmatrix}, & \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \begin{pmatrix} I_0(\mu r) \\ K_0(\mu r) \end{pmatrix} &= \mu^2 \begin{pmatrix} I_0(\mu r) \\ K_0(\mu r) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.15)$$

を用いて，(2.12) 式の $R(r)$ に (2.14) の条件式を当てはめると，

$$A[J_1(\mu\ell) - I_1(\mu\ell)] + B[\hat{N}_1(\mu\ell) - K_1(\mu\ell)] = 0, \quad (2.16)$$

$$A[J_0(\mu\ell) + I_0(\mu\ell) - \alpha(J_1(\mu\ell) + I_1(\mu\ell))] + B[\hat{N}_0(\mu\ell) - K_0(\mu\ell) - \alpha(\hat{N}_1(\mu\ell) + K_1(\mu\ell))] = 0$$

となる．ここで， α を

$$\alpha = \frac{1 - \sigma}{\mu\ell} \quad (2.17)$$

と定義した．係数 A , B はこれら 2 本の式を満たさなければならないので，それらが両方ともゼロとならないためには，その係数行列式の値がゼロでなければならない．この計算には Bessel 関数に関する Lommel の恒等式

$$J_0(z)\hat{N}_1(z) - J_1(z)\hat{N}_0(z) = -\frac{1}{z}, \quad I_0(z)K_1(z) + I_1(z)K_0(z) = \frac{1}{z} \quad (2.18)$$

を用いると幾分か簡単化され，

$$\begin{aligned} \frac{2}{\mu\ell} - \left[\hat{N}_0(\mu\ell)I_1(\mu\ell) + \hat{N}_1(\mu\ell)I_0(\mu\ell) \right] + \left[J_0(\mu\ell)K_1(\mu\ell) - J_1(\mu\ell)K_0(\mu\ell) \right] \\ + 2\alpha \left[\hat{N}_1(\mu\ell)I_1(\mu\ell) - J_1(\mu\ell)K_1(\mu\ell) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

^{*2} L. Landau, E. Lifshitz 著，佐藤常三訳「弾性理論」(東京図書) P.62 問題 5. を参照のこと

となる．この式によって μ の中に含まれる ω の値が固有値として決定される．この意味で，この式は，固有値方程式となる．このとき，固有値 ω は飛び飛びに決定されるであろう．それらを正の小さい方から， ω_k , ($k = 1, 2, 3, \dots$) とし，対応する μ の値を μ_k , ($k = 1, 2, 3, \dots$) とする．

固有関数については，(2.16) の第 1 式が満たされるように，

$$A_k = \frac{\hat{N}_1(\mu_k \ell) - K_1(\mu_k \ell)}{I_1(\mu_k \ell) - J_1(\mu_k \ell)}, \quad B_k = 1 \quad (2.20)$$

と決めておき，これを (2.12) 式の $R(r)$ に代入したものを固有関数 $F_k(r)$ として，

$$F_k(r) = \frac{\hat{N}_1(\mu_k \ell) - K_1(\mu_k \ell)}{I_1(\mu_k \ell) - J_1(\mu_k \ell)} [J_0(\mu_k r) - I_0(\mu_k r)] + [\hat{N}_0(\mu_k r) + K_0(\mu_k r)] \quad (2.21)$$

と定義する．これは，もちろん，規格化されたものではない．

2.3 固有関数の直交性と規格化

異なる固有値に属する固有関数の直交性

$$\int_0^\ell F_k(r) F_l(r) r dr = 0, \quad \omega_k \neq \omega_l \quad (2.22)$$

