数学・物理通信

8 巻 10 号　　2019 年 1 月

編集　新関章三・矢野　忠

2019 年 1 月 8 日

目次 (Contents)

管楽器で使用されるリードの固有振動 (2)

世戸 憲治 *

Characteristic Oscillation of a Reed for Wind Instruments (2)

Kenji SETO*

1 はじめに

前回の論文「管楽器で使用されるリードの固有振動 (1)」(「数学・物理通信」8 巻 9 号) では，リードの厚さが固定端から先端にいくにしたがい一様に薄くなるものとしたときの振動解析をおこなった．しかし，実際のリードの厚さは，良く見ると，固定端から先端に向かって初めは急激に薄くなり，その後はゆっくりと薄くなっていく．そこで，今回は，この厚さを座標の 2 次式と仮定して解いてみる．

2 前回のものをそのまま踏襲したモデル

方程式については前回導入したとおりであるが，ここで，簡単に再録すると，リードの固定端を原点とし先端に向かって x 軸をとり，座標 x, 時刻 t での変位を $V(x,t)$ としたとき，

$$\rho h\, V_{tt}(x,t) = -D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big[h^3 V_{xx}(x,t)\Big] \tag{2.1}$$

となる．ここで，変位 V に付けた添え字はその変数での微分を表すが，ここでは，この微分を，数式の見やすさ，書きやすさから $\partial/\partial x$ と書く場合と，添え字の x で済ます場合とが混在した形で使うことにする．また，ρ はリードの体積密度，D は Young 率 E と Poisson 比 ν を用いて，

$$D = \frac{E}{12(1-\nu^2)} \tag{2.2}$$

と表せる材料定数である．h はリードの厚さであるが，これは x の関数で，前回は x の 1 次式としたが，今回はこれを 2 次式として，

$$h(x) = h_0\Big(1-\frac{x}{\ell}\Big)^2 \tag{2.3}$$

とする．ℓ はリードの振動部分の長さである．

この方程式を，$x=0$ は埋め込み固定端として，

$$V(0,t) = 0, \qquad V_x(x,t)\Big|_{x=0} = 0 \tag{2.4}$$

および，先端の $x=\ell$ では，曲げモーメント M，および剪断力 Q がゼロとなるものとして，

$$M = aDh^3V_{xx}\Big|_{x=\ell} = 0, \qquad Q = aD\frac{\partial}{\partial x}[h^3V_{xx}]\Big|_{x=\ell} = 0 \tag{2.5}$$

* 北海学園大学名誉教授　　E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

の境界条件の基に解くことになる．ここに，a はリードの幅であるが，これは M, Q の定義に必要なもので，式としては，意味を持たない．ここでは，(2.3) 式のように厚さ h を $h(\ell)=0$ となるように仮定したので，この式の M, Q は，$x=\ell$ で自動的にゼロとなる．

この方程式を解く前に，数式簡素化のため，変数の無次元化をしておく．速度の次元を持つ c，および時間の次元を持つ τ を

$$c=\sqrt{\frac{D}{\rho}}, \qquad \tau=\frac{\ell}{c} \tag{2.6}$$

と導入しておく．これを用いて，ℓ を長さの単位，また，τ を時間の単位として，x, h, h_0, t, V を改めて

$$x/\ell \;\to\; x, \quad h/\ell \;\to\; h, \quad h_0/\ell \;\to\; h_0, \quad t/\tau \;\to\; t, \quad V/\ell \;\to\; V \tag{2.7}$$

とおき直す．この変換で方程式は，

$$h\,V_{tt}(x,t)=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big[h^3V_{xx}(x,t)\Big], \qquad h=h_0(1-x)^2 \tag{2.8}$$

となる．ここで，変位 $V(x,t)$ を座標 x と時間 t について変数分離し，時間部分を三角関数として，

$$V(x,t)=X(x)\sin(\omega t) \tag{2.9}$$

とおく．ω は無次元化された角振動数である．このとき，x 依存部分 $X(x)$ が満たす方程式は，

$$\frac{\omega^2}{h_0^2}(1-x)^2X=\frac{d^2}{dx^2}\left[(1-x)^6X_{xx}\right] \tag{2.10}$$

となる．ここで，(2.8) 第 2 式の h を代入した．この方程式を (2.4) 式からでる境界条件

$$X(0)=0, \qquad X_x(x)\Big|_{x=0}=0 \tag{2.11}$$

のもとに解くことになる．この方程式 (2.10) は，$1-x$ を独立変数と見たとき，スケール変換に対し不変な方程式になっているので，前回とは違って，この解は級数展開の形にはならないことを注意する．そこで，

$$X(x)=(1-x)^\sigma \tag{2.12}$$

とおき，方程式に代入すると

$$\sigma(\sigma-1)(\sigma+4)(\sigma+3)=\frac{\omega^2}{{h_0}^2} \tag{2.13}$$

であれば (2.12) 式がその厳密解になり得る．これは，σ について 4 次の方程式であるが，少し変形すると

$$\Big(\sigma+\frac{3}{2}\Big)^4-\frac{17}{2}\Big(\sigma+\frac{3}{2}\Big)^2+\Big(\frac{15}{4}\Big)^2-\frac{\omega^2}{{h_0}^2}=0 \tag{2.14}$$

となるので，これは，$(\sigma+3/2)^2$ に関する 2 次方程式に帰着する．したがって，その解は簡単に求められ，

$$\begin{aligned}\sigma&=\pm\alpha-\tfrac{3}{2}, \qquad \alpha=\frac{1}{2}\sqrt{17+4\sqrt{4+(\omega/h_0)^2}}\geq\frac{5}{2}\\ \sigma&=\pm\beta-\tfrac{3}{2}, \qquad \beta=\frac{1}{2}\sqrt{17-4\sqrt{4+(\omega/h_0)^2}}\end{aligned} \tag{2.15}$$

となる．この式で

$$\omega/h_0=15/4 \tag{2.16}$$

のとき $\beta = 0$ となり，重解を持つことになる．このときは，特殊な事情が発生するので，「付録」で扱うことにする．また，

$$\omega/h_0 > 15/4 \tag{2.17}$$

のとき β は虚数となるので，複素根を持つことになる．いずれにしても，この解のうち，$\alpha - \frac{3}{2}$ は正であるが，他の 3 個の解は，複素根になるものも含めて，その実部はすべて負である．(2.12) 式から σ が負になると，$x = 1$ で $X(x)$ は発散してしまうことになり，これは解として使うことはできない．したがってこのときの解は，

$$X = (1 - x)^{\alpha - \frac{3}{2}} \tag{2.18}$$

の 1 個だけになる．しかし，これでは境界条件である (2.11) 式を満たすことはできない．これは採用したモデルが悪いのであって厚さ h を x の 2 次式とした場合は他のモデルへの変更が必要となる．

3　改良モデル

3.1　モデルの設定

という訳で，モデルの変更を余儀なくされてしまったが，ここでは，これまでの考察ができるだけ生かされる方法をとることにする．それはリードの振動部分の長さはこれまでどおり ℓ とするが，(2.3) 式で使われる ℓ をこれより大きな ℓ_1 に変えてしまうことである．すなわち，(2.3) 式に替わって

$$h(x) = h_0\Big(1 - \frac{x}{\ell_1}\Big)^2, \qquad 0 \le x \le \ell < \ell_1 \tag{3.1}$$

とする．これは，リードの厚さが完全にゼロにはなっていないところで，カットされていることを意味する．そのうえで，この ℓ_1 を長さの基準とし，(2.6) 式の τ を

$$\tau_1 = \frac{\ell_1}{c} \tag{3.2}$$

に変え，この変更にともなって，無次元化の (2.7) 式を

$$x/\ell_1 \;\to\; x, \qquad h/\ell_1 \;\to\; h, \qquad h_0/\ell_1 \;\to\; h_0, \qquad t/\tau_1 \;\to\; t, \qquad V/\ell_1 \;\to\; V \tag{3.3}$$

とする．この変更で方程式 (2.8) (2.10) はそのままの形で変更はないが，x の動き得る範囲が，

$$x_0 = \frac{\ell}{\ell_1} \qquad として \qquad 0 \le x \le x_0 < 1 \tag{3.4}$$

に制限される．

このときの $x = 0$ での境界条件 (2.11) はそのままであるが，$x = \ell$ での条件 (2.5) 式はそのままでは成立しないので，この条件を無次元化した式

$$X_{xx}(x)\Big|_{x=x_0} = 0, \qquad X_{xxx}(x)\Big|_{x=x_0} = 0 \tag{3.5}$$

を満たす必要がでてくる．

3.2 固有値と固有関数

このときの解は，x が 1 まで行かないので，(2.15) 式で求めたすべての σ の値が使えることになり，一般解は A, B, C, D を任意定数として，

$$X(x) = A(1-x)^{\alpha-\frac{3}{2}} + B(1-x)^{-\alpha-\frac{3}{2}} + C(1-x)^{\beta-\frac{3}{2}} + D(1-x)^{-\beta-\frac{3}{2}} \tag{3.6}$$

と書ける．この式に (2.11) と (3.5) の 4 個の条件式を課すことになる．まず，(2.11) の条件を課すと，

$$A + B + C + D = 0, \qquad \alpha(A-B) + \beta(C-D) = 0 \tag{3.7}$$

となり，(3.5) の条件を課すと，

$$f(\alpha)A + f(-\alpha)B + f(\beta)C + f(-\beta)D = 0, \quad \alpha f(\alpha)A - \alpha f(-\alpha)B + \beta f(\beta)C - \beta f(-\beta)D = 0 \tag{3.8}$$

となる．ここに，関数 f を

$$f(\alpha) = (\alpha - \tfrac{3}{2})(\alpha - \tfrac{5}{2})(1-x_0)^{\alpha} \tag{3.9}$$

