# 数学・物理通信

**8巻3号　　2018年3月**

編集　新関章三・矢野　忠

2018 年 3 月 26 日

# 目次(Contents)

# 伸びるゴム棒に沿って虫が這う問題

世戸 憲治 *

**Problems of Worm Creeping on Stretching Rubber Rod**

Kenji Seto*

## 1　はじめに

古い力学の教科書を書棚から引っ張り出してみたら，その中に，かなり昔に自分で書いた「伸びるゴム棒に沿って虫が這う問題」という紙切れがはさまっていた．おそらく学生のときに書いたものと思われるが，その出典が書かれていなかったのでどこから仕入れたものかもわからない．しかし，簡単な微分方程式の問題でありながら面白いものなので，ここで紹介することにする．その問題というのは，「初めの長さ 1m のゴム棒の一端から虫が棒に沿って 1m/h の速さで這っていくが，このゴム棒は虫が這い始めたときから，1km/h の速さで伸びていくものとする．はたしてこの虫は棒の他端までたどり着くことができるか」というものである．ちょっと考えるとこれは不可能のように思えるが，実際は，時間さえかければ可能であることが計算してみてわかる．以下，この問題とこれを少し変形した問題をいくつか取り扱うことにする．

## 2　問題：その 1

問題は「はじめに」のところで書いたとおりであるが，ここでは，棒の初めの長さを $\ell_0$ とし，棒の固定された一端を A, 伸びていく他端を B としておく．虫が棒の上を這う速度を小文字の $v_0$，棒の他端 B が伸びていく速度を大文字の $V_0$ とする．虫が A 点を出発してから時間 $t$ 後の棒の長さを $\ell(t)$ とすると，

$$\ell(t) = \ell_0 + V_0 t \tag{2.1}$$

となり，また，この時点での虫の位置を点 A から測って $x(t)$ とする．この $x(t)$ 点での棒の速度は，棒の線形性を仮定して，$\dfrac{x}{\ell(t)}V_0$ と考えられる．したがって，静止系から見た虫の速度 $dx/dt$ は虫本来の速度 $v_0$ とこの棒の速度の和となるので，

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{x}{\ell(t)}V_0 \tag{2.2}$$

という式を得る．ここでは，この　微分方程式を定数変化法を用いて解いてみよう．初めに，この式の斉次部分をとって，

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{\ell_0 + V_0 t}V_0 \tag{2.3}$$

* 北海学園大学名誉教授　　　E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

を解いてみる．これは簡単に解けて，定数 $C$ を用いて，

$$x = C(\ell_0 + V_0 t) \tag{2.4}$$

となる．ここで，$C$ を時間 $t$ の関数と考え直して，元の式 (2.2) に代入すると，

$$\frac{dC}{dt} = \frac{v_0}{\ell_0 + V_0 t} \tag{2.5}$$

となり，これを積分して，

$$C = \frac{v_0}{V_0} \log\Big(\frac{\ell_0 + V_0 t}{\ell_0}\Big) \tag{2.6}$$

となる．ただし，このときの積分定数は $t = 0$ のとき，$C = 0$ となるように決めた．これを (2.4) 式に代入し，最終的な解は，

$$x = \frac{v_0}{V_0}(\ell_0 + V_0 t) \log\Big(\frac{\ell_0 + V_0 t}{\ell_0}\Big) \tag{2.7}$$

と求められたことになる．これから，虫が棒の他端である B 点に着くまでの時間を求めるには，$x = \ell_0 + V_0 t$ とおいて，

$$\frac{v_0}{V_0} \log\Big(\frac{\ell_0 + V_0 t}{\ell_0}\Big) = 1 \tag{2.8}$$

となり，これから，到達時間 $t$ は

$$t = \frac{\ell_0}{V_0}\big(e^{V_0/v_0} - 1\big) \tag{2.9}$$

と求められる．この解が尤もらしいことは，$V_0 = 0$ としたとき，この式は $0/0$ となり，$V_0 \to 0$ の極限をとると，$t \to \ell_0/v_0$ となって，これは棒がまったく伸びなかったときの解になることである．

