数学・物理通信

8巻2号　　2018年3月

編集　新関章三・矢野　忠

2018 年 3 月 15 日

目次(Contents)

ある初等関数積分の極限

A Limit of an Integral over an Elementary Function

中 西　襄 *1

Noboru NAKANISHI *2

1　はじめに

先日，矢野忠氏のブログ（2018 年 2 月 1 日）を見ていたら，スティーヴン・ストロガッツ著「ふたりの微積分」という本の紹介があった．その本に，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \tag{1.1}$$

の和を求める問題が議論されている．この級数がちょっと奇異な感じがするのは，三角関数の中が定数なのに因子 π なしにじかに整数が出てくることで，分子は区間 $(-1, 1)$ で稠密に異なる値をとり続けることになるだろう．もちろんこの級数は絶対収束はしないが，条件収束はして，極限値は $(\pi - 1)/2$ である．極限値の求め方は，その本にも書いてある通り，サイン・フーリエ級数を使うか，$\sin n = \Im[(e^i)^n]$ を用いてべき級数（複素フーリエ級数）に転換するかであろう．

さて，

$$\frac{\sin n}{n} = \int_0^1 dx \, \cos(nx) \tag{1.2}$$

であるが，$\sum_{n=1}^{N} \cos(nx)$ は前論文（「数学・物理通信」7-8）で考察したもの（その一番簡単な場合）である．これの和公式を用いて (1.1) を変形すると，ちょっと面白い結果が得られたので報告する．

2　準備

三角関数の積和公式はよく使うので，念のためここに書いておく:

$$\cos\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]. \tag{2.1}$$

以下で使用する公式は周知のものであるが，一応その導出もやっておく．$f(x)$ は周期 2π の奇関数で，1 周期内の不連続点は高々有限個とすると，それはサイン・フーリエ級数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \tag{2.2}$$

*1 京都大学名誉教授

*2 nbr-nak@trio.plala.or.jp

に展開される．$f(x)$ は $0<x<\pi$ で与えれば決まる．展開係数は

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi dx f(x)\sin(nx) \tag{2.3}$$

で与えられる．とくに $f(x)=1\ \ (0<x<\pi)$ のとき，

$$b_n=\frac{2[1+(-1)^{n+1}]}{n\pi} \tag{2.4}$$

で，また $f(x)=x\ \ (0<x<\pi)$ のとき，

$$b_n=\frac{2(-1)^{n+1}}{n} \tag{2.5}$$

である．したがって，両者の一次結合 $f(x)=(\pi-x)/2\ \ (0<x<\pi)$ を考えれば，

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{\sin(nx)}{n}=\frac{\pi-x}{2}\qquad(0<x<\pi) \tag{2.6}$$

を得る．$x=1$ とおけば (1.1) の答えが得られる．

他方，使用する級数和の公式は，

$$\sum_{n=1}^N\cos(nx)=\frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{1}{2}x)}-\frac{1}{2} \tag{2.7}$$

である．念のため証明を書いておくと，積和公式 (2.1) を用いて，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^N\sin(\tfrac{1}{2}x)\cos(nx)&=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^N\big[\sin\big((n-\tfrac{1}{2})x\big)-\sin\big((n+\tfrac{1}{2})x\big)\big]\\&=-\frac{1}{2}\big[\sin(\tfrac{1}{2}x)-\sin\big((N+\tfrac{1}{2})x\big)\big]\end{aligned} \tag{2.8}$$

となるから，両辺を $\sin(\frac{1}{2}x)$ で割ればよい．

3　積分の極限

(2.7) から

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^N\frac{\sin(n\alpha)}{n}&=\sum_{n=1}^N\int_0^\alpha dx\cos(nx)\\&=\frac{1}{2}\int_0^\alpha dx\frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{1}{2}x)}-\frac{\alpha}{2}\end{aligned} \tag{3.1}$$

を得る．α は 1 に固定しないでおく．ここで $N\to\infty$ とすれば，(2.6) により，

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^\alpha dx\frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{1}{2}x)}=\pi\qquad(0<\alpha<\pi) \tag{3.2}$$

という式が得られる．この式の驚くべきところは，右辺が α に無関係に一定であることである．もちろん $\alpha\to 0$ の極限をとることや，α について微分することは，$N\to\infty$ とは非可換である．

右辺の被積分関数の分母分子に $2\cos(\frac{1}{2}x)$ を乗じて，三角関数の積和公式 (2.1) を使うと，

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^{\alpha}dx\frac{\sin((N+1)x)-\sin(Nx)}{\sin x}=\pi \qquad (0<\alpha<\pi) \tag{3.3}$$

を得る．もし極限が項別に確定すれば両者は等しいから，差の極限値は 0 のはずである．したがって

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^{\alpha}dx\frac{\sin(Nx)}{\sin x}=\text{不確定} \tag{3.4}$$

でなければならない．つまり整数値で無限大に行くと極限値は存在しない．

(3.3) は，恒等式 $f(N+k)-f(N)=\sum_{j=1}^{k}[f(N+j)-f(N+j-1)]$ により，任意の整数 k につき

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^{\alpha}dx\frac{\sin((N+k)x)-\sin(Nx)}{\sin x}=k\pi \qquad (0<\alpha<\pi) \tag{3.5}$$