と定義した．定数 A, B, C, D に対するこれら 4 個の条件式が成立しなければならないが，そのときこれら定数がすべてゼロになってしまわないためには，これら方程式の係数行列式の値がゼロでなければならない．すなわち，

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & -\alpha & \beta & -\beta \\ f(\alpha) & f(-\alpha) & f(\beta) & f(-\beta) \\ \alpha f(\alpha) & -\alpha f(-\alpha) & \beta f(\beta) & -\beta f(-\beta) \end{vmatrix} = 0 \tag{3.10}$$

である．実際にこの行列式の値を計算し，これを ω の関数として $E(\omega)$ と定義すると，

$$\begin{aligned} E(\omega) &\equiv (\alpha^2+\beta^2)[f(\alpha)-f(-\alpha)][f(\beta)-f(-\beta)] \\ &\quad + 2\alpha\beta\Big[2f(\alpha)f(-\alpha) + 2f(\beta)f(-\beta) - [f(\alpha)+f(-\alpha)][f(\beta)+f(-\beta)]\Big] = 0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

となる．この式を解くと α, β の中に含まれる ω の値が固有値として決まる．この意味で，この式が固有値方程式である．なお，(2.14) 式における根と係数の関係から，

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{17}{2}, \qquad \alpha\beta = \sqrt{(15/4)^2 - (\omega/h_0)^2} \tag{3.12}$$

となり，さらにこれを用いて，

$$\begin{aligned} &f(\alpha)f(-\alpha) = (\tfrac{15}{4}+\alpha^2)^2 - 16\alpha^2, \qquad f(\beta)f(-\beta) = (\tfrac{15}{4}+\beta^2)^2 - 16\beta^2, \\ &\qquad f(\alpha)f(-\alpha) + f(\beta)f(-\beta) = 2(\omega/h_0)^2 \end{aligned} \tag{3.13}$$

となるので，この固有値方程式はいくぶんか簡素化され，

$$\begin{aligned} E(\omega) &\equiv \frac{17}{2}[f(\alpha)-f(-\alpha)][f(\beta)-f(-\beta)] \\ &\quad + 2\sqrt{(15/4)^2-(\omega/h_0)^2}\Big[4(\omega/h_0)^2 - [f(\alpha)+f(-\alpha)][f(\beta)+f(-\beta)]\Big] = 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

となる．これを解くとき，前にも注意したように $\omega/h_0 > 15/4$ のとき β は虚数となるので，$\beta = i|\beta|$ として，

$$\begin{aligned} f(\beta) = (\tfrac{15}{4} - |\beta|^2)\cos\big(|\beta|\log(1-x_0)\big) + 4|\beta|\sin\big(|\beta|\log(1-x_0)\big) \\ + i(\tfrac{15}{4} - |\beta|^2)\sin\big(|\beta|\log(1-x_0)\big) - 4i|\beta|\cos\big(|\beta|\log(1-x_0)\big) \end{aligned} \tag{3.15}$$

となり，

$$\begin{aligned} f(\beta) + f(-\beta) &= 2(\tfrac{15}{4} - |\beta|^2)\cos\big(|\beta|\log(1-x_0)\big) + 8|\beta|\sin\big(|\beta|\log(1-x_0)\big) \\ f(\beta) - f(-\beta) &= 2i(\tfrac{15}{4} - |\beta|^2)\sin\big(|\beta|\log(1-x_0)\big) - 8i|\beta|\cos\big(|\beta|\log(1-x_0)\big) \end{aligned} \tag{3.16}$$

を使うことになる．

固有値方程式 (3.11) の 1 つの自明な解は $\beta = 0$, すなわち，$\omega/h_0 = 15/4$ のときである．しかし，このときは，重解という特殊な事情が発生するので「付録」で扱うことにするが，これは正しい固有値にはなっていない．また，実際に，固有値方程式を数値的に解析した結果では，$0 \le \omega/h_0 < 15/4$ の範囲ではゼロ点を持たないので，固有値はこの範囲を超えたより大きいところに存在することになる．この固有値を小さい方から ω_i,（$i = 1, 2, 3, \cdots$）とし，そのときの固有関数を $X(x, \omega_i)$,（$i = 1, 2, 3, \cdots$）とする．この固有関数に関しては，(3.6) 式における定数 A, B, C, D について，(3.7) の 2 本の式，および，(3.8) の第 1 式の計 3 本の式から，それらの比を求め，それらが分数式にならないように適当に係数を決めると，

$$\begin{aligned} A =& \alpha[f(\beta) - f(-\beta)] - \beta[f(\beta) + f(-\beta) - 2f(-\alpha)] \\ B =& \alpha[f(\beta) - f(-\beta)] + \beta[f(\beta) + f(-\beta) - 2f(\alpha)] \\ C =& \beta[f(\alpha) - f(-\alpha)] - \alpha[f(\alpha) + f(-\alpha) - 2f(-\beta)] \\ D =& \beta[f(\alpha) - f(-\alpha)] + \alpha[f(\alpha) + f(-\alpha) - 2f(\beta)] \end{aligned} \tag{3.17}$$

となる．このときの (3.6) 式を固有関数 $X(x, \omega_i)$ とする．ただし，これは規格化されたものではない．

3.3 固有関数の規格化

固有関数の規格化に関しては前回と方法は同じであるが，リードの厚さが x の 2 次式になる分だけ変更が必要になる．初めに，固有値とはかぎらない 2 個の ω を考え，これを ω, ω' とする．この 2 つの ω に対応し方程式 (2.10) を満たす関数を，$X(x, \omega)$, $X(x, \omega')$ とする．すなわち，

$$\frac{\omega^2}{h_0^2}(1-x)^2 X(x,\omega) = \frac{d^2}{dx^2}\big[(1-x)^6 X_{xx}(x,\omega)\big], \qquad \frac{\omega'^2}{h_0^2}(1-x)^2 X(x,\omega') = \frac{d^2}{dx^2}\big[(1-x)^6 X_{xx}(x,\omega')\big] \tag{3.18}$$

である．この第 1 式に $X(x, \omega')$ を掛け，第 2 式に $X(x, \omega)$ を掛けて，辺々を引き算すると，

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2 - \omega'^2}{h_0^2}(1-x)^2 X(x,\omega)X(x,\omega') = \frac{d}{dx}\Big[X(x,\omega')\frac{d}{dx}[(1-x)^6 X_{xx}(x,\omega)] - X(x,\omega)\frac{d}{dx}[(1-x)^6 X_{xx}(x,\omega')] \\ - X_x(x,\omega')(1-x)^6 X_{xx}(x,\omega) + X_x(x,\omega)(1-x)^6 X_{xx}(x,\omega')\Big] \end{aligned} \tag{3.19}$$

となる．この式を x について 0 から x_0 まで積分すると，

$$\begin{aligned} \int_0^{x_0} (1-x)^2 X(x,\omega)X(x,\omega')dx = \frac{h_0^2}{\omega^2 - \omega'^2}\Big[X(x,\omega')\frac{d}{dx}[(1-x)^6 X_{xx}(x,\omega)] - X(x,\omega)\frac{d}{dx}[(1-x)^6 X_{xx}(x,\omega')] \\ - X_x(x,\omega')(1-x)^6 X_{xx}(x,\omega) + X_x(x,\omega)(1-x)^6 X_{xx}(x,\omega')\Big]_0^{x_0} \end{aligned} \tag{3.20}$$

となる．ここで用いた 2 つの関数 $X(x,\omega)$, $X(x,\omega')$ に含まれる係数 A, B, C, D は (3.17) 式に従って作られているものとすると，(2.11) の 2 個の条件，および，(3.5) の第 1 式の条件を満たすことになる．つまり，

$$X(0,\omega)=0, \quad X_x(0,\omega)=0, \quad X_{xx}(x_0,\omega)=0, \quad X(0,\omega')=0, \quad X_x(0,\omega')=0, \quad X_{xx}(x_0,\omega')=0 \tag{3.21}$$

である．この条件を使うと，(3.20) 式右辺で，$x=0$ の下限での値はすべて消え，また，$x=x_0$ の上限での値は半分は消え，

$$\int_0^{x_0}(1-x)^2X(x,\omega)X(x,\omega')dx=\frac{h_0^2(1-x_0)^6}{\omega^2-\omega'^2}\Big[X(x_0,\omega')X_{xxx}(x_0,\omega)-X(x_0,\omega)X_{xxx}(x_0,\omega')\Big] \tag{3.22}$$

となる．ここで，(3.5) 式の第 2 の条件が満たされて，ω, ω' が固有値 ω_i, ω_j になる場合を考える．もし，$\omega_i\neq\omega_j$ であればこの右辺はゼロとなるので，異なる固有値間の直交性の式がでる．また，同じ固有値になるときは，この式は 0/0 の不定形となるので，まず，先に $\omega'=\omega_i$ とおいてから，$\omega\to\omega_i$ の極限をとる．結果は，

$$\int_0^{x_0}(1-x)^2X(x,\omega_i)X(x,\omega_j)dx={N_i}^2\delta_{i,j}, \qquad {N_i}^2=\frac{h_0^2(1-x_0)^6}{2\omega_i}X(x_0,\omega_i)\Big[\partial_\omega X_{xxx}(x_0,\omega)\Big]_{\omega=\omega_i} \tag{3.23}$$

という固有関数間の直交性の式となる．ここに，N_i は規格化定数で，$X(x,\omega_i)/N_i$ が規格化された固有関数となる．

3.4 数値計算例

これまでの結果に基づいて数値的にあたってみる．ここでは，アルト・サックス用のリードを想定して，長さ ℓ, 最大厚さ h_0, (2.6) 式で定義される速度 c を以下のようにとる．

$$\ell=3.8\times10^{-2}\mathrm{m}, \quad h_0=2.2\times10^{-3}\mathrm{m}, \quad c=1.452\times10^{3}\mathrm{m/s} \tag{3.24}$$