ここで，(2.9) 式を数値的に当たってみよう．$\ell_0 = 1\,\mathrm{m}$，$v_0 = 1\,\mathrm{m/h}$，$V_0 = 1000\,\mathrm{m/h}$ として，

$$t = \frac{1}{1000}\big(e^{1000} - 1\big)\,\text{時間} \fallingdotseq 10^{431.29448}\text{時間} \fallingdotseq 1.97006 \times 10^{431}\text{時間} \fallingdotseq 2.2489 \times 10^{427}\text{年} \tag{2.10}$$

となって，確かに数学的には到達可能ではあるが，宇宙の年齢 138 億年 ($= 1.38 \times 10^{10}$年) をはるかに超えるとんでもない年数がかかることになる．

## 3　問題：その 2

前の問題で，虫が這う速度 $v_0$ はそのまま据え置くが，棒の方は加速度的に伸びるものとして，その加速度を $A_0$ とする．ただし，その初速度はゼロとする．このとき，棒の他端 B の時刻 $t$ における速度は $A_0 t$ となり，伸びた長さは $\frac{1}{2}A_0 t^2$ となるので，このときの棒の長さ $\ell(t)$ は

$$\ell(t) = \ell_0 + \frac{1}{2}A_0 t^2 \tag{3.1}$$

となる．前と同じく，時刻 $t$ における虫の位置を $x(t)$ とすると，その点における棒の速度は，$\dfrac{x}{\ell(t)}A_0 t$ となるので，静止系で見た虫の速度 $dx/dt$ は

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{x}{\ell_0 + \frac{1}{2}A_0 t^2} A_0 t \tag{3.2}$$

となる．前節では方程式を定数変化法で解いた．しかし，ここでは，そんな面倒なことをしなくても，この式を $(\ell_0 + \frac{1}{2}A_0t^2)$ で割り，微分を整理すると，

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{x}{\ell_0 + \frac{1}{2}A_0t^2}\Big) = \frac{v_0}{\ell_0 + \frac{1}{2}A_0t^2} \tag{3.3}$$

となる．これを積分して，

$$\frac{x}{\ell_0 + \frac{1}{2}A_0t^2} = v_0\sqrt{\frac{2}{A_0\ell_0}}\mathrm{Tan}^{-1}\Big(\sqrt{\frac{A_0}{2\ell_0}}\ t\Big) \tag{3.4}$$

となる．ここで，$t = 0$ のとき $x = 0$ となるように，逆 tangent 関数の値域が主値をとる $\mathrm{Tan}^{-1}$ を採用するものとした．この式から，虫が B 点にたどり着くには，$x = \ell_0 + \frac{1}{2}A_0t^2$ として，

$$\mathrm{Tan}^{-1}\Big(\sqrt{\frac{A_0}{2\ell_0}}\ t\Big) = \frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{A_0\ell_0}{2}} \tag{3.5}$$

であればよい．これから，到達時間は，

$$t = \sqrt{\frac{2\ell_0}{A_0}}\tan\Big(\frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{A_0\ell_0}{2}}\Big) \tag{3.6}$$

と求められる．ただし，ここで注意が必要である．(3.5) 式左辺の $\mathrm{Tan}^{-1}$ は $\pi/2$ より大きな値をとれないので，

$$\frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{A_0\ell_0}{2}} < \frac{\pi}{2} \tag{3.7}$$

が到達するための条件となる．例えば，$\ell_0 = 1\,\mathrm{m}$, $v_0 = 1\,\mathrm{m/h}$ の場合は，

$$A_0 < \frac{\pi^2{v_0}^2}{2\ell_0} = 4.9348\ \mathrm{m/h^2} \tag{3.8}$$

でなければならない．

## 4　問題：その 3

前節とは逆に，棒が伸びる速度は一定の $V_0$ とし，虫が這うのは加速度的に速くなるものとして，その加速度を $a_0$ としよう．ただし，その初速度はゼロとする．このとき，時刻 $t$ における棒の長さ $\ell(t)$ を表す (2.1) 式はそのまま，(2.2) 式は

$$\frac{dx}{dt} = a_0t + \frac{x}{\ell_0 + V_0t}V_0 \tag{4.1}$$

となる．この式を $\ell_0 + V_0t$ で割ってから，微分を整理すると，

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{x}{\ell_0 + V_0t}\Big) = \frac{a_0t}{\ell_0 + V_0t} \tag{4.2}$$