に関しては，前回の論文とまったく同じにできるので，ここではその証明を省くことにする．

同じ固有値に対する規格化積分に関しては，不定積分の公式*3

$$\int \left(\frac{J_0^2(\mu r)}{\hat{N}_0^2(\mu r)} \right) r dr = \frac{r^2}{2} \left(\frac{J_0^2(\mu r) + J_1^2(\mu r)}{\hat{N}_0^2(\mu r) + \hat{N}_1^2(\mu r)} \right), \quad \int \left(\frac{I_0^2(\mu r)}{K_0^2(\mu r)} \right) r dr = \frac{r^2}{2} \left(\frac{I_0^2(\mu r) - I_1^2(\mu r)}{K_0^2(\mu r) - K_1^2(\mu r)} \right) \quad (2.23)$$

$$\int J_0(\mu r) \hat{N}_0(\mu r) r dr = \frac{r^2}{2} [J_0(\mu r) \hat{N}_0(\mu r) + J_1(\mu r) \hat{N}_1(\mu r)]$$

$$\int J_0(\mu r) I_0(\mu r) r dr = \frac{r}{2\mu} [J_0(\mu r) I_1(\mu r) + J_1(\mu r) I_0(\mu r)] \quad (2.24)$$

$$\int J_0(\mu r) K_0(\mu r) r dr = \frac{r}{2\mu} [-J_0(\mu r) K_1(\mu r) + J_1(\mu r) K_0(\mu r)]$$

$$\int \hat{N}_0(\mu r) I_0(\mu r) r dr = \frac{r}{2\mu} [\hat{N}_0(\mu r) I_1(\mu r) + \hat{N}_1(\mu r) I_0(\mu r)]$$

$$\int \hat{N}_0(\mu r) K_0(\mu r) r dr = \frac{r}{2\mu} [-\hat{N}_0(\mu r) K_1(\mu r) + \hat{N}_1(\mu r) K_0(\mu r)] \quad (2.25)$$

$$\int I_0(\mu r) K_0(\mu r) r dr = \frac{r^2}{2} [I_0(\mu r) K_0(\mu r) + I_1(\mu r) K_1(\mu r)]$$

を用いて直接積分してしまう．この計算はかなりの程度冗長なものになってしまうので，先に部分的に実行したものを挙げておく．以下では，積分式右辺の Bessel 関数の変数を省略するが，これらはすべて $\mu_k \ell$ である．

$$\int_0^\ell [J_0(\mu_k r) - I_0(\mu_k r)]^2 r dr = \frac{\ell^2}{2} [J_0^2 + J_1^2 + I_0^2 - I_1^2] - \frac{\ell}{\mu_k} [J_0 I_1 + J_1 I_0] \stackrel{\text{def}}{=} K_k \quad (2.26)$$

*3 「数学公式 III」(岩波全書) P.189 上から 6 番目, P.190 上から 4 番目. 「新数学公式集 II」(丸善) P.41~P.48. ただし, $N_0 I_0$, $N_0 K_0$ に関する公式はなかったもので, 自作した.

$$\begin{aligned} & \int_0^\ell [J_0(\mu_k r) - I_0(\mu_k r)] [\hat{N}_0(\mu_k r) + K_0(\mu_k r)] r dr \\ &= \frac{\ell^2}{2} [J_0 \hat{N}_0 + J_1 \hat{N}_1 - I_0 K_0 - I_1 K_1] + \frac{\ell}{2\mu_k} [J_1 K_0 - J_0 K_1 - \hat{N}_0 I_1 - \hat{N}_1 I_0] \stackrel{\text{def}}{=} L_k \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\int_0^\ell [\hat{N}_0(\mu_k r) + K_0(\mu_k r)]^2 r dr = \frac{\ell^2}{2} [\hat{N}_0^2 + \hat{N}_1^2 + K_0^2 - K_1^2] + \frac{\ell}{\mu_k} [-\hat{N}_0 K_1 + \hat{N}_1 K_0] \stackrel{\text{def}}{=} M_k \quad (2.28)$$

これら積分式の計算では、積分の下限 $r = 0$ ではすべてゼロとなることが、(2.10) 式、および、つぎの \hat{N}_1 , K_1 の展開式

$$\begin{aligned} \hat{N}_1(z) &= J_1 \left(\gamma + \log \frac{z}{2} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k+1} \left[\sum_{m=1}^k \frac{1}{m} + \sum_{m=1}^{k+1} \frac{1}{m} \right] - \frac{1}{z} \\ K_1(z) &= I_1 \left(\gamma + \log \frac{z}{2} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+1)!} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k+1} \left[\sum_{m=1}^k \frac{1}{m} + \sum_{m=1}^{k+1} \frac{1}{m} \right] + \frac{1}{z} \end{aligned} \quad (2.29)$$