これらは前回のものと同じ数値である．また，ここでは，(3.4) 式にでてくる x_0 を $x_0=0.8$ にとることにし，これにともない ℓ_1, τ_1, および，(3.3) 式で定義される無次元化した h_0 を

$$x_0=0.8, \quad \ell_1=\ell/x_0=4.75\times10^{-2}\mathrm{m}, \quad \tau_1=\ell_1/c=3.271\times10^{-5}\mathrm{s}, \quad \text{無次元化した}\ h_0=0.0463 \tag{3.25}$$

とする．この設定で固有値方程式 (3.14) を数値的に解いてみると，初めの 10 個は

$$\frac{\omega_i}{h_0}=6.6544, \quad 15.7505, \quad 31.7073, \quad 54.9444, \quad 85.6477, \quad 123.8924, \quad 169.7132, \quad 223.1275, \quad 284.1449, \quad 352.7708 \tag{3.26}$$

となる．これに h_0 を掛け，$2\pi\tau_1$ で割って，振動数 n_i にすると，

$$n_i[\mathrm{kHz}]=\frac{\omega_i}{2\pi\tau_1}=1.498, \quad 3.548, \quad 7.142, \quad 12.377, \quad 19.294, \quad 27.910, \quad 38.232, \quad 50.265, \quad 64.011, \quad 79.471 \tag{3.27}$$

となる．前回求めたものとの比較で言うと，前回は，最小の振動数が 1.872 kHz, 10 番目の振動数が 77.993 kHz だったのでそれほどの違いはないというところである．

つぎの図 1 に，これら固有値に属する固有関数を，初めの 5 個分だけを示す． このグラフは $X(x,\omega_i)$ を (3.23) 式にしたがい規格化して描いたものである．

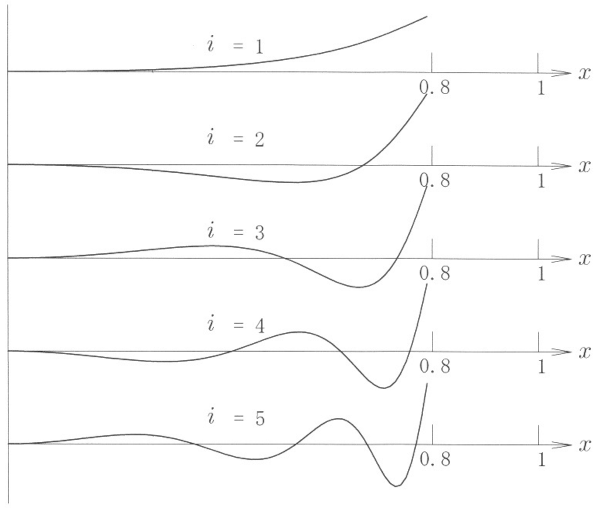

図 1 固有関数 $X(x, \omega_i)$

図中の i はモード番号（固有値番号）である．どのグラフもモード番号と同じ個数のゼロ点を持つ．前回のものと比べると，大きくはほとんど同じと言ってもよいが，先端部における振動が前回のものほど大きくはない．これは前回のものがリードの先端部で完全に厚さがゼロであったのに対し，今回のものは，厚さがゼロにならないうちに途中でカットされているためである．

4　おわりに

リードの固有振動について 2 編のものを書いてみた．その解析方法はまったく違っていたので，初めは異なる結果がでることを期待していたが，数値的に当たってみるとほとんど同じという結果になってしまった．それにつけても，リードの厚さを座標の 1 次式にするか，2 次式にするかで，こんなにも解析方法が変わってしまうことが，不思議と言えば不思議である．いっそ，物理のことは度外視して，数学的興味から，1 次式と 2 次式の中間の 3/2 次式のときはどうなるのか，少し，やってはみたが，だんだん複雑怪奇なものになってしまい．既知の関数で表せるようなものにはなりそうもない．1 次式と 2 次式でできたことで満足するしかないのかもしれない．

5　付録：$\beta = 0$ で重解の場合

(2.15) 式で，$\omega/h_0 = 15/4$ のときは，$\beta = 0$ となり，重解を持つことになる．このときは，方程式 (2.10) の解 $X(x)$ として，$(1-x)^{\beta - \frac{3}{2}}$ を β で微分してから $\beta = 0$ とした $(1-x)^{-\frac{3}{2}} \log(1-x)$ も解となる．したがって，このときの一般解は，A, B, C, D を任意定数として，

$$X(x) = A(1-x)^{\alpha - \frac{3}{2}} + B(1-x)^{-\alpha - \frac{3}{2}} + C(1-x)^{-\frac{3}{2}} + D(1-x)^{-\frac{3}{2}} \log(1-x) \tag{5.1}$$

となる．ここで，α の値は $\alpha = \sqrt{17/2}$ である．この解に境界条件 (2.11) および (3.5) 式を付加することになる．まず，(2.11) 式から

$$A + B + C = 0, \qquad \alpha(A - B) + D = 0 \tag{5.2}$$

となり，(3.5) 式からは，(3.9) 式の $f(\alpha)$ を用いて，

$$f(\alpha)A + f(-\alpha)B + f(0)C + [f(0)\log(1-x_0) - 4]D = 0, \qquad \alpha f(\alpha)A - \alpha f(-\alpha)B + f(0)D = 0 \tag{5.3}$$

となる．定数 $A,\ B,\ C,\ D$ がすべてゼロにならないためには，これら 4 本の式からできる係数行列式の値がゼロでなければならない．すなわち，

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \alpha & -\alpha & 0 & 1 \\ f(\alpha) & f(-\alpha) & f(0) & f(0)\log(1-x_0)-4 \\ \alpha f(\alpha) & -\alpha f(-\alpha) & 0 & f(0) \end{vmatrix} = 0 \tag{5.4}$$

であり，この行列式を計算して，

$$-\alpha^2\big[f(0)\log(1-x_0)-4\big]\big(f(\alpha)-f(-\alpha)\big)+2\alpha\big[f(0)\big(f(\alpha)+f(-\alpha)\big)-f(\alpha)f(-\alpha)-f(0)^2\big]=0 \tag{5.5}$$

となる．しかし，α はすでに決まった定数 $(=\sqrt{17/2}\ )$ であり，x_0 もモデルによって与えられる定数なので，この値がゼロになることは望むべきもない．したがって，この重解になる場合は，境界条件を満たす解にはなり得ない．

[謝辞]
今回も，京都大学名誉教授の中西襄先生にこの原稿を見ていただき，たくさんのコメントをいただきました．先生に心から感謝いたします．

管楽器で使用されるリードの固有振動 (3)

世戸 憲治 *

Characteristic Oscillation of a Reed for Wind Instruments (3)

Kenji Seto*

1 はじめに

前々回の「管楽器で使用されるリードの固有振動 (1)」(「数学・物理通信」8 巻 9 号) では，リードの付け根から先端部に向かってその厚さが一様に薄くなるリードの固有振動を解析した．これは，数学的には 4 階の線形微分方程式を解く問題である．これを中西襄先生に見ていただいたところ，私が求めた解が，1 次の Bessel 関数 J_1，および，1 次の変形 Bessel 関数 I_1 で表されることを教えていただいた．その上，先生からは，数学的な観点だけから考えると，この方程式が一般 μ 次の Bessel 関数のものに拡張することができることを教えていただいた．ただし，この拡張されたものは，物理とは関係なく拡張されたものだったので，1 次の Bessel 関数だけが，たまたま，物理と結びつくのは不思議でもあった．そこで，この一般次数の Bessel 関数を物理と結びつけるにはどうすればよいかを考えてみた．これは，以前に，「鎖振子の一般化」(「数学・物理通信」6 巻 1 号) で紹介したように，通常の鎖振子は 0 次の Bessel 関数を用いて解けるが，鎖の密度を場所ごとに変化させると一般次の Bessel 関数が表れることからの類推である．

2 方程式の導入とその解法

2.1 方程式の導入

解くべき方程式は，リードの固定端を原点として，先端に向かって x 軸をとったとき，座標 x, 時刻 t におけるリードの変位を $V(x,t)$ としたとき，

$$\rho h V_{tt}(x,t) = -D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big[h^3 V_{xx}(x,t)\Big] \tag{2.1}$$

となる．ここに，V に付けた添え字は，それぞれの変数での微分を表す．また，ρ はリードの体積密度，h はリードの厚さである．さらに， D は Yonug 率 E，Poisson 比 ν を用いて

$$D = \frac{E}{12(1-\nu^2)} \tag{2.2}$$

と書ける材料定数である．前々回は，リードの長さを ℓ としたとき，厚さ h を，x の 1 次式として $h = h_0(1-x/\ell)$ とした．今回は，鎖振子の類推から，この厚さ h のみならず，リードの密度 ρ も x の関数として扱う．もちろんそんなリードが存在するわけではないが，これは解を一般次の Bessel 関数にもっていくための便法とする．

* 北海学園大学名誉教授　　E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

そこで，これら $h,\ \rho$ を

$$h(x) = h_0\Big(1-\frac{x}{\ell}\Big)^{\alpha}, \quad \rho(x) = \rho_0\Big(1-\frac{x}{\ell}\Big)^{\beta}, \qquad \alpha,\ \beta \geq 0 \tag{2.3}$$

とおく．

ここで，速度の次元を持つ c と時間の次元を持つ τ を

$$c = \sqrt{\frac{D}{\rho_0}}\ , \qquad\qquad \tau = \frac{\ell}{c} \tag{2.4}$$

と導入する．これを用いて，リードの長さ ℓ を長さの単位，また，τ を時間の単位として，変数を無次元化し，

$$x/\ell\ \to\ x, \quad h_0/\ell\ \to\ h_0, \quad V/\ell\ \to\ V, \quad t/\tau\ \to\ t, \tag{2.5}$$