となる．これを積分し，

$$\frac{x}{\ell_0 + V_0t} = \frac{a_0}{V_0}t - \frac{a_0\ell_0}{{V_0}^2}\log\Big(1 + \frac{V_0}{\ell_0}t\Big) \tag{4.3}$$

となる．ここで，積分定数は $t = 0$ で $x = 0$ となるように選んだ．これから，虫が B 点にたどり着くには，$x = \ell_0 + V_0t$ とおいて，

$$\frac{a_0}{V_0}t - \frac{a_0\ell_0}{{V_0}^2}\log\Big(1 + \frac{V_0}{\ell_0}t\Big) = 1 \tag{4.4}$$

となる．これは $t$ について超越方程式なので，コンパクトな形で解を求めることは不可能であるが，必ず 1 個の正なる実数解が存在する．

## 5　問題：その 4

ここでは，棒と虫の両方が加速度的に動いた場合を考える．虫の加速度を $a_0$, 棒の加速度を $A_0$ とし，どちらも初速度はゼロとする．この場合，時刻 $t$ における棒の長さ $\ell(t)$ を表す式は (3.1) と同じであり，(3.2) 式が

$$\frac{dx}{dt} = a_0 t + \frac{x}{\ell_0 + \frac{1}{2}A_0 t^2} A_0 t \tag{5.1}$$

に変わる．両辺を $\ell_0 + \frac{1}{2}A_0 t^2$ で割って，整理すると，

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{x}{\ell_0 + \frac{1}{2}A_0 t^2}\Big) = \frac{a_0 t}{\ell_0 + \frac{1}{2}A_0 t^2} \tag{5.2}$$

となるので，これを積分し，

$$\frac{x}{\ell_0 + \frac{1}{2}A_0 t^2} = \frac{a_0}{A_0} \log\Big(1 + \frac{A_0}{2\ell_0} t^2\Big) \tag{5.3}$$

となる．ここで，$t = 0$ で $x = 0$ となるように積分定数を決めた．これから，虫が B 点に到達するには，$x = \ell_0 + \frac{1}{2}A_0 t^2$ とおいて，

$$\frac{a_0}{A_0} \log\Big(1 + \frac{A_0}{2\ell_0} t^2\Big) = 1 \tag{5.4}$$

となって，到達時間 $t$ は，

$$t = \sqrt{\frac{2\ell_0}{A_0}\big(e^{A_0/a_0} - 1\big)} \tag{5.5}$$

と求められる．ここで，$\ell_0 = 1\,\mathrm{m}$，$a_0 = 1\,\mathrm{m/h^2}$，$A_0 = 1000\,\mathrm{m/h^2}$ として，この数値を当たってみると，

$$t = \sqrt{\frac{2}{1000}\big(e^{1000} - 1\big)}\text{時間} \doteqdot \sqrt{2 \times 10^{431.29448}}\text{時間} \doteqdot 6.27704 \times 10^{215}\text{時間} \doteqdot 7.16557 \times 10^{211}\text{年} \tag{5.6}$$

とこれまた，数学的には到達可能ではあるが，とんでもない時間がかかることになる．

## 6　問題：その 5

もうお分かりのように，この問題を一般化して考えると，虫が這う速度，棒が伸びる速度を，時間 $t$ の任意関数として，それぞれ，$v(t)$, $V(t)$ とした場合が考えられる．このときは，時間 $t$ における棒の長さ $\ell(t)$ は

$$\ell(t) = \ell_0 + \int_0^t V(t')dt' \tag{6.1}$$

であり，このときの虫の位置を $x(t)$ とすると，その速度は

$$\frac{dx}{dt} = v(t) + \frac{x}{\ell(t)} V(t) \tag{6.2}$$

となる．両辺を $\ell(t)$ で割って，整理すると

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{x}{\ell(t)}\Big) = \frac{v(t)}{\ell(t)} \tag{6.3}$$