という式に拡張できる．

(3.2) で変数変換 $x=2y$ をすれば，

$$\lim_{N\to\infty}2\int_0^{\alpha/2}dy\frac{\sin((2N+1)y)}{\sin y}=\pi \qquad (0<\alpha<\pi) \tag{3.6}$$

となる．$\alpha/2$ を改めて α と書き直し，y を x にすれば，

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^{\alpha}dx\frac{\sin((2N+1)x)}{\sin x}=\frac{\pi}{2} \qquad \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right) \tag{3.7}$$

となる．すなわち，(3.4) とは対照的に，奇数のみで極限をとれば有限確定である．つまり無限個の偶数値を経るような極限の取り方が不確定性の原因であることになる．

4 おわりに

積分

$$F(\nu)\equiv\int_0^{\alpha}dx\frac{\sin(\nu x)}{\sin x} \tag{4.1}$$

は，特に技巧的なところのない解析的な式である．それにも拘わらず，それの $\nu\to\infty$ の極限は，ν が整数値で無限大に行ったときは存在せず，奇数値に限定すると存在するという奇妙な振る舞いを示す．しかも後者の場合の極限値は，積分の上限 α に，一定の範囲内においてではあるが，無関係である．

(4.1) の極限値が α に依存しないことは，極限では積分の値は $x=0$ の近傍からの寄与で決まるということを意味する．そこで分母の $\sin x$ を x で近似してもあまり悪いことしたことにはならないだろう．さらに α に対する上からの制限は，分母の $\sin x$ が $x=\pi$ などで 0 になることを避けるという意味があると考えられるので，$\sin x$ を x に置き換えてしまったら，$\alpha\to\infty$ にすることが許されるだろう．そして ν が十分大きければ，x が大きいところからの寄与によって生ずる誤差は，被積分関数の分子の速い振動のため速やかにゼロに近づくので，無視できるだろう．そこでそうした置き換えをすると，有名な異常積分

$$\int_0^{\infty}dx\frac{\sin(\nu x)}{x}=\frac{\pi}{2} \qquad (\nu>0) \tag{4.2}$$

に帰着する．(3.7) に見られるように，ν を奇数値に限定したときの (4.1) の $\nu \to \infty$ の極限は，

$$\lim_{\nu \to \infty, \mathrm{odd\ integer}} F(\nu) = \frac{\pi}{2} \tag{4.3}$$

であるから，確かに (4.2) と値が一致している．したがって，万一ほかの極限の取り方で確定値が得られるようなことがあったとしたら，その値も $\pi/2$ になるであろう．

円環状弦の振動問題

世戸 憲治 *

An Oscillation Problem of Circular String

Kenji SETO*

1　はじめに

タイヤの空気圧が少ない状態で車を高速走行させると，スタンディング・ウェーブ (定在波) 現象が起こることが知られている．その結果，ひどい場合は，タイヤが破裂してしまうことがあるという．この現象を，現実のタイヤに即して，物理的に解析することは，タイヤの構造そのものに依拠した複雑なものになるであろう．ここでは，この現象を原理的に理解するため，できるかぎり単純化したモデルを考えることにする．すなわち，タイヤを円環状の 1 次元的な弦と考え，これを中心周りに回転させたとき，この弦に発生する波動を数学的に解析してみる．ここで取りあげるモデルが，このスタンディング・ウェーブ現象に即したものであるかどうかは疑問が残ることではあるが，この現象を理解するための一助になることを期待する．

2　方程式の導入

タイヤを単純化したモデルとして，ここでは，弦を半径 r の円環状に繋いだものを考える．この弦を円の中心 O を中心として角速度 ω で，円の面内で回転させる．このときの弦の半径方向の微小振動を考える．ただし，タイヤの空気圧に相当するものとして，この弦には単位長さあたり P の圧力が円の外向きに作用しているものとする．この現象を弦と一緒に回転する系で考えると，この弦には遠心力とコリオリ力が作用することになる．このうち，コリオリ力の方は，弦の線密度を ρ とし，振動しているときの円の外向き方向の速度を v とすると，単位長さあたり $-2\rho\omega v$ の力が円周方向に作用する．ただし，ここでは，この弦は伸び縮みしないものとしてこのコリオリ力は無視できるものとする．外向きに作用する遠心力と圧力はこの弦に張力を与え，これらの力と張力の半径方向成分は，この弦の振動に関与してくることになる．

次ページ図 1 に示すように，この回転する系の上に固定された基準線をとり，この線から角度 θ, 時刻 t における弦の半径方向変位を $U(\theta,t)$ と書くことにする．さらに，$\Delta\theta$ を微小角として，この角度 θ から $\Delta\theta$ 増加，あるいは減少した角度 $\theta+\Delta\theta$, $\theta-\Delta\theta$ の弦の区間を AB とする．この部分の質量は $2\Delta\theta\, r\rho$ となり，また，この部分の回転半径は $r+U$ なので，この部分に作用する遠心力は $2\Delta\theta\, r\rho(r+U)\omega^2$ となる．また，この区間 AB に作用する圧力は $2\Delta\theta\, rP$ となる．弦にこれら遠心力と圧力が作用することによって，弦には張力 T が発生する．図に示すように，点 A, および，点 B で作用する張力 T はそれらの点での弦の接線方向に作用するの