と改めて置き直すことにすると，方程式は

$$\frac{1}{{h_0}^2}(1-x)^{\alpha+\beta}V_{tt} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big[(1-x)^{3\alpha}V_{xx}\Big] \tag{2.6}$$

となる．ここで，変位 $V(x,t)$ を座標 x と時間 t について変数分離形とし，時間部分については三角関数として，

$$V(x,t) = X(x)\sin(\omega t) \tag{2.7}$$

とおく．ω は無次元化した角振動数である．これで方程式の x 依存部分 $X(x)$ は

$$\frac{\omega^2}{{h_0}^2}(1-x)^{\alpha+\beta}X = \frac{d^2}{dx^2}\Big[(1-x)^{3\alpha}X_{xx}\Big] \tag{2.8}$$

を満たすことになる．ここで，さらに独立変数 x の変換を

$$\gamma(1-x) = y, \qquad \gamma = \Big(\frac{\omega^2}{{h_0}^2}\Big)^{1/(4+\beta-2\alpha)}, \qquad 4+\beta-2\alpha \neq 0 \tag{2.9}$$

とすると，方程式は

$$y^{\alpha+\beta}X = \frac{d^2}{dy^2}\Big[y^{3\alpha}X_{yy}\Big] \tag{2.10}$$

となる．この方程式は，ここで一旦，このままにしておく．

2.2 Bessel 関数の理論

ここでは，中西襄先生から教えていただいたことについて述べる．μ 次の Bessel 関数，および，μ 次の変形 Bessel 関数が満たす方程式は，独立変数を z, 従属変数を $P_{(\pm)}(z)$ として，

$$\Big[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{d}{dz} - \frac{\mu^2}{z^2} \pm 1\Big]P_{(\pm)}(z) = 0 \tag{2.11}$$

と書ける．ここに，複号は，プラスが通常の Bessel 関数，マイナスが変形 Bessel 関数に対応する．この式で，従属変数を $P_{(\pm)}(z)/z^{\mu}$ の形にすると，

$$\Big[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{2\mu+1}{z}\frac{d}{dz} \pm 1\Big]\frac{P_{(\pm)}(z)}{z^{\mu}} = 0 \tag{2.12}$$

となる．さらに，独立変数を z から y に，

$$z = 2\sqrt{y} \tag{2.13}$$

と変換すると，

$$\left[y\frac{d^2}{dy^2}+(\mu+1)\frac{d}{dy}\pm 1\right]\frac{P_{(\pm)}(2\sqrt{y})}{(2\sqrt{y})^\mu}=0 \tag{2.14}$$

となる．ここで，複号で入っている 2 個の演算子を重ねて積の形にすると，

$$\left[\left(y\frac{d^2}{dy^2}+(\mu+1)\frac{d}{dy}\right)^2-1\right]\frac{P_{(\pm)}(2\sqrt{y})}{(2\sqrt{y})^\mu}=0 \tag{2.15}$$

となり，この微分演算子の部分を計算していくと，

$$\left(y\frac{d^2}{dy^2}+(\mu+1)\frac{d}{dy}\right)^2=y^2\frac{d^4}{dy^4}+2(\mu+2)y\frac{d^3}{dy^3}+(\mu+1)(\mu+2)\frac{d^2}{dy^2}=y^{-\mu}\frac{d^2}{dy^2}\left(y^{\mu+2}\frac{d^2}{dy^2}\right) \tag{2.16}$$

となるので，この方程式は，

$$\left[\frac{d^2}{dy^2}\left(y^{\mu+2}\frac{d^2}{dy^2}\right)-y^\mu\right]\frac{P_{(\pm)}(2\sqrt{y})}{(2\sqrt{y})^\mu}=0 \tag{2.17}$$

となる．この式と (2.10) 式とを比較すると，

$$\alpha+\beta=\mu,\qquad 3\alpha=\mu+2 \tag{2.18}$$

の関係があれば，まったく同じ方程式とみなされる．この関係式から，α，β は

$$\alpha=\frac{\mu+2}{3},\qquad \beta=\frac{2(\mu-1)}{3},\qquad 4+\beta-2\alpha=2 \tag{2.19}$$

と 1 個のパラメータ μ で表されることになる．このとき，(2.9) の変換式は，この第 3 式から，

$$\frac{\omega}{h_0}(1-x)=y \tag{2.20}$$

となる．なお，$\beta\geq 0$ なので，$\mu\geq 1$ に限定される．

この結果から，(2.10) 式の解 X は μ 次の Bessel 関数で表され，4 個の独立解

$$X=\frac{J_\mu(2\sqrt{y})}{(2\sqrt{y})^\mu},\quad \frac{N_\mu(2\sqrt{y})}{(2\sqrt{y})^\mu},\qquad \frac{I_\mu(2\sqrt{y})}{(2\sqrt{y})^\mu}\qquad \frac{K_\mu(2\sqrt{y})}{(2\sqrt{y})^\mu} \tag{2.21}$$

を得る．ここに，J_μ，N_μ は，第 1 種，第 2 種 Bessel 関数，I_μ，K_μ は第 1 種，第 2 種変形 Bessel 関数である．このうち，N_μ，K_μ は，$x=1$，$(y=0)$ で発散するので，ここでの解としては不適当であり，使えるのは J_μ，I_μ に限られる．これら 2 つの関数をここでは，$F(x)$，$G(x)$ と書くことにして，

$$F(x)=\frac{J_\mu(2\sqrt{y})}{(2\sqrt{y})^\mu},\qquad G(x)=\frac{I_\mu(2\sqrt{y})}{(2\sqrt{y})^\mu},\qquad y=\frac{\omega}{h_0}(1-x) \tag{2.22}$$

と定義する．これら 2 つの関数は，分母に $(2\sqrt{y})^\mu$ が付くので $y=0$ で発散するように見えるが，実際は，分子と相殺していて発散は起こらないことを注意する．

2.3 固有値と固有関数

リードの固定端 $x=0$ は埋め込み固定端として，境界条件を

$$X(0)=0,\qquad X_x(x)\Big|_{x=0}=0 \tag{2.23}$$

と設定する．この第 1 式を満たすために，ここでの解を

$$X(x) = F(x)G(0) - F(0)G(x) \tag{2.24}$$

と選んでおく．また，第 2 式は，

$$X_x(x)\Big|_{x=0} = \Big[F_x(x)G(0) - F(0)G_x(x)\Big]_{x=0} = 0 \tag{2.25}$$

となるが，これは (2.22) 式を用いてより具体的に表すと，式が冗長になるので，

$$r = \sqrt{\omega/h_0} \tag{2.26}$$

と置くことにして，

$$I_\mu(2r)\Big[r\Big(J_{\mu-1}(2r) - J_{\mu+1}(2r)\Big) - \mu J_\mu(2r)\Big] - J_\mu(2r)\Big[r\Big(I_{\mu-1}(2r) + I_{\mu+1}(2r)\Big) - \mu I_\mu(2r)\Big] = 0 \tag{2.27}$$

となる．これから，r の中に含まれる ω の値が固有値として決定する．この固有値は離散的に求まるはずで，これを ω_i，$(i = 1, 2, 3, \cdots)$ とし，また，そのときの解 X を $X(x, \omega_i)$，$(i = 1, 2, 3, \cdots)$ と表わし，これを固有関数とする．

2.4 固有関数の直交性

固有値とは限らない 2 個の ω を考え，それらを ω，ω' とし，それに対応した X を $X(x, \omega)$，$X(x, \omega')$ と書く．これらが満たす方程式は，(2.8) 式で，(2.18) の関係式を用い α，β を μ で表すことにして，

$$\frac{\omega^2}{{h_0}^2}(1-x)^\mu X(x,\omega) = \frac{d^2}{dx^2}\Big[(1-x)^{\mu+2}X_{xx}(x,\omega)\Big], \qquad \frac{\omega'^2}{{h_0}^2}(1-x)^\mu X(x,\omega') = \frac{d^2}{dx^2}\Big[(1-x)^{\mu+2}X_{xx}(x,\omega')\Big] \tag{2.28}$$

と書いておく．この第 1 式に $X(x, \omega')$ を掛け，第 2 式に $X(x, \omega)$ を掛けてから，辺々を引き算すると，

$$\begin{aligned}\frac{\omega^2 - \omega'^2}{{h_0}^2}&(1-x)^\mu X(x,\omega)X(x,\omega') \\ &= \frac{d}{dx}\Big[X(x,\omega')\frac{d}{dx}\Big((1-x)^{\mu+2}X_{xx}(x,\omega)\Big) - X(x,\omega)\frac{d}{dx}\Big((1-x)^{\mu+2}X_{xx}(x,\omega')\Big) \\ &\qquad + X_x(x,\omega)(1-x)^{\mu+2}X_{xx}(x,\omega') - X_x(x,\omega')(1-x)^{\mu+2}X_{xx}(x,\omega)\Big]\end{aligned} \tag{2.29}$$

となる．これを x で 0 から 1 まで積分すると，右辺はただちに積分され，上限での値と下限での値の差になるが，$(1-x)^{\mu+2}$ のために上限での値はすべて消える．また，下限での値は，関数 X が (2.24) 式を満たすように選ばれているものとすると，半分は消え，結果は，

$$\int_0^1 (1-x)^\mu X(x,\omega)X(x,\omega')dx = \frac{{h_0}^2}{\omega^2 - \omega'^2}\Big[X_x(0,\omega')X_{xx}(0,\omega) - X_x(0,\omega)X_{xx}(0,\omega')\Big] \tag{2.30}$$