から、証明できる。

以上の結果をまとめると、固有関数の直交式

$$\int_0^\ell F_k(r) F_l(r) r dr = N_k^2 \delta_{k,l} \quad (2.30)$$

を得る。ここに、規格化定数 N_k^2 は、(2.26) (2.27) (2.28) で定義した K_k , L_k , M_k , および、(2.20) 式の A_k を用いて、

$$N_k^2 = A_k^2 K_k + 2A_k L_k + M_k \quad (2.31)$$

となる。これから $F_k(r)/N_k$ が規格化された固有関数となる。

2.4 初期値問題

その1：初速度ゼロで初期変位を与えた場合

これまでの解析から、方程式 (2.1) の一般解は、(2.5) 式の時間依存部分と (2.21) 式の固有関数 F_k との積の重ね合わせとなる。ここでは、初速度をゼロとするので、時間依存部分として $\cos(\omega_k t)$ を採用し、

$$U(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k F_k(r) \cos(\omega_k t) \quad (2.32)$$

と表される。係数 C_k は初期値から決定される。これまで考えてきた金属板は原点 $r = 0$ のところで変位が常にゼロとなるように固定されているものであった。ここでは、初期値として、円板の周辺部 $r = \ell$ のところが変位 U_0 だけ曲がっているものとしよう。このときの変形を求めるには、方程式 (2.1) の静的な場合として、左辺の時間微分のところをゼロとしたものを解けばよい。このときの変位を $S(r)$ とすると、方程式は

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^2 S(r) = 0 \quad (2.33)$$

となる。この解は、 a , b , c , d を任意定数として、

$$S(r) = ar^2 + b + cr^2 \log(r/\ell) + d \log(r/\ell) \quad (2.34)$$

となるが、このうち、右辺最後の項は $r = 0$ で発散するので $d = 0$ とし、また、ここでは、原点 $r = 0$ はゼロに固定しているので、 $b = 0$ としなければならない。結果として、

$$S(r) = ar^2 + cr^2 \log(r/\ell) \quad (2.35)$$

となる。残る定数 a, c は、この円板の周辺部が単純支持になっているものとして、

$$S(\ell) = U_0, \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{d}{dr} \right) S(r) \Big|_{r=\ell} = 0 \quad (2.36)$$

の条件から決めることができる*4。これから、

$$a = \frac{U_0}{\ell^2}, \quad c = -\frac{2(1+\sigma)U_0}{(3+\sigma)\ell^2} \quad (2.37)$$

と決まり、初期変位は

$$S(r) = U_0 \left(\frac{r}{\ell} \right)^2 \left[1 - \frac{2(1+\sigma)}{3+\sigma} \log \left(\frac{r}{\ell} \right) \right] \quad (2.38)$$

と求められる。(2.32) 式の変位 U は $t = 0$ のとき、この初期変位 $S(r)$ にならなければならないので、

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k F_k(r) = S(r) \quad (2.39)$$

となり、この両辺に $F_l(r)r$ を掛け、 r で積分し、固有関数の直交性 (2.30) 式を用いると、

$$C_k = \frac{1}{N_k^2} \int_0^\ell S(r) F_k(r) r dr \quad (2.40)$$

となるので、これを元の (2.32) 式に戻して、

$$U(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{N_k^2} \left(\int_0^\ell S(r') F_k(r') r' dr' \right) F_k(r) \cos(\omega_k t) \quad (2.41)$$

と形の上では求まったことになる。

その2：初期変位ゼロで初速度を与えた場合

つぎに、初期変位をゼロとして、初速度を与えた場合を考えてみる。このときは、(2.5) 式の時間依存部分を $\sin(\omega_k t)$ として、一般解は、

$$U(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k F_k(r) \sin(\omega_k t) \quad (2.42)$$

となる。ここでは、円板の半径 ℓ より小さい r_0 を設定し、円板の周辺部 $r_0 \leq r \leq \ell$ に初速度 v_0 を与えることにして、

$$\frac{\partial}{\partial t} U(r, t) \Big|_{t=0} = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < r_0 \\ v_0, & r_0 \leq r \leq \ell \end{cases} \quad (2.43)$$