* 北海学園大学名誉教授　　　　　E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

で，その張力の動径方向成分が弦の波動方程式に関与してくることになる．

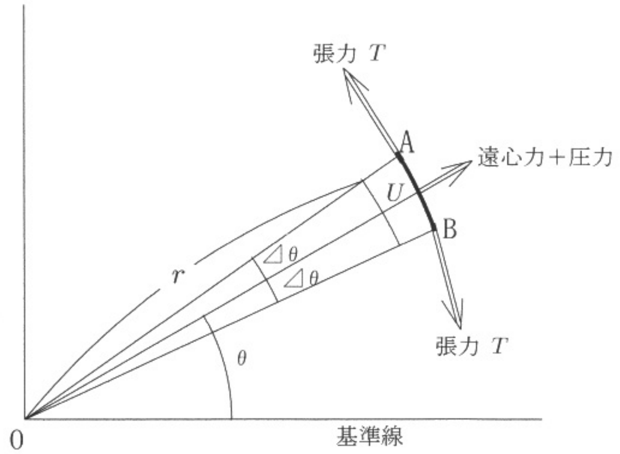

図 1　円環状弦の模式図

これを見積もるために，変位 U の変化による偏角は，点 A で $\frac{1}{r+U}\frac{\partial U}{\partial \theta}\Big|_{\theta+\Delta\theta}$ となるが，ここでは，変位 U は r に比べ小さいものとし，線形近似をとることにして，これを $\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\Big|_{\theta+\Delta\theta}$ とする．さらに，この点 A での偏角には， AB の中心から角度 $\Delta\theta$ だけ回転しているので，その減少分も考慮して，全体の偏角は $-\Delta\theta+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\Big|_{\theta+\Delta\theta}$ となる．同様に点 B での偏角は $-\Delta\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\Big|_{\theta-\Delta\theta}$ となる．これらのことを考慮して弦 AB の部分の動径方向振動の運動方程式を作ると，

$$2\Delta\theta\, r\rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=2\Delta\theta\, r\rho(r+U)\omega^2+2\Delta\theta\, rP+\Big(-\Delta\theta+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\Big|_{\theta+\Delta\theta}\Big)T+\Big(-\Delta\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\Big|_{\theta-\Delta\theta}\Big)T \tag{2.1}$$

となる．ここで，仮に，変位 U を恒等的にゼロ $\big(U\equiv 0\big)$ とおくと，張力が

$$T=r(r\rho\omega^2+P) \tag{2.2}$$

と決まる．変位 U がゼロでないときもこの張力がそのまま使えるものとすると，この (2.1) 式は，$\Delta\theta\to 0$ の極限で，

$$\rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=\frac{T}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}+\rho\,\omega^2 U \tag{2.3}$$

となる．ここで数式簡略化のため新しい角速度 ω_p を

$$\omega_p=\sqrt{\frac{T}{\rho\, r^2}}=\omega\sqrt{1+\frac{P}{\rho\, r\omega^2}} \tag{2.4}$$

と定義すると，この式は

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}={\omega_p}^2\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}+\omega^2 U \tag{2.5}$$

となる．これがここで解くべき方程式である．この方程式は虚数質量を持つ Klein-Gordon 方程式と本質的に同じものであり，この式右辺第 2 項は，変位 U が正のときはさらに正方向に，負のときはさらに負方向に加速する働きを持つので，場合によっては U が発散するようなことが起こり得る．

ここでもし，(2.4) 式の圧力 P をゼロとしたときは，$\omega_p=\omega$ となる．これは，もし，(2.5) 式右辺 2 項目が存在しない方程式で考えると，波動が伝播する角速度と弦そのものの角速度が同じになることを意味する．した

がって，これを静止系で見たときは，弦そのものが回転する方向と同じ方向に伝播する波の速度は 2 倍となり，逆方向に伝播する波の速度は静止系ではゼロとなる．このことが，スタンディング・ウェーブ現象と関係しているものと考えられる．

3 波動方程式の解

ここで，方程式 (2.5) において，初期変位をゼロ，弦の一部分に初速度を与えたときの具体的解を求めてみよう．ここでは，θ の取り得る範囲を $-\pi \le \theta \le \pi$ とする．$0 < \theta_0 < \pi$ なる θ_0 を用いて，変位 $U(\theta,t)$ の初期条件を，

$$U(\theta,0)=0, \qquad \left.\frac{\partial U(\theta,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \begin{cases} 0, & |\theta| > \theta_0 \\ v_0, & |\theta| \le \theta_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

と，$-\theta_0 \le \theta \le \theta_0$ の範囲のみに初速度 v_0 を与えた場合の解を求めてみる．この条件で方程式 (2.5) を解くために，変位 $U(\theta,t)$ を変数分離形の

$$U(\theta,t) = G(\theta)K(t) \tag{3.2}$$

と仮定する．このとき，θ 依存部分 $G(\theta)$ は明らかに，偶関数でなければならず，周期 2π の周期関数となるはずなので，その候補となり得るのは，k を自然数として，$\cos(k\theta)$ である [*1]．これを方程式 (2.5) に代入すると，時間依存部分 $K(t)$ は方程式

$$\frac{d^2\,K(t)}{dt^2} = -\left(k^2{\omega_p}^2-\omega^2\right)K(t) \tag{3.3}$$