となる．ここで，(2.25) 式が満たされて，ω，ω' が固有値 ω_i，ω_j となる場合を考える．もし，$\omega_i \neq \omega_j$ のときは，右辺はゼロとなるので，異なる固有値同士の固有関数の直交性が示される．同じ固有値になるときは，この式は 0/0 の不定形になるので，先に，$\omega' = \omega_i$ とおき，その後，$\omega \to \omega_i$ の極限をとる．結果として，固有関数の直交性の式

$$\int_0^1 (1-x)^\mu X(x,\omega_i)X(x,\omega_j)dx = {N_i}^2\delta_{i,j}, \qquad {N_i}^2 = -\frac{{h_0}^2}{2\omega_i}\big[\partial_\omega X_x(0,\omega)\big]_{\omega=\omega_i}X_{xx}(0,\omega_i) \tag{2.31}$$

を得る．ここに，N_i は規格化定数で，$X(x, \omega_i)/N_i$ が規格化された固有関数となる．

3　数値計算例

ここで扱ったようなリードの密度が場所ごとに変化するようなものは，もちろん，現実には存在しない．しかし，最近はプラスティック製のものも出ているので，そのうち研究が進めば，そのようなものも現れるかもしれない．

これまでの結果に基づいて数値的にあたってみる．ここでは，前回のデータに従って，リードの長さ ℓ, 最大厚さ h_0, および，無次元化した h_0 を以下のようにとる．

$$\ell = 3.8 \times 10^{-2}\mathrm{m}, \qquad h_0 = 2.2 \times 10^{-3}\mathrm{m}, \qquad \text{無次元化した } h_0 \text{は，} h_0 = 0.0579 \tag{3.1}$$

となる．さらに，(2.4) 式に従った速度 c, 時間 τ を，

$$c = 1.452 \times 10^{3}\mathrm{m/s}, \qquad \tau = 2.616 \times 10^{-5}\mathrm{s} \tag{3.2}$$

ととる．これらは前回のものと同じ数値である．また，前回は，1 次の Bessel 関数がでてくる場合を扱ったので，今回は，2 次の Bessel 関数がでる場合を扱ってみる．(2.19) 式で $\mu = 2$ として，

$$\alpha = \frac{4}{3}, \qquad \beta = \frac{2}{3} \tag{3.3}$$

となる．この設定で固有値方程式 (2.27) を数値的に解いてみると，初めの 10 個は

$$\omega_i = 0.5048, \quad 1.2243, \quad 2.2264, \quad 3.5133, \quad 5.0855, \quad 6.9432, \quad 9.0865, \quad 11.5155, \quad 14.2301, \quad 17.2284 \tag{3.4}$$

となる．これは無次元化された角振動数なので，これを τ で割り，さらに 2π で割って，振動数 n_i にすると，

$$n_i[\mathrm{kHz}] = \frac{\omega_i}{2\pi\tau} = 3.0711, \quad 7.4485, \quad 13.5452, \quad 21.3745, \quad 30.9397, \quad 42.2418, \quad 55.2814, \quad 70.0592, \quad 86.5746, \quad 104.8160 \tag{3.5}$$

となる．前回求めたものとの比較で言うと，最小の振動数は 1.872 kHz，10 番目の振動数は 77.993 kHz だったので今回のものはかなりの程度振動数が上がっている．これは，リードの先端にいくほど，密度が小さくなるので，そのぶんだけ振動しやすくなると考えられる．

つぎの図 1 に，これら固有値に属する固有関数を，初めの 5 個分だけを示す． このグラフは $X(x, \omega_i)$ を (2.31) 式にしたがい規格化して描いたものである．

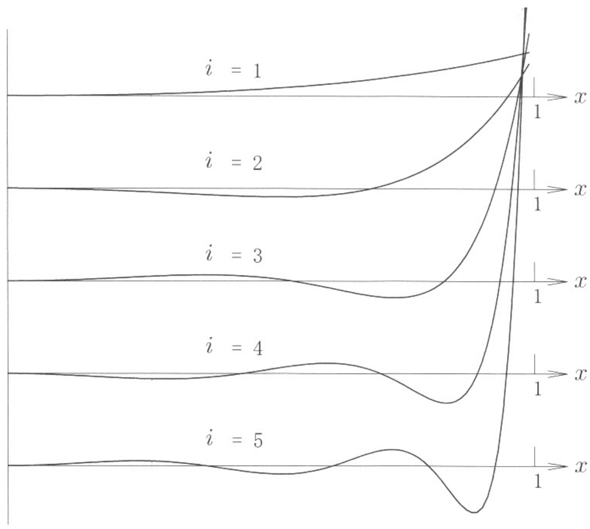

図 1 固有関数 $X(x, \omega_i)$

図中の i はモード番号（固有値番号）である．どのグラフもモード番号と同じ個数のゼロ点を持つ．前回のものと比べると，モード番号が大きくなるにつれ，リードの先端部 $x = 1$ の近くで，かなりの程度振幅が大きくなっている．これも先端部ほど，密度が小さくなるとした結果であろう．

4　おわりに

私は，Bessel 関数大好き人間で，思わぬところで，Bessel 関数に出会うとすぐに嬉しくなってしまう．Bessel 関数というと，2 次元，3 次元の波動方程式を極座標で解くときに出会うものというのが常識であるが，ときどき，思わぬところで出会うことがある．「はじめに」のところでも書いたように，鎖振子の微小振動や，格子振動などでも出会ったりする．もともと，Bessel が Bessel 関数を考えたのは，惑星の運動に関する Kepler 方程式を解くためのものであった．

今回も，密度が場所ごとに変化するリードなどという在りもしないものを，Bessel 関数の魅力に惹かれて書いてしまった．

[謝辞]

今回も，京都大学名誉教授の中西襄先生にこの原稿を見ていただき，いくつかのコメントをいただきました．「はじめに」のところで書いたようにここで扱ったことは，先生が一般次の Bessel 関数が解になるような方程式に拡張していただいたことが，きっかけでできたものです．この点で，先生に心から感謝いたします．

Laméの定数の導出

矢野　忠[*1]

Derivation of Lamé's Constants

Tadashi YANO[*2]

目次

1　はじめに

私の若いころ，愛媛大学工学部に超音波ホログラフィについてのセミナーをやっていた研究者 U さんがおられ，そのセミナーにほんの短期間だが，参加したことがあった．

そのセミナーで弾性体力学での等方的な物体に働く応力とそのひずみの間の関係を与える，定数係数ははじめ 36 個あるが（(2.1),(2.2) を参照），いろいろな対称性の条件を課して，ただ 2 つの Lamé の定数 λ と μ が導かれることを知った．もちろんそのプロセスの詳細については知らなかったので，その後そのプロセスを [1] で調べてセミナーで説明をした．

このエッセイはそのときのメモをもとにして書いた [2]．だから，このエッセイには新しいことは何もない．すべてのオリジナリティは [1] にある．そのことをまずお断りしておく．

ただ，計算を詳しく書いてあるので，[1] の該当箇所を詳しく読まなかった方には役に立つかもしれない．このエッセイの内容については目次を参照されたい．

[*1] 元愛媛大学工学部
[*2] yanotad@earth.ocn.ne.jp

2　応力とひずみ

2.1　応力とひずみの関係

3 次元の Euclid 空間での応力の 2 階の対称テンソルを

$$\{T_{xx}, T_{yy}, T_{zz}, T_{yz}, T_{zx}, T_{xy}\}$$

と表し，3 次元の Euclid 空間でのひずみの 2 階の対称テンソルを

$$\{e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{zx}, e_{xy}\}$$

と表す*3.

ひずみと応力の間に存在する Hooke の法則は

$$T = Ce \tag{2.1}$$

と表される*4．ここで，

$$T = \begin{bmatrix} T_{xx} \\ T_{yy} \\ T_{zz} \\ T_{yz} \\ T_{zx} \\ T_{xy} \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix}, \qquad e = \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{yz} \\ e_{zx} \\ e_{xy} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

である．この 36 個の $\{c_{ij}\}$ のうちで空間的な対称性の有無にかかわらず

$$c_{ij} = c_{ji} \qquad (i, j = 1, 2, 3) \text{ および } (i, j = 4, 5, 6) \tag{2.3}$$

$$c_{ij} = 2c_{ji} \qquad (i = 1, 2, 3;\ \ j = 4, 5, 6) \tag{2.4}$$

この条件は 15 個あるので，独立な c_{ij} な数は 36 個から 21 個となる．

2.2　(2.3) と (2.4) の導出

(2.3),(2.4) の関係式が成立することを以下に示す．

点 $\mathrm{P}(e_{xx}, e_{yy}, \cdots, e_{xy})$ で表される状態から，点 $\mathrm{P}'(e_{xx} + de_{xx}, e_{yy} + de_{yy}, \cdots, e_{xy} + de_{xy})$ で表される状態に移るまでに外力が行う仕事 $w(\mathrm{P} \to \mathrm{P}')$ は直ちに計算できて

$$\begin{aligned} w(\mathrm{P} \to \mathrm{P}') &= T_{xx} dydzde_{xx}dx + T_{yy}dzdxde_{yy}dy + T_{zz}dxdyde_{zz}dz \\ &\quad + T_{yz}dxdy \cdot 2de_{yz}dz + T_{zx}dydz \cdot 2de_{zx}dx + +T_{xy}dzdx \cdot 2de_{xy}dy \\ &= (T_{xx}de_{xx} + T_{yy}de_{yy} + T_{zz}de_{zz} + 2T_{yz}de_{yz} + 2T_{zx}de_{zx} + 2T_{xy}de_{xy})dxdydz \end{aligned} \tag{2.5}$$