と設定する。この条件を (2.42) 式に適用すると、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \omega_k C_k F_k(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < r_0 \\ v_0, & r_0 \leq r \leq \ell \end{cases} \quad (2.44)$$

*4 この条件に関しては、先に挙げた「弾性理論」P.61. 問題2を参照されたい。

となり、両辺に $F_l(r)r$ を掛けて、 r で積分し、固有関数の直交性 (2.30) 式を利用すると、 C_k が

$$C_k = \frac{v_0}{\omega_k N_k^2} \int_{r_0}^{\ell} F_k(r) r dr \quad (2.45)$$

と求められる。これを (2.42) 式に戻して、

$$U(r, t) = v_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_k N_k^2} \left(\int_{r_0}^{\ell} F_k(r') r' dr' \right) F_k(r) \sin(\omega_k t) \quad (2.46)$$

と、これも形式的ではあるが、求められる。

3 数値計算例

前回は銅鑼をモデルとした解析をしたが、今回のシンバルの場合も前回と同じデータを使うことにする。ここでは、それを青銅として、円板の半径 ℓ 、厚さ h 、Young 率 E 、Poisson 比 σ を

$$\ell = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}, \quad h = 1 \text{ mm} = 0.001 \text{ m}, \quad E = 110 \text{ GPa} = 110 \times 10^9 \text{ Pa}, \quad \sigma = 0.38 \quad (3.1)$$

とする。また、青銅の体積密度は 8800 kg/m^3 なので、ここで用いる面密度 ρ は

$$\rho = 8800 \text{ kg/m}^3 \times h = 8.8 \text{ kg/m}^2 \quad (3.2)$$

とする。これらの数値を基にして、固有値方程式 (2.19) を解き、求めた固有値 ω_k を 10 個挙げると、小数点以下 3 桁の精度で、

$$\omega_k [\text{sec}^{-1}] = 104.846, \quad 581.781, \quad 1677.455, \quad 3309.616, \quad 5487.204, \quad 8209.441, \quad 11476.264, \\ 15287.638, \quad 19463.546, \quad 24543.933 \quad (3.3)$$

となる。ここで、指摘しておきたいことは、今回と前回では、まったく同じ材質、同じサイズの金属円板を用いているが、前回の円板の中心を固定しなかったときの最小の角振動数は $\omega_1 = 253.091 \text{ sec}^{-1}$ であった。それに対し今回の中心を固定したときの値は $\omega_1 = 104.846 \text{ sec}^{-1}$ と 2 分の 1 以下になっていることである。常識的に考えると、固定点が増えるほど、それだけ動き得る範囲が狭まるので、振動数は高くなるはずであるが、今回の場合はその常識が通用せず不思議な現象と考えられる。ちなみに、最小の固有値 ω_1 に対するこれら数値の比は、

$$\frac{\omega_k}{\omega_1} = 1, \quad 5.548, \quad 15.999, \quad 31.566, \quad 52.335, \quad 78.299, \quad 109.457, \quad 145.809, \quad 187.355, \quad 234.093 \quad (3.4)$$

と、これは前回の論文で扱ったもの以上に急激に大きくなっていくのが分かる。この比の値は、Poisson 比 σ には依存するが、円板の半径 ℓ 、厚さ h 、Young 率 E 、面密度 ρ には依存せずに決まる量であることは前回述べた通りである。

固有値が求められると、(2.21) 式より、固有関数 $F_k(r)$ が決まる。次ページ図 1 に $k = 1 \sim 5$ の 5 個の固有関数を示す。見てわかるとおり、これら固有関数は、いずれも、 $r = 0$ でゼロとなり、モード番号 k と同じ個数のゼロ点を持つ。