を満たすことになる．圧力 P が正であれば，(2.4) 式から $\omega_p > \omega$ であり，k が自然数であれば，一般に，$k^2{\omega_p}^2-\omega^2$ は正である．したがって，この方程式の解は，

$$K(t) = \sin\left(\sqrt{k^2{\omega_p}^2-\omega^2}\;t\right) \tag{3.4}$$

で与えられる．このとき cosine の方は，初期値がゼロでなけらばならないので排除される．実際の変位 $U(\theta,t)$ はこれら関数の積の重ね合わせで表され，C_k を k に依存する定数として，

$$U(\theta,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\theta)\sin\left(\sqrt{k^2{\omega_p}^2-\omega^2}\;t\right) \tag{3.5}$$

となる．この式で，初期条件 (3.1) の第 1 式はすでに満たされている．第 2 式を満たすには，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{k^2{\omega_p}^2-\omega^2}\,C_k\cos(k\theta) = \begin{cases} 0, & |\theta| > \theta_0 \\ v_0, & |\theta| \le \theta_0 \end{cases} \tag{3.6}$$

であればよい．この両辺に $\cos(k'\theta)$ を掛けてから θ で積分し，cosine の直交式

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k\theta)\cos(k'\theta)d\theta = \pi\delta_{kk'} \tag{3.7}$$

[*1] $k=0$ の場合，変位は θ に依存しないことになるが，これは円の半径が変わることを意味する．しかしここでは，弦は伸び縮みしないものとしているので，$k=0$ は排除される．

を利用すると，

$$C_k = \frac{v_0}{\pi\sqrt{k^2{\omega_p}^2-\omega^2}}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\cos(k\theta)d\theta = \frac{2v_0}{\pi}\frac{\sin(k\theta_0)}{k\sqrt{k^2{\omega_p}^2-\omega^2}} \tag{3.8}$$

と求まる．これを (3.5) 式に戻すと，変位 $U(\theta,t)$ は

$$U(\theta,t) = \frac{2v_0}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(k\theta_0)}{k\sqrt{k^2{\omega_p}^2-\omega^2}}\cos(k\theta)\sin\left(\sqrt{k^2{\omega_p}^2-\omega^2}\ t\right) \tag{3.9}$$

と求められたことになる．ここまで，(2.4) 式に表れる圧力 P が正であれば何の問題も生じない．P がゼロとなるときは，$\omega_p = \omega$ となるので，$k=1$ のとき，この式は $0/0$ となる．したがって，$\omega_p \to \omega$ の極限をとると，

$$U(\theta,t) = \frac{2v_0\sin(\theta_0)}{\pi}\cos(\theta)\ t + \frac{2v_0}{\pi}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\sin(k\theta_0)}{k\omega\sqrt{k^2-1}}\cos(k\theta)\sin\left(\omega\sqrt{k^2-1}\ t\right) \tag{3.10}$$

となって，これは時間に比例して振幅が発散してしまうことになり，タイヤがバーストしてしまう．

さらに，圧力が負圧 $P<0$ になるようなときは，$\omega_p < \omega$ となり，$\sqrt{k^2{\omega_p}^2-\omega^2}$ は，少なくも $k=1$ のとき虚数となるので，この式は，

$$U(\theta,t) = \frac{2v_0}{\pi}\frac{\sin(\theta_0)}{\sqrt{\omega^2-{\omega_p}^2}}\cos(\theta)\sinh\left(\sqrt{\omega^2-{\omega_p}^2}\ t\right) + \frac{2v_0}{\pi}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\sin(k\theta_0)}{k\sqrt{k^2{\omega_p}^2-\omega^2}}\cos(k\theta)\sin\left(\sqrt{k^2{\omega_p}^2-\omega^2}\ t\right) \tag{3.11}$$

となる．三角関数 sine が双曲線関数 sinh に変わるので，さらに時間的発散が激しくなることになる．

4 剛性を考慮した場合

弦に剛性を考慮したときは，当然のことながら，振動は抑えられることになり，バーストし難くなるはずである．このときは，(2.1) 式右辺に

$$-\frac{2\Delta\theta EI}{r^3}\frac{\partial^4 U}{\partial\theta^4} \tag{4.1}$$

が加わる．ここに，E, I は，それぞれ，弦の Young 率，断面 2 次モーメントである．このとき，張力 T を表す (2.2) 式はそのままであるが，方程式の (2.3) 式は

$$\rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{T}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} - \frac{EI}{r^4}\frac{\partial^4 U}{\partial\theta^4} + \rho\,\omega^2 U \tag{4.2}$$

に変わる．ここで，ω_p の定義 (2.4) 式，および，新たな時間の逆数の次元を持つパラメータ ω_e を

$$\omega_e = \sqrt{\frac{EI}{\rho\,r^4}} \tag{4.3}$$

と定義すると，

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = {\omega_p}^2\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} - {\omega_e}^2\frac{\partial^4 U}{\partial\theta^4} + \omega^2 U \tag{4.4}$$