もし外力が行った仕事が熱などの形で失われることなく，物体の変形が可逆的な過程で起こるならば，変形前の状態 $\mathrm{O}(0, 0, 0, \cdots, 0)$ から点 $\mathrm{P}(e_{xx}, e_{yy}, \cdots, e_{xy})$ に至るまでになされる仕事はその経路にはよらないはずである．

*3 応力とひずみについては [3] または [4] を参照せよ．

*4 この形 (2.1) は中学校の数学で学ぶ正比例 $y = ax$ の多次元の一般化だと考えることもできる．これは，いわゆる森ダイアグラムの一部分となっている．森ダイアグラムについてはたとえば [5] を参照せよ．

そのためには仕事 $w(\mathrm{P} \to \mathrm{P}')$ は

$$\begin{aligned} w(\mathrm{P} \to \mathrm{P}') &= dW dx dy dz \\ &= \left(\frac{\partial W}{\partial e_{xx}} de_{xx} + \frac{\partial W}{\partial e_{yy}} de_{yy} + \frac{\partial W}{\partial e_{zz}} de_{zz} + \frac{\partial W}{\partial e_{yz}} de_{yz} + \frac{\partial W}{\partial e_{zx}} de_{zx} + \frac{\partial W}{\partial e_{xy}} de_{xy} \right) dx dy dz \end{aligned} \tag{2.6}$$

となる．(2.5) と (2.6) から

$$\begin{aligned} T_{xx} = \frac{\partial W}{\partial e_{xx}}, \quad T_{yy} = \frac{\partial W}{\partial e_{yy}}, \quad T_{zz} = \frac{\partial W}{\partial e_{zz}} \\ 2T_{yz} = \frac{\partial W}{\partial e_{yz}}, \quad 2T_{zx} = \frac{\partial W}{\partial e_{zx}}, \quad 2T_{xy} = \frac{\partial W}{\partial e_{xy}} \end{aligned} \tag{2.7}$$

となる等方性物質の弾性ポテンシャル $W(e_{xx}, e_{yy}, \cdots, e_{xy})$ が存在することが必要十分条件である．

したがって

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{xx}}{\partial e_{yy}} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{yy} \partial e_{xx}} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{xx} \partial e_{yy}} = \frac{\partial T_{yy}}{\partial e_{xx}} \to c_{12} = c_{21} \\ \frac{\partial T_{xx}}{\partial e_{zz}} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{zz} \partial e_{xx}} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{xx} \partial e_{zz}} = \frac{\partial T_{zz}}{\partial e_{xx}} \to c_{13} = c_{31} \\ \frac{\partial T_{yy}}{\partial e_{zz}} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{yy} \partial e_{xx}} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{yy} \partial e_{zz}} = \frac{\partial T_{zz}}{\partial e_{yy}} \to c_{23} = c_{32} \end{aligned} \tag{2.8}$$

これは W の 2 階の偏微分でのそれぞれ e_{xx} と e_{yy}, e_{xx} と e_{zz}, e_{yy} と e_{zz}, での偏微分の順序が入れ替られるということから得られた関係である．

さらに

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial T_{yz}}{\partial e_{zx}} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{zx} \partial e_{yz}} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{yz} \partial e_{zx}} = 2\frac{\partial T_{zx}}{\partial e_{yz}} \to c_{45} = c_{54} \\ 2\frac{\partial T_{yz}}{\partial e_{xy}} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{xy} \partial e_{yz}} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{yz} \partial e_{xy}} = 2\frac{\partial T_{xy}}{\partial e_{yz}} \to c_{46} = c_{64} \\ 2\frac{\partial T_{zx}}{\partial e_{xy}} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{zx} \partial e_{yz}} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{zx} \partial e_{xy}} = 2\frac{\partial T_{xy}}{\partial e_{zx}} \to c_{56} = c_{65} \end{aligned} \tag{2.9}$$

も得られる．

つづけて

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial T_{yz}}{\partial e_{xx}} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{xx} \partial e_{yz}} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{yz} \partial e_{xx}} = \frac{\partial T_{xx}}{\partial e_{yz}} \to 2c_{41} = c_{14} \\ 2\frac{\partial T_{yz}}{\partial e_{yy}} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{yy} \partial e_{yz}} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{yz} \partial e_{yy}} = \frac{\partial T_{yy}}{\partial e_{yz}} \to 2c_{42} = c_{24} \\ 2\frac{\partial T_{yz}}{\partial e_{zz}} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{zz} \partial e_{yz}} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{yz} \partial e_{zz}} = \frac{\partial T_{zz}}{\partial e_{yz}} \to 2c_{43} = c_{34} \end{aligned} \tag{2.10}$$

が得られる．(2.10) で T_{yz} を T_{zx} および T_{xy} に置き換えると同様な計算で

$$\begin{aligned} 2c_{51} = c_{15}, \quad 2c_{52} = c_{25}, \quad 2c_{53} = c_{35}, \\ 2c_{61} = c_{16}, \quad 2c_{62} = c_{26}, \quad 2c_{63} = c_{36} \end{aligned} \tag{2.11}$$

が得られる[*5]．

以上から (2.3),(2.4) が成り立つことが確かめられた．もともと 36 個の定数 c_{ij} があったが，15 個の条件があることがわかったから，独立な定数の個数は 36-15=21 と減った．

*5 付録 5 を参照せよ．

上に求めた条件をいれて (2.2) の定数係数の行列 C を書き直せば，C は

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ \frac{1}{2}c_{14} & \frac{1}{2}c_{24} & \frac{1}{2}c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ \frac{1}{2}c_{15} & \frac{1}{2}c_{25} & \frac{1}{2}c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ \frac{1}{2}c_{16} & \frac{1}{2}c_{26} & \frac{1}{2}c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

となる．

2.3 対称性の条件

等方的な物体では，行列 C は考えている物体の対称軸のまわりに座標系を対称性に応じた角度だけ回転しても変わらないはずである．

そのような座標系の変換は行列で

$$X' = RX \tag{2.13}$$

と表わされる．ここで

$$X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

である．

このとき 2 階の対称テンソルの変換は 6 行 1 列の行列 A', A と 6 行 6 列の行列 U で

$$A' = UA \tag{2.15}$$

と表すことができる[*6]．

いま，

$$A' = \begin{bmatrix} A'_{xx} \\ A'_{yy} \\ A'_{zz} \\ A'_{yz} \\ A'_{zx} \\ A'_{xy} \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_{15} & u_{16} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & u_{25} & u_{26} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & u_{35} & u_{36} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & u_{45} & u_{46} \\ u_{51} & u_{52} & u_{53} & u_{54} & u_{55} & u_{56} \\ u_{61} & u_{62} & u_{63} & u_{64} & u_{65} & u_{66} \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} A_{xx} \\ A_{yy} \\ A_{zz} \\ A_{yz} \\ A_{zx} \\ A_{xy} \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

である．

2 階の対称テンソル A として，応力のテンソル T をとれば，(2.1) から

$$T = Ce \tag{2.1}$$

が成り立つから，

$$\begin{aligned} T' &= UT \\ &= UCe \\ &= UCU^{-1} \cdot Ue \\ &= C'e' \end{aligned} \tag{2.17}$$

[*6] 付録 1 を参照せよ．

ここで，$C' = UCU^{-1}$, $e' = Ue$ である．

また，ここで 2 階の対称なひずみテンソル e は

$$e \equiv \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{yz} \\ e_{zx} \\ e_{xy} \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

である．

対称性の条件は

$$C' = C \tag{2.19}$$

であるから

$$UCU^{-1} = C \tag{2.20}$$

すなわち

$$UC = CU \tag{2.21}$$

が得られる．

2.4 z 軸のまわりの回転による対称性

z 軸のまわりの $\frac{\pi}{2}$ だけの回転に対したときに回転前と一致するという対称性を考えてみよう．このとき，z 軸のまわりの座標系の回転行列

$$R_z(\theta) \equiv \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

で $\theta = \frac{\pi}{2}$ とおけば，

$$R_z(\tfrac{\pi}{2}) \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

であるから

$$U_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

となる．この (2.24) の行列 U_z の導出は付録 1 に示す．

z 軸のまわりの $\frac{\pi}{2}$ の回転に対する不変性 (2.21) の条件 $CU = UC$ から，さらに c_{ij} の関係を求めてみよう．

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ \frac{1}{2}c_{14} & \frac{1}{2}c_{24} & \frac{1}{2}c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ \frac{1}{2}c_{15} & \frac{1}{2}c_{25} & \frac{1}{2}c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ \frac{1}{2}c_{16} & \frac{1}{2}c_{26} & \frac{1}{2}c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

(2.24) の U_z と (2.25) の C とを用いると，CU_z と U_zC はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
CU_z &= \begin{bmatrix}
c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\
c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\
c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\
\frac{1}{2}c_{14} & \frac{1}{2}c_{24} & \frac{1}{2}c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\
\frac{1}{2}c_{15} & \frac{1}{2}c_{25} & \frac{1}{2}c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\
\frac{1}{2}c_{16} & \frac{1}{2}c_{26} & \frac{1}{2}c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}
c_{12} & c_{11} & c_{13} & c_{15} & -c_{14} & -c_{16} \\
c_{22} & c_{12} & c_{23} & c_{25} & -c_{24} & -c_{26} \\
c_{23} & c_{13} & c_{33} & c_{35} & -c_{34} & -c_{36} \\
\frac{1}{2}c_{24} & \frac{1}{2}c_{14} & \frac{1}{2}c_{34} & c_{45} & -c_{44} & -c_{46} \\
\frac{1}{2}c_{25} & \frac{1}{2}c_{15} & \frac{1}{2}c_{35} & c_{55} & -c_{45} & -c_{56} \\
\frac{1}{2}c_{26} & \frac{1}{2}c_{16} & \frac{1}{2}c_{36} & c_{56} & -c_{46} & -c_{66}
\end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