ここでは、円板の縁に初速度を与えたときの振動を解析することにし、(2.46) 式で与えられる変位 $U(r, t)$ を図示することにする。このときの初速度を与える範囲は円板の縁の方で半径の $1/10$ とし、

$$r_0 = \ell - 0.02 = 0.18 \text{ m} \quad (3.5)$$

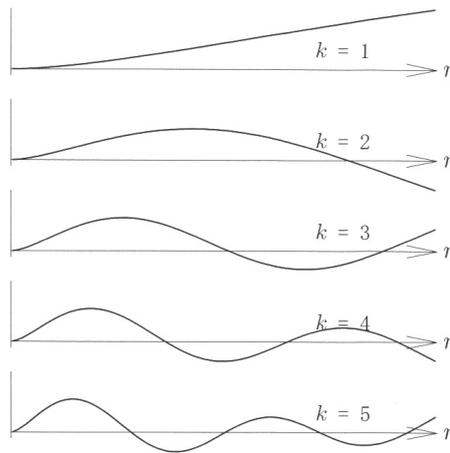


図1 固有関数

と設定する。また、この (2.46) 式に含まれる積分については、解析的にも可能であるが、ここでは数値積分で済ますことにした。このときの変位 $U(r, t)$ を図2と図3に図示する。

これらの図では、右方向に動径座標 r 、斜め上方向に時間 t 、上方向に変位 U をとって3次元的に描いたものである。なお、この変位 U については任意スケールとする。このうち、図2は、時間について $t = 0$ から 0.03 sec までを描いたもので、この図からは、円板の縁で与えられた初速度が中心の方に伝播していくのが見てとれる。つぎの図3は時間間隔をつぎの時間の $t = 0.03$ から 0.06 sec としたものである。これらの図では陰になって見えない部分を描かないように陰線処理をして描いたものである。この図2、図3を合わせた時間の 0.06 sec というのは、一番小さい角振動数の $\omega_1 = 104.846$ から求めた周期 $2\pi/\omega_1 = 0.0599 \text{ sec}$ とほぼ同じでこれで1周期分になっているが、この図からもそれらしいものになっていることが分かる。前回のときのこれらに対応する図について、複雑怪奇、奇妙奇天烈と言ったが、今回のものは、この意味で、多少理解しやすいものになっている。

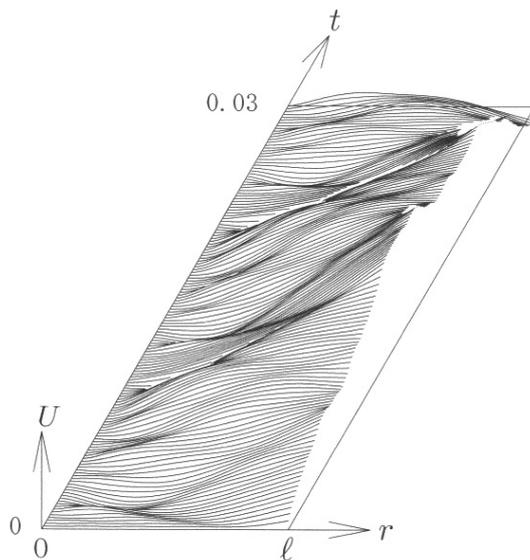


図2 変位 $U(r, t)$, $t = 0 \sim 0.03 \text{ sec}$

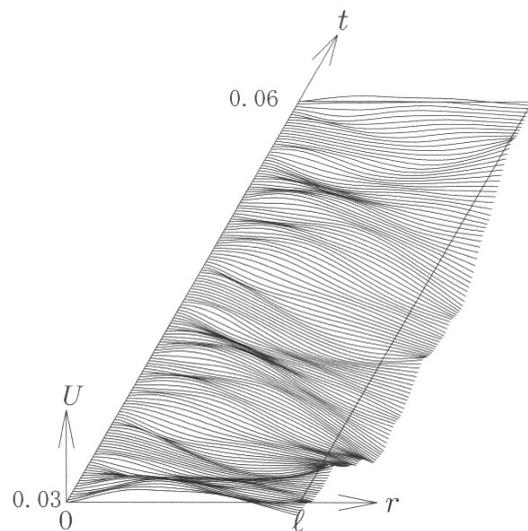


図3 変位 $U(r, t)$, $t = 0.03 \sim 0.06 \text{ sec}$

つぎに示す図 4, 図 5 は実際の円板の振動の様子が分かるように, 面上にとった座標 (x, y) について, x を水平向き, y を斜め上向き, 変位を上向きにとって立体的に描いたものである. これらの図で, 図 4 は $t = 0.015$ sec, 図 5 は $t = 0.045$ sec におけるものである. この場合, いずれも円板の中心はゼロ変位に固定されているが, 図 4 では周辺にいくほど変位は正で増えており, 全体として, パラボラアンテナのような形になっている. また, 図 5 では逆に周辺にいくほど変位は負で増加していくためこれはまさにシンバルのような形になっている.