と書き直される．ここで，(3.2) 式のように変位 $U(\theta,t)$ を θ 依存部分 $G(\theta)$ と時間 t 依存部分 $K(t)$ に分ける．$G(\theta)$ を前と同じく $\cos(k\theta)$，$(k=1,2,\cdots)$ とすると，t 依存部分 $K(t)$ が満たす方程式は，

$$\frac{d^2 K}{dt^2} = -\left(k^2{\omega_p}^2 + k^4{\omega_e}^2 - \omega^2\right)K(t) \tag{4.5}$$

となる．これから $K(t)$ は (3.4) 式に変わって，

$$K(t) = \sin\left(\sqrt{k^2{\omega_p}^2 + k^4{\omega_e}^2 - \omega^2}\ t\right) \tag{4.6}$$

となって，これは $k=1$，$\omega_p = \omega$ の場合でも平方根の中はゼロにはならず，${\omega_e}^2$ の項が残る．その分だけ弦の振動が発散するのが塞がれることになる．

5　おわりに

今回は，車が高速走行するときに起こるスタンディング・ウェーブ現象を解析することを目標としてきたが，もちろんこれで完全な説明ができたとは思われない．ここで扱ったモデルと実際の車で起こるスタンディング・ウェーブ現象とでは大きな差があるように思える．「はじめに」のところでも述べたように，ここで扱ったものは，あくまでも単純化したモデルであって，《当たらずとも遠からず》のつもりで解析したものである．

このモデルでは内部圧力がゼロになったときにこのスタンディング・ウェーブ現象が起こることになるが，実際の車ではそうはなっていない．参考までに，車のタイヤの空気圧は，大気圧と車の重量を支えなくてはならないので，普通乗用車で，およそ 100 kPa の大気圧の 2 倍強の 220〜250 kPa 程度は入っている．それでも高速走行したときは，スタンディング・ウェーブ現象が起こることはあり得る．このへんのことをどのように考慮すればよいのか，まだ難しい問題が残っている．ネットでも調べてみたが，現象そのものの解説はたくさん見つかるが，その理論的根拠を解明しようとするものは皆無であった．

[謝辞]

今回も，京都大学名誉教授の中西襄先生にこの原稿を見ていただき，いくつかのコメントをいただきました．先生に心から感謝いたします．

自然対数の底

矢野　忠 [1]

The Base of Natural Logarithm

Tadashi YANO[2]

1　はじめに

このエッセイはすでに愛数協 [3] の機関誌「研究と実践」に掲載されたものである [1].「研究と実践」の読者は主として小学校の先生方であるから，この「数学・物理通信」に掲載すれば，より広い読者が期待できる．なお,「数学・物理通信」に投稿するにあたり，細かな修正を加えた．

微分積分学で出てくる自然対数の底 e は円周率 π とちがって普通の人にとってなじみのない数である．それも微分積分学という科学や技術に携わらない人にとって一生勉強しないですむような分野において現れる．それで難しいものという印象をもつかもしれない．しかし, どうもそうではなさそうである．

銀行からたとえば自宅の購入のために住宅ローンの金を借りるというときにどれだけ元金と利息をあわせて払わなくてはならないのか．そういうことに関心のない人はいないだろう．しかし，自然対数の底 e がそういう金銭の貸借に密接に関係している数としても導入されることを知っている人は少ないかもしれない．それで一見微分積分学とは関係なさそうな金銭の貸借に関係した複利法からその極限的な場合として自然対数の底 e の導入をしてみたい [4].

また, これと対比して微積分学での自然対数の底 e の定義との同等性も見てみよう [3].

2　複利法

銀行だけではないが, 金をどこかで借りると元金にプラスして利息を払わなくてはならない．そのときの元金と利息の合計の計算の仕方に単利法と複利法がある．実際に単利法で金を借りることはないと思うが, もともと借りた金に対してだけ利息がつくのが単利法である．

それとは違って, ついた利息も一定期間後にはそれを新たに元金に組み入れた形で利息を計算するのが複利法である．そして消費者金融等でお金を借りると高率の利息をとられて, 利息が利息を生んで借りた人は高額の借金に, またその強制的な取立てに悩むということになる．

元金を a_0 , 年利率を r とすれば，1 年後にはその元利合計は

$$a_1 = a_0(1+r) = a_0(1+r)^1 \tag{2.1}$$

となる [5]．2 年後には

$$a_2 = a_1(1+r) = a_0(1+r)^2 \tag{2.2}$$

3 年後には

$$a_3 = a_2(1+r) = a_0(1+r)^3 \tag{2.3}$$

---

[1] 元愛媛大学工学部

[2] yanotad@earth.ocn.ne.jp

[3] 愛数協とは愛媛県数学教育協議会の略称で，民間教育団体の数学教育協議会の下部団体である．

[4] 連続複利法により自然対数の底 e を導入することは [2] を読んで知った．

[5] $(1+r)^1$ とは表さないで $(1+r)$ とするのが普通であろう．ここではわざと指数 1 をつけてある．

となり, したがって n 年後には

$$a_n = a_{n-1}(1+r) = a_0(1+r)^n \tag{2.4}$$

となる．このような元利合計の数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ は等比数列となっている．