また

$$
\begin{aligned}
U_zC &= \begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\
c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\
c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\
\frac{1}{2}c_{14} & \frac{1}{2}c_{24} & \frac{1}{2}c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\
\frac{1}{2}c_{15} & \frac{1}{2}c_{25} & \frac{1}{2}c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\
\frac{1}{2}c_{16} & \frac{1}{2}c_{26} & \frac{1}{2}c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66}
\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}
c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\
c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\
c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\
-\frac{1}{2}c_{15} & -\frac{1}{2}c_{25} & -\frac{1}{2}c_{35} & -c_{45} & -c_{55} & -c_{56} \\
\frac{1}{2}c_{14} & \frac{1}{2}c_{24} & \frac{1}{2}c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\
-\frac{1}{2}c_{16} & -\frac{1}{2}c_{26} & -\frac{1}{2}c_{36} & -c_{46} & -c_{56} & -c_{66}
\end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

となる．

(2.21) の条件 $CU = UC$ を用いれば，(2.26) と (2.27) から

$$
\begin{array}{lllll}
c_{11} = c_{22} & c_{13} = c_{23} & c_{15} = c_{24} = -c_{24} & c_{14} = -c_{25} = c_{25} & c_{16} = -c_{26} \\
c_{34} = c_{35} = -c_{35} & c_{36} = -c_{36} & c_{45} = -c_{45} & c_{44} = c_{55} & c_{46} = c_{56} = -c_{56}
\end{array}
$$

が得られる．

以上をまとめると，

$$
c_{22} = c_{11}, \qquad c_{23} = c_{13}, \qquad c_{26} = -c_{16}, \qquad c_{55} = c_{44} \tag{2.28}
$$

$$
c_{14} = c_{15} = c_{24} = c_{25} = c_{34} = c_{35} = c_{36} = c_{45} = c_{46} = c_{56} = 0 \tag{2.29}
$$

が得られる．この条件は 14 個あるので，独立な c_{ij} の個数は 21-14=7 個となる．

(2.28),(2.29) の条件を入れると (2.25) の行列 C は

$$
C = \begin{bmatrix}
c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\
c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & -c_{16} \\
c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\
\frac{1}{2}c_{16} & -\frac{1}{2}c_{16} & 0 & 0 & 0 & c_{66}
\end{bmatrix}
\tag{2.30}
$$

となる．

2.5 x 軸のまわりの回転による対称性

さらに x 軸のまわりに $\frac{\pi}{2}$ 回転しても弾性体が等方的であるときには，(2.21) が成り立つから (2.28) と (5.3) の条件をすべて合わせれば

$$c_{11} = c_{22} = c_{33}, \qquad c_{44} = c_{55} = c_{66}, \qquad c_{12} = c_{23} = c_{13}, \qquad c_{16} = c_{26} = 0 \tag{2.31}$$

が得られる．これから独立な c_{ij} の数は 3 個に減少する．この (2.21）の条件による (2.31) の導出の一部を (5.3) として付録 2 に示す．

したがって，(2.30) の行列 C は

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

となる．

2.6 z 軸のまわりの角 θ の回転

最後に z 軸のまわりの角 θ の回転

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

から得られる $U_z(\theta)$ は

$$U_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & \sin 2\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\frac{1}{2}\sin 2\theta & \frac{1}{2}\sin 2\theta & 0 & 0 & 0 & \cos 2\theta \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

と求まる．これは付録 3 で導出する．(2.32), (2.34) について (2.21) の条件が任意の角 θ に関して成り立つ条件を求めれば，

$$c_{44} = c_{11} - c_{12} \tag{2.35}$$

が得られる．これは付録 4 で導出する．

2.7 Lamé の定数

これで 3 つの定数から 2 つの Lamé の定数と呼ばれる定数

$$\lambda := c_{12}, \qquad \mu := \frac{1}{2}c_{44} \tag{2.36}$$

を用いると等方性の弾性体物質については，(2.32) の C は

$$C = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

以上述べてきたことから，もともと 36 個あった定数係数はいろいろな対称性によって，たった二つの独立な定数 λ, μ で表されることが分かった．

3　おわりに

このエッセイでは弾性体論で出てくる Lamé の定数の導出をした．面倒な計算は付録に譲ったので，詳細な計算を知りたい方は付録を参照してほしい．これは話の筋をあまり複雑にしたくなかったためである．

もっと簡潔な記述は [1] に豊田利幸先生が書いているのでそれを読んでほしい．だから，このエッセイではその中間の記述を目指したが，それがうまく行ったかどうかは読者の判断に任せたい．

付録 1　R からの U の導出

この付録では回転の行列 R から U をどのように導出について述べよう．

付録　1.1　z 軸のまわりの $\frac{\pi}{2}$ の回転に対する U の導出

まず z 軸のまわりの $\frac{\pi}{2}$ の回転に対する，R からの U の導出をしよう．

$$x'_\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu} x_\nu, \qquad \sum_\mu a_{\mu\nu} a_{\mu\sigma} = \delta_{\nu\sigma} \tag{3.1}$$

であるような $\|a_{\mu\nu}\|$ が一般の R である．行列記法で書くと

$$X' = RX \tag{3.2}$$

も表せる．ここで，

$$X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

である．また R は 3 行 3 列の回転行列である．

ところで 2 階のテンソルの変換を定義する式は

$$A'_{\mu\nu} = \sum_{\rho,\sigma} a_{\mu\rho} a_{\nu\sigma} A_{\rho\sigma} \tag{3.4}$$

である．これを行列記法で書くのに都合がよいように，つぎのように書き換えておく．

$$A'_{\mu\nu} = \sum_{\rho,\sigma} a_{\mu\rho} A_{\rho\sigma} a^T_{\nu\sigma} \tag{3.5}$$

これを行列記法で書くと

$$A' = RAR^T \tag{3.6}$$

となる．ここで A, A', R はいずれも 3 行 3 列の行列である．

z 軸のまわりの $\frac{\pi}{2}$ の回転に対する R は，z 軸のまわりの任意の角 θ の回転のときには

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

と表されるから，この式で $\theta = \frac{\pi}{2}$ とおけば,

$$R_z(\tfrac{\pi}{2}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

となる．

$A' = RAR^T$ を行列で表すと

$$\begin{bmatrix} A'_{xx} & A'_{xy} & A'_{zx} \\ A'_{xy} & A'_{yy} & A'_{yz} \\ A'_{zx} & A'_{yz} & A'_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{zx} \\ A_{xy} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{yz} & A_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{yy} & -A_{xy} & A_{yz} \\ -A_{xy} & A_{xx} & -A_{zx} \\ A_{yz} & -A_{zx} & A_{zz} \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

この結果からつぎの式が得られる．

$$\begin{bmatrix} A'_{xx} \\ A'_{yy} \\ A'_{zz} \\ A'_{yz} \\ A'_{zx} \\ A'_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{xx} \\ A_{yy} \\ A_{zz} \\ A_{yz} \\ A_{zx} \\ A_{xy} \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

いま行列 U_z をつぎの行列で定義する．

$$U_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

こうして (2.24) の U_z が得られた．

付録　1.2　x 軸のまわりの $\frac{\pi}{2}$ の回転に対する U の導出

つづいて z 軸のまわりの $\frac{\pi}{2}$ の回転に対する R からの U の導出を考えてみよう．

x 軸のまわりの $\frac{\pi}{2}$ の回転に対する R は一般の x 軸のまわりの任意の角 θ の回転のときには

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

であるから，この式で $\theta = \frac{\pi}{2}$ とおけば,

$$R_x(\tfrac{\pi}{2}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

となる．

z 軸のときと同様に $A' = RAR^T$ を行列で表せば，

$$\begin{bmatrix} A'_{xx} & A'_{xy} & A'_{zx} \\ A'_{xy} & A'_{yy} & A'_{yz} \\ A'_{zx} & A'_{yz} & A'_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{zx} \\ A_{xy} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{yz} & A_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{zx} & -A_{xy} \\ A_{zx} & A_{zz} & -A_{yz} \\ -A_{xy} & -A_{yz} & A_{yy} \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

この結果からつぎの式が得られる．

$$\begin{bmatrix} A'_{xx} \\ A'_{yy} \\ A'_{zz} \\ A'_{yz} \\ A'_{zx} \\ A'_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{xx} \\ A_{yy} \\ A_{zz} \\ A_{yz} \\ A_{zx} \\ A_{xy} \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

いま行列 U をつぎの行列で定義する．

$$U_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

こうして (4.13) の U_x が得られた．

付録 2　x 軸のまわりの $\frac{\pi}{2}$ だけの回転に対する対称性

x 軸のまわりの $\frac{\pi}{2}$ だけの回転に対する不変性からえられる行列 U は

$$U_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

であった．

(2.21) の条件から $UC = CU$ が成り立つから，(4.13) の U_x と (2.30) の C

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & -c_{16} \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ \frac{1}{2}c_{16} & -\frac{1}{2}c_{16} & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

との積をつくる．

$$
CU_x = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & -c_{16} \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ \frac{1}{2}c_{16} & -\frac{1}{2}c_{16} & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{13} & c_{12} & 0 & c_{16} & 0 \\ c_{12} & c_{13} & c_{11} & 0 & -c_{16} & 0 \\ c_{13} & c_{33} & c_{13} & 0 & 0 & -c_{16} \\ 0 & 0 & 0 & -c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{44} \\ \frac{1}{2}c_{16} & 0 & -\frac{1}{2}c_{16} & 0 & c_{66} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.14}
$$

また

$$
U_xC = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & -c_{16} \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ \frac{1}{2}c_{16} & -\frac{1}{2}c_{16} & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & -c_{16} \\ 0 & 0 & 0 & -c_{44} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}c_{16} & \frac{1}{2}c_{16} & 0 & 0 & 0 & -c_{66} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.15}
$$