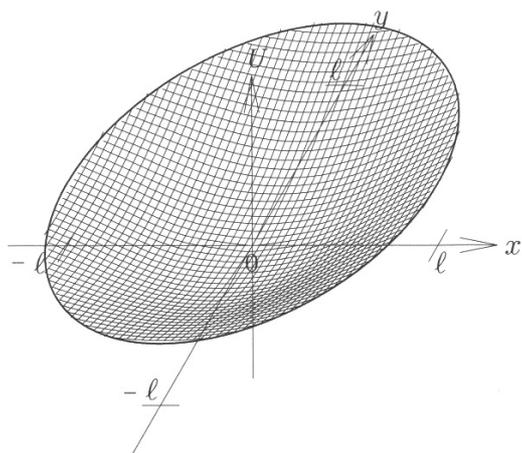


図 4 振動中の円板の形 $t = 0.015$ sec

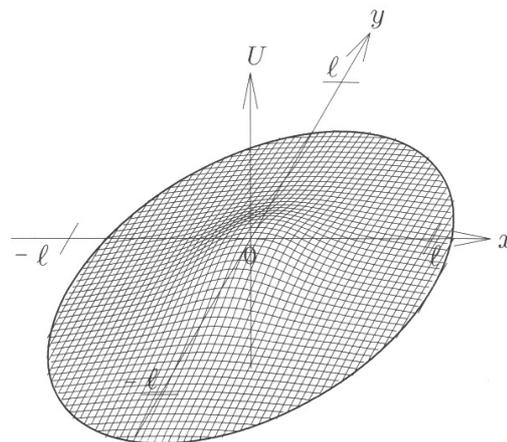


図 5 振動中の円板の形 $t = 0.045$ sec

4 おわりに

ここでは, 金属円板の中心周りに回転対称な振動を扱った. はじめは, 簡単に事が運ぶと考えていたが, 円板の中心を固定したときは, とんでもなく面倒なことに直面するはめに陥った. 中心を固定しなければ, 前回の論文で示したように通常の Bessel 関数 J_0 と変形 Bessel 関数 I_0 だけで話はすむ. ところが, 中心を固定したときは, それらの第 2 種関数である N_0, K_0 も参加することになってしまった. つまり, 4 種の Bessel 関数が勢揃いしてしまったわけである. 初めは, これで数値計算をしてもうまくできるかどうか自信がなくなってきた. しかし, 前回のものに引き続いて, 勇気をだして数値計算をやってみると意外にも素直にすんなりとできてしまった. 第 2 種 Bessel 関数 N_0, K_0 も恐るるに足らずということか.

[謝辞]

今回も, 京都大学名誉教授の中西襄先生にこの原稿を見ていただき, たくさんコメントをいただきました. 先生に心から感謝いたします.

編集後記

「3月は去る」とよく言われるように弥生の月もはや中旬です。いま、松山地方の気候はと言えば、寒い日は結構冷えますが、やや暖かい日もあってそのくりかえしで健康保持に苦勞が絶えません。

今号は3編の論文をご投稿頂いたが、投稿者がやや固定化されているような感もなくはない。

今回の数学の論文は著者（浅田氏）の長年にわたる研究成果の主たる断面を示されたものと思われる。編者（新関）もべき級数の収束半径を推論で明らかにする論文を書いているが、この号に間に合わなかった。

べき級数の収束半径について、このような論文を書くにいたったいきさつを簡単に述べておこう。

ほとんどの微分積分学の書籍はべき級数の収束半径については、まずその公式を示しておいて、それが確かに与えられたべき級数の収束半径になっているという形で証明がされている。

それなら与えられた収束半径をどうやって見つけ出したのだろうか。学生時代にはそれを知りたいと思ったが、どの本にもその説明はなかった。そこで、それを発見的推論による導出としてまとめるつもりである。準備ができ次第、この「通信」に発表したいと思っている。

（新関章三）