以上の話からわかるように借りた元金だけではなく 1 年目以降には利息にも利息がつくということで, もともと借りた元金からだんだんに払わなくてはならない金は増えていく．このことについては住宅ローン等で私たちは日常的に知っている．

ところで, 強欲な金貸しがいて, 彼は期間を短くして利息を早く元金に繰り込みたいと考えたとしよう．年利率を変えないが期間を 1 年から半年に短縮すれば, 半年後には

$$a_{1/2} = a_0(1+r/2) = a_0(1+r/2)^1$$

となり, 1 年後には

$$a_1 = a_{1/2}(1+r/2) = a_0(1+r/2)^2$$

となるだろう．ここで, 年利率は変えないとしたのであるから, 半年での利率は年利率 r の半分の $r/2$ となる．半年毎の利息の元金への繰り込みでは支払わなくてはならない金額は期間が 1 年の場合よりも 1 年後には $a_0 r^2/4$ だけ増加する．

いや, 期間は半年でも長すぎる．1/3 年にしたらどうなるだろうか．そうすると 1/3 年後には

$$a_{1/3} = a_0(1+r/3) = a_0(1+r/3)^1$$

となり, 2/3 年後には

$$a_{2/3} = a_{1/3}(1+r/3) = a_0(1+r/3)^2$$

となる． 1 年後には

$$a_1 = a_{2/3}(1+r/3) = a_0(1+r/3)^3$$

となるだろう．

このように順々に期間を短縮していって, 期間を 1/n 年とすれば 1/n 年後には

$$a_{1/n} = a_0(1+r/n) = a_0(1+r/n)^1 \tag{2.5}$$

となり, 2/n 年後には

$$a_{2/n} = a_{1/n}(1+r/n) = a_0(1+r/n)^2 \tag{2.6}$$

となる．また 3/n 年後には

$$a_{3/n} = a_{2/n}(1+r/n) = a_0(1+r/n)^3 \tag{2.7}$$

となる．そして 1 年後には

$$a_1 = a_{(n-1)/n}(1+r/n) = a_0(1+r/n)^n \tag{2.8}$$

となる．

3 連続複利法

いま, 年利率 100 % とすれば, $r = 1$ であり, $n = 10$ ととって, 期間を 1/10 年とすれば, そのときの 1 年後の元利合計は

$$a_1 = a_0(1+1/10)^{10} \tag{3.1}$$

となるであろう．ここで, $(1+1/10)^{10}$ がどれくらいの大きさになるかといえば,

$$(1+1/10)^{10} = 2.5937\cdots$$

となる．では $n=50$ にしたらどうなるか．このときは

$$(1+1/50)^{50} = 2.6916\cdots$$

となる．では $n=100$ とすれば, このときは

$$(1+1/100)^{100} = 2.7048\cdots$$

と徐々に増えていく．では一挙に $n=1,000$ ととれば, このときは

$$(1+1/1,000)^{1,000} = 2.7169\cdots$$

となる．

ではこうして n を大きくすれば, $(1+1/n)^n$ はいくらでも大きくなるだろうか．そうはならない．もっと大きく n の値をとってみよう．$n=5,000$ のとき

$$(1+1/5,000)^{5,000} = 2.7180\cdots$$

$n=10,000$ のときには

$$(1+1/10,000)^{10,000} = 2.7181\cdots$$

$n=50,000$ のときには

$$(1+1/50,000)^{50,000} = 2.71825\cdots \tag{3.2}$$

$n=100,000$ のときには

$$(1+1/100,000)^{100,000} = 2.71827\cdots \tag{3.3}$$

と増えていくが, その増え方はだんだん減少していく．$n=50,000$ のときと $n=100,000$ のときは増え方がよくわかるように小数点第 5 位までとった．

4 自然対数の底の導入と定義

上で見たように $n\to\infty$ にしても $(1+1/n)^n$ は無限に大きくはなっていかない．それは極限値をもっている．その極限値を数学では文字 e で表している．これは微分積分学では自然対数の底として現れる数, Napir 数である．

数学的には

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{4.1}$$

で定義される [6]．これは無理数であることが証明されている [4].

e の近似値はこの定義を用いるとその収束が遅いので実際に e の値を求める方法としては e^x の Maclaurin 展開

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \tag{4.2}$$

で $x=1$ とおいて求めるのが普通である．この級数の和を求めることによって e の近似値を評価する．これだと収束が早くて効率よく近似値が求められる [5].