となり，これを積分して

$$\frac{x}{\ell(t)} = \int_0^t \frac{v(t')}{\ell(t')} dt' \tag{6.4}$$

となる．虫が他端に到着するには，$x = \ell(t)$ とおいて，

$$\int_0^t \frac{v(t')}{\ell(t')} dt' = 1 \tag{6.5}$$

から $t$ を求めるとよい．

この積分が最も簡単に実行されるには，これまでのように，被積分関数の分母を微分したものが分子の形になっているとよい．これは，$v(t)$，$V(t)$ が共通の関数 $f(t)$ を用いて，

$$v(t) = v_0 f(t), \qquad V(t) = V_0 f(t) \tag{6.6}$$

と書ける場合で，(6.5) 式は簡単に積分が実行され，

$$\log\left[1 + \frac{V_0}{\ell_0}\int_0^t f(t')dt'\right] = \frac{V_0}{v_0} \tag{6.7}$$

となる．ここで，例えば，$f(t)$ が指数関数で，

$$f(t) = e^{\omega t} \tag{6.8}$$

という場合，この式は

$$\log\left[1 + \frac{V_0}{\omega\ell_0}\left(e^{\omega t} - 1\right)\right] = \frac{V_0}{v_0} \tag{6.9}$$

となって，これから到達時間は

$$t = \frac{1}{\omega}\log\left[1 + \frac{\omega\ell_0}{V_0}\left(e^{V_0/v_0} - 1\right)\right] \tag{6.10}$$

と求められる．この式で $\omega \to 0$ としたときの極限は，(2.9) 式と一致する．

また，

$$f(t) = \cos(\omega t) \tag{6.11}$$

とした場合はどうであろうか．このとき (6.7) 式は

$$\log\left[1 + \frac{V_0}{\omega\ell_0}\sin(\omega t)\right] = \frac{V_0}{v_0} \tag{6.12}$$

となって，これから，

$$\sin(\omega t) = \frac{\omega\ell_0}{V_0}\left(e^{V_0/v_0} - 1\right) \tag{6.13}$$

となる．ここでもし，右辺が 1 より小さいときは，解が存在して，到達時間 $t$ は

$$t = \frac{1}{\omega}\mathrm{Sin}^{-1}\left[\frac{\omega\ell_0}{V_0}\left(e^{V_0/v_0} - 1\right)\right] \tag{6.14}$$

と求められる．ここで，$\mathrm{Sin}^{-1}$ は逆 sine 関数の主値をとったものである．この式においても $\omega \to 0$ の極限は (2.9) 式に一致する．

## 7　おわりに

今回扱った問題は，ちょっと現実離れしたものであり，最後の方は計算のための計算になってしまった．しかし，簡単な 1 階線形微分方程式を解く問題なので，微分方程式を習い始めた学生には興味を持っていただけるものと思う．それにつけても，指数関数がこれほど急激に増加する関数であることを改めて認識する結果となった．今後もこの種の面白い問題が見つかりしだい「数学・物理通信」で発表していきたいと考えている．

[ 謝辞 ]
今回も，京都大学名誉教授の中西襄先生にこの原稿を見ていただき，貴重なコメントをいただきました．先生に感謝いたします．これを読まれた先生の感想をここにそのままの形で掲載いたします．『これを読んで，2.7K 宇宙背景放射を思いだしました．ビッグ・バンのあと 40 万年経ったころ，原子ができて宇宙が晴れ上がったときに放射された光子が，超光速の宇宙膨張に逆らって走り，138 億年かかって地球に到達したのですから，そっくりの感じがします．』というご意見をいただきました．