であるから

$$
c_{13} = c_{12}, \quad c_{33} = c_{11}, \quad c_{66} = c_{55} = c_{44}, \quad c_{16} = 0 \tag{3.16}
$$

が求められる．

付録 3　z 軸のまわりの θ の回転に対する U の導出

$$
\begin{bmatrix} A'_{xx} & A'_{xy} & A'_{zx} \\ A'_{xy} & A'_{yy} & A'_{yz} \\ A'_{zx} & A'_{yz} & A'_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{zx} \\ A_{xy} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{yz} & A_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \tag{3.17}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
&B_{11} = A_{xx}\cos\theta + A_{xy}\sin\theta, && B_{12} = A_{xy}\cos\theta + A_{yy}\sin\theta, && B_{13} = A_{zx}\cos\theta + A_{yz}\sin\theta \\
&B_{21} = -A_{xx}\sin\theta + A_{xy}\cos\theta, && B_{22} = -A_{xy}\sin\theta + A_{yy}\cos\theta, && B_{23} = -A_{zx}\sin\theta + A_{yz}\cos\theta \\
&B_{31} = A_{zx}, && B_{32} = A_{yz}, && B_{33} = A_{zz}
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

であり，また

$$
\begin{aligned}
C_{11} &= B_{11}\cos\theta + B_{12}\sin\theta \\
&= A_{xx}\cos^2\theta + A_{yy}\sin^2\theta + A_{xy}\sin 2\theta, \\
C_{12} &= -B_{11}\sin\theta + B_{12}\cos\theta \\
&= -A_{xx}\frac{\sin 2\theta}{2} + A_{yy}\frac{\sin 2\theta}{2} + A_{xy}\cos 2\theta, \\
C_{13} &= B_{13} \\
&= A_{zx}\cos\theta + A_{yz}\sin\theta, \\
C_{21} &= B_{21}\cos\theta + B_{22}\sin\theta \\
&= -A_{xx}\frac{\sin 2\theta}{2} + A_{yy}\frac{\sin 2\theta}{2} + A_{xy}\cos 2\theta, \\
C_{22} &= -B_{21}\sin\theta + B_{22}\cos\theta \\
&= A_{xx}\sin^2\theta + A_{yy}\cos^2\theta - A_{xy}\sin 2\theta, \\
C_{23} &= B_{23} \\
&= -A_{zx}\sin\theta + A_{yz}\cos\theta, \\
C_{31} &= B_{31}\cos\theta + B_{32}\sin\theta \\
&= A_{zx}\cos\theta + A_{yz}\sin\theta, \\
C_{32} &= -B_{31}\sin\theta + B_{32}\cos\theta \\
&= -A_{zx}\sin\theta + A_{yz}\cos\theta, \\
C_{33} &= B_{33} \\
&= A_{zz}
\end{aligned}
$$

である．これから

$$
U_z(\theta) = \begin{bmatrix}
\cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & \sin 2\theta \\
\sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\theta \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\
0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\
-\frac{1}{2}\sin 2\theta & \frac{1}{2}\sin 2\theta & 0 & 0 & 0 & \cos 2\theta
\end{bmatrix} \tag{2.34}
$$

が得られる．

付録 4　z 軸のまわりの角 θ の回転に対する対称性

$U_z(\theta)C$ は (2.34) と (2.32) とから

$$
\begin{aligned}
U_z(\theta)C &= \begin{bmatrix}
\cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & \sin 2\theta \\
\sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\theta \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\
0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\
-\frac{1}{2}\sin 2\theta & \frac{1}{2}\sin 2\theta & 0 & 0 & 0 & \cos 2\theta
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\
c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\
c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}
\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}
c_{11}\cos^2\theta + c_{12}\sin^2\theta & c_{12}\cos^2\theta + c_{11}\sin^2\theta & c_{12} & 0 & 0 & c_{44}\sin 2\theta \\
c_{11}\sin^2\theta + c_{12}\cos^2\theta & c_{12} & 0 & 0 & -c_{44}\sin 2\theta & \\
c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & c_{44}\cos\theta & -c_{44}\cos\theta & 0 \\
0 & 0 & 0 & c_{44}\cos\theta & c_{44}\cos\theta & 0 \\
-(c_{11}-c_{12})\frac{\sin 2\theta}{2} & (c_{11}-c_{12})\frac{\sin 2\theta}{2} & 0 & 0 & 0 & c_{44}\cos 2\theta
\end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

となり，また $CU_z(\theta)$ は (2.32) と (2.34) とから

$$
\begin{aligned}
CU_z(\theta) &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & \sin 2\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\frac{1}{2}\sin 2\theta & \frac{1}{2}\sin 2\theta & 0 & 0 & 0 & \cos 2\theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_{11}\cos^2\theta + c_{12}\sin^2\theta & c_{12}\cos^2\theta + c_{11}\sin^2\theta & c_{12} & 0 & 0 & (c_{11}-c_{12})\sin 2\theta \\ c_{11}\sin^2\theta + c_{12}\cos^2\theta & c_{12} & 0 & 0 & -(c_{11}-c_{12})\sin 2\theta & \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}\cos\theta & -c_{44}\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}\sin\theta & c_{44}\cos\theta & 0 \\ -c_{44}\frac{\sin 2\theta}{2} & c_{44}\frac{\sin 2\theta}{2} & 0 & 0 & 0 & c_{44}\cos 2\theta \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

これから (2.21) によって

$$c_{44} = c_{11} - c_{12} \tag{2.35}$$

が得られる．

付録 5　(2.11) の導出

念ために (2.11) の導出を示す．

$$
\begin{aligned}
2\frac{\partial T_{zx}}{\partial e_{xx}} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{xx}\partial e_{zx}} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{zx}\partial e_{xx}} = \frac{\partial T_{xx}}{\partial e_{zx}} \to 2c_{51} = c_{15} \\
2\frac{\partial T_{zx}}{\partial e_{yy}} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{yy}\partial e_{zx}} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{zx}\partial e_{yy}} = \frac{\partial T_{yy}}{\partial e_{zx}} \to 2c_{52} = c_{25} \\
2\frac{\partial T_{zx}}{\partial e_{zz}} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{zz}\partial e_{zx}} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{zx}\partial e_{zz}} = \frac{\partial T_{zz}}{\partial e_{zxx}} \to 2c_{53} = c_{35} \\
2\frac{\partial T_{xy}}{\partial e_{xx}} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{xx}\partial e_{xy}} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{xy}\partial e_{xx}} = \frac{\partial T_{xx}}{\partial e_{xy}} \to 2c_{61} = c_{16} \\
2\frac{\partial T_{xy}}{\partial e_{yy}} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{yy}\partial e_{xy}} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{xy}\partial e_{yy}} = \frac{\partial T_{yy}}{\partial e_{xy}} \to 2c_{62} = c_{26} \\
2\frac{\partial T_{xy}}{\partial e_{zz}} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{zz}\partial e_{xy}} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{xy}\partial e_{zz}} = \frac{\partial T_{zz}}{\partial e_{xy}} \to 2c_{63} = c_{36}
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

が得られる．これで (2.11) が求められた．

（追補）

原稿が完成した後で，弾性的ポテンシャル W の存在の必要十分条件が気になった．この条件は (2.8), (2.9), (2.10), (2.11) であるが，このような一般的な場合についてきちんとした証明を私は学んだことがない．2 変数の場合には熱力学に関係して [6] に説明がある．この説明によれば，

1. 関数 U の系の状態関数である．
2. 微分 dU は完全微分である．
3. 閉じたサイクルについては dU の積分 $\int dU = 0$ である．

この 3 つは同等であると述べられている．

なお，2 変数の場合については完全微分の条件についての説明が [7] にある．

(2019.1.5)

参考文献

[1] 豊田利幸，岩波講座『現代物理学の基礎』 第 2 版「古典物理学　I」，（岩波書店，1978）111-120
この書の初版にももちろん同じことが書かれているが，式の符号等にミスプリントがかなりあるので，この第 2 版を参照した方がよい．

[2] 矢野　忠，応力とひずみの関係，メモ（未発表） (1975.6.24), 1-16

[3] 宮本博，菊池正紀，『材料力学』，（裳華房，1987）146-156

[4] 豊田利幸，岩波講座『現代物理学の基礎』 第 2 版「古典物理学　I」，（岩波書店，1978）100-111

[5] 倉田令二朗，『数学と物理学との交流』，（森北出版，1972）16

[6] W. J. Moore（藤代亮一訳），『物理化学』上，（東京化学同人，1974）45-46

[7] 矢野健太郎，『微分方程式』（裳華房，1959）25-27

編集後記

新年おめでとうございます．年が明けて，2019 年 1 月となりました．皆様にはご健勝のことと存じます．

「数学・物理通信」はこの 8 巻 10 号をもって通巻 75 号に達しました．

8 巻 10 号は年内の発行を目指しましたが，年内発行は無理だったので，新年の発行にしました．しかし，これはあくまで 2018 年 12 月に発行予定のものがずれ込んだということです．

編集者（矢野）が 12 月はじめから 10 日ほど上京して，編集作業が 10 日ほどできなかったことに原因があります．なお，新しい 9 巻は 2019 年 3 月以降に発行の予定です．

投稿者が偏ってきているかもしれませんが，それでも続けて発行できるのは投稿者の存在あってのことです．特に中西襄先生と世戸憲治さんの存在は貴重です．編集者としてあらためて御礼申し上げます．

編集者も数学エッセイとして「分岐点の定義」（新版）を用意しましたが，これは今号には掲載できませんでした．これはページ数のオーバーのためです．3 月発行のいずれかの号には掲載をしたいと思っています．

読者の皆様には今後ともに，ご愛読をお願いします．

（矢野　忠）