一方, 微積分学においてはつぎのようにして自然対数の底 e が導入される [3]．まず指数関数 $y=a^x$ を考え, この導関数を求めることを考えよう．一般に関数 $y=f(x)$ に対する導関数は

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-h} \tag{4.3}$$

[6] $e=2.718281828459045\ldots$ を,「ふな一杯二杯一杯二杯しごくおいしい」と覚えたらいいという．

で定義される．この定義にしたがえば指数関数の導関数は

$$\frac{da^x}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\Big(\frac{a^h-1}{h}\Big)a^x = K(a)a^x \tag{4.4}$$

となる．ここで,

$$K(a) = \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} \tag{4.5}$$

である．いつでも a^x を x で微分すれば $K(a)$ という因子 (factor) が出てきて面倒である．それで, $K(a)=1$ となるような底 a の値を e と表すことにする．これは前に連続複利法で定義した e と同じであることがわかるが, そのことを示すのは後にして話を先へ進めよう．

$K(a)=1$ の性質をもつ底 $a=e$ を求めよう．その手がかりとなる式は

$$K(a) = \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = 1 \tag{4.6}$$

である．いま,

$$K(a,h) = \frac{a^h-1}{h} \tag{4.7}$$

とおいてみよう．これを a について解けば,

$$a = [1+hK(a,h)]^{\frac{1}{h}} \tag{4.8}$$

と表される．$K(a)=\lim_{h\to 0}K(a,h)=1$ と要請したから

$$\begin{aligned} e &= \lim_{h\to 0}[1+hK(a,h)]^{\frac{1}{h}} \\ &= \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} \end{aligned} \tag{4.9}$$

で $K(a)=1$ となる a, すなわち, e の定義式が得られる．

これで Napir 数 e を定義する 2 つの式が得られたが, これらは同等のはずである．その同等性を見てみよう．いま (4.1) で $\frac{1}{n}=h$ とおいてみよう．そうすれば,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e \tag{4.10}$$

となって, 両者の定義が一致していることがわかる．

5　おわりに

微分積分学ではどうしても欠かすことのできない, 自然対数の底 e を連続複利法の考えから導入した．またそれが微積分学で定義された自然対数の底 e の定義と一致していることも見た．

一見したところ微分積分学とは関係のなさそうな連続複利法から自然対数の底 e の定義が導かれることは自然の相互関係を示唆しているのかもしれない．

(2007. 9. 29)(2018.2.27 改訂)

補遺

2007 年 10 月 21 日の学習会でこの報告をしたときに, 新川雄也（愛数協前委員長）さんから

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{5.1}$$

の単位はどうなっているかと質問された．一瞬考えて単位はつかない無名数だと答えようとして, その直後に勘違いをして単位が残りそうな気がしたのと $(1+1/n)^n$ の指数 n にも単位がつきそうな気がしたので, その場では「考えておきます」と答えた．

学習会からの帰途の車の中で指数のところを除いて単位がつかないことはわかったが, 指数のところはどうなのだろうと気になった．帰宅して考えたらその点も解決したのでここで述べておく．

もともと括弧 $(1+1/n)$ の中の n は $1/n$ 年から来ているが, n の上の 1 は年利率 r から来ている．すなわち, $r=1$ とったことから来ている．したがって, r を生かして考えれば r/n は

$$\frac{1}{n}\mathrm{y}\cdot r\frac{1}{\mathrm{y}}=\frac{r}{n} \tag{5.2}$$

となって, 時間の単位の年 y は分子, 分母で約分されてなくなる．率にはもともと単位がついていないから, したがって r/n には単位がつかない．

振り返って考えてみれば, $1+r/n$ の第 1 項の 1 には元金を 1 と考えるということで, 単位はついていない数だから, それに加えることのできる r/n も単位がついていない数でなければならなかったので, そのこととちゃんと符合していることがわかる．

問題は $(1+1/n)^n$ の指数 n であるが, これは同じ文字 n を用いているために単位がついているように思えるが, 実はこれは単に $(1+1/n)$ を n 乗するということであったから, この指数 n はもともと単位をもっていなかった．

別の角度からもう一度考えてみよう．2 項定理を用いて

$$\left(1+\frac{r}{n}\right)^n=\sum_{r=0}^{n}\ {}_nC_p(1)^{n-p}\left(\frac{r}{n}\right)^p \tag{5.3}$$

としたときに,

$${}_nC_p=\frac{n!}{r!(n-p)!} \tag{5.4}$$

に現れる n と p とは単位のつかない数であるから, ${}_nC_p$ は単位がつかない．

他方 1 と r/n も前に見たように単位のつかない無名数であるから, $(1)^{n-p}\left(\frac{r}{n}\right)^p$ の因子は単位がつかない．したがって, (5.3) の右辺の 2 項展開の各項はいずれも単位をもっていない．

普通に関数 $y=a^x, y=\log x$ とか $y=\sin x$ を考えるとき, これらの変数は単位をもたない量と考えているということも付言しておく．

(2007. 10. 22)(2018.2.27 改訂)

参考文献

[1] 矢野　忠，自然対数の底 e の導入，研究と実践（愛数協），97 号（2008.4）12-16

[2] 遠山　啓,『数学入門』下（岩波新書, 1960）104-107

[3] 矢野　忠，指数・対数関数の微積分ミニマム, 数学・物理通信，1 巻 8 号 (2011.6) 22-26

[4] 吉田　武,『オイラーの贈り物』(海鳴社, 1993）300

[5] 矢野　忠,『物理数学散歩』(国土社, 2011）13-15

超弦理論と Dirac のハサミへの補足
Supplement to ‘Superstring Theory and Dirac’s Scissors’

伊藤仁之 *
Hitoshi ITO †

2017 年 3 月

概 要

この小文は「数学・物理通信」 7 巻 3 号，20 ページに掲載されたエッセイへの補足です.

1. このエッセイの冒頭部分 (第 2 パラグラフ) で，弦を素子とした場という表現をしたが，この超弦場理論について畑浩之氏の解説がある (日本物理学会誌 Vol.60, No.5, p.344)．この解説はボゾン弦場に限られており，フェルミ弦場の理論は確立していないとなっている．フェルミ弦場は ‘弦がスピノールとしても振る舞う ’ ものなら，ごく自然に理論化できるであろうが，弦 (ひも) はスピノールとして振る舞うことはない．したがって，超弦理論が超弦場理論に昇華されることはないであろう．弦にはスピノール性があるという誤解が Dirac に由来することは本文で引用した Penrose-Rindler のテキストに記されている (参考文献 [3])． 畑浩之氏の解説を示唆してくださった中西先生に感謝します.
2. 参考文献 [1] で “訂正記事投稿中 ” としたが，この訂正は「物理教育」65 巻 (4)236 に掲載されている.
3. 「Dirac の紐・二重拘束モデル・超弦理論」を「物理教育」に投稿中.

* 近畿大学名誉教授
† htito@kcn.ne.jp

読者の声

Mails from Readers

1　大槻俊明さんから

date: 2018.1.4
矢野忠様
いつもありがとうございます．中学入試問題について添付のように考えてみました．それにしてもこれが中学入試問題とは驚きますね．どれだけの受験者が解けるのでしょうか．ではお元気で．
大槻俊明（元 CNC 技術者，東京農工大大学院・博士課程在学）

2　青山　泰雄さんから

date: 2018.1.5
矢野様
青山です.
明けましておめでとうございます.
数学・物理通信送付ありがとうございます．中学入試の問題がありましたが，中学受験の算数ではよく線分図や面積図が用いられます．というより線分図や面積図を使いこなせないと，開成や麻布といった一流中学はおぼつかないと言われています．で，面白いので私も今回の中学入試の問題を線分図を使ってやってみました．◯ や □ などを使った式がでてきて，x, y 等の文字を使った式と実際には同じように思われるかも知れませんが，中学受験ではこの程度は認められているようです.
青山　泰雄 (弁理士)

3　続木章三さんから

date: 2018.1.9
矢野　忠　先生
新年あけましておめでとうございます.
数学・物理通信 7 巻 10 号を拝読しました．紙面「中学入試を解く」の先生の奮闘ぶりに感服しました．小生，過去に学習塾や家庭教師で小学生に算数を教えていた経験があります．代数方程式では解法が複雑な（小学校では教えない？）問題でも，算数の解法を使えば簡単に解くことができることに興味をおぼえました．今回の入試問題ですが,「割合の問題」だと思います.

1. （比べる量）＝（もとの量）×（割合）
2. （もとの量）＝（比べる量）÷（割合）

を使った問題だと思います.
添付の PDF ファイルのように数直線を描けば（算数の常套手段）四則演算の筆算だけで解くことができます．ご一考ください．ご意見などありましたら，お知らせいただければと思います．以上ご挨拶まで.
続木章三（元徳島大学）

4　編集者から

date: 2018.3.15

7 巻 10 号に私が埋め草的に書いた私立中学校の数学の入試問題を算数で解かれた答案を 3 人の方がメールの添付書類で送ってくださった．この号ではそのメールだけを読者の声として掲載する．3 人とも線分図を使って解いておられた．

解答をこの「数学・物理通信」に掲載することは遠慮させて頂くが，メールをくださった方々はいずれも私立中学校に文句なく入れるくらいな，優秀な方だということがわかって興味深かった．もし個人的に関心のある方は編集者の矢野までご連絡ください．メールで解答をお送りすることができます.

いままでこの「数学・物理通信」をどのくらい数の方々読んで下さっているのか心もとなかったが，やはり読んでいただいているのだと変に安心をした.

（編集人　矢野　忠）

編集後記

もう3月となった.「数学・物理通信」8巻1号に続いて2号を発行する．3号も3月中に発行するつもりである.

2号を編集するにあたって，考えていることはフォントの大きさの問題である．8ポイントのフォントを用いてきたが，10ポイントにするべきかと迷っている.

いままで原稿のフォントをすべて8ポイントとしてきたが，どうも8ポイントはフォントが小さすぎる感じする．もともと8ポイントにしたのは一人当たりの原稿の頁数がどうも多くなるような気がしたので，ちょっと読み難いとしても一人でも多くの投稿者の原稿が1号に収まるようにとの配慮からである.

1号の頁数は30頁までと決めている．もちろん，これはおよその頁数なので34頁くらいまでになったことも何回かある．しかし，今後もできるだけ1号を30頁前後で収めたい.

メール配布のサーキュラーであり，印刷をするわけではないので頁数にこだわるのは不思議だと思われるかもしれないが，やはり編集段階で何回かはプリントをして見なくては編集がうまくできない．それと編集者のところに「数学・物理通信」を1部はプリントして残しておきたい.

こういう事情からフォントの大きさを8ポイントにしてきたが，どうしたらいいか，皆さんのご意見を伺いたい.

（矢野　忠）