# 伸びるゴム棒に沿って虫が這う問題：補遺

世戸 憲治 *

**Supplement to "Problems of Worm Creeping on Stretching Rubber Rod"**

Kenji Seto*

## 1 はじめに

前回の「伸びるゴム棒に沿って虫が這う問題」を書いたときに，中西襄先生から，『これを読んで，2.7K 宇宙背景放射を思いだしました．ビッグ・バンのあと 40 万年経ったころ，原子ができて宇宙が晴れ上がったときに放射された光子が，超光速の宇宙膨張に逆らって走り，138 億年かかって地球に到達したのですから，そっくりの感じがします.』というご感想をいただきました．しかし，先生からいただいたこのメールを，初めに読んだときは，何故，このようなコメントをいただいたのか，すぐには理解できませんでした．その理由は，この虫が這う問題では伸びる棒に逆らって這っているわけではなく，同じ方向に進む問題だったからです．そこで，前回の問題設定を変えて，「虫が這う方向と棒が伸びる方向とが反対向きのときはどうなるかという問題」に変えてみました．

## 2 問題の設定とその解答

図 1 の上段に示すように，長さ $\ell$ のゴム棒の両端を，それぞれ，A 端，B 端とする．この A 端を原点として，B 端に向かって $x$ 軸をとる．初め，虫は A 端にいて，時刻 $t=0$ のときに B 端に向かって，棒の上を速さ $v$ で這いだす．ただし，この棒の B 端は固定されているが，A 端は，虫が這いだした瞬間から，速さ $V$ で $x$ 軸の負方向に延びていくものとする．この棒が反対方向に伸びていく速さ $V$ が，虫の速さ $v$ より大きいときでも，この虫は棒の他端である $B$ 端に到達できるかという問題を考える．

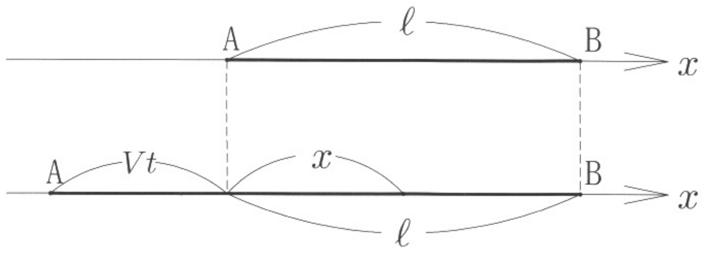


**図 1** 上段は $t=0$ のとき，下段は任意の $t$ のとき

* 北海学園大学名誉教授 E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

図 1 の下段に示すように，時刻 $t$ のときに虫が原点から $x$ 軸方向に進んだ距離を $x(t)$ とする．このとき，棒の A 端は，負方向の距離 $Vt$ のところにある．この棒は一様に伸びていくものとすると，この時点における虫の位置 $x(t)$ での棒の速度は，符号も含めて，

$$-\frac{\ell - x}{\ell + Vt}V \tag{2.1}$$

と考えられる．したがって，静止系から見た虫の速度は，

$$\frac{dx}{dt} = v - \frac{\ell - x}{\ell + Vt}V \tag{2.2}$$

となる．この方程式を定数変化法で解いてみる．この式の斉次部分をとって，

$$\frac{dx}{dt} = \frac{V}{\ell + Vt}x \tag{2.3}$$

とし，これを解くと，$C$ を積分定数として，

$$x = C(\ell + Vt) \tag{2.4}$$

を得る．つぎに $C$ を時間 $t$ の関数として，これを (2.2) 式に入れ直して $C$ を求めると，

$$C = \frac{v}{V}\log\left(\frac{\ell + Vt}{\ell}\right) + \frac{\ell}{\ell + Vt} - 1 \tag{2.5}$$

となる．ただし，ここでは，$t = 0$ のとき，$C = 0$ となるように積分定数を選んだ．この $C$ を (2.4) 式に戻して，

$$x = \frac{v}{V}(\ell + Vt)\log\left(\frac{\ell + Vt}{\ell}\right) - Vt \tag{2.6}$$

という解を得る．この解を (2.2) 式の右辺に代入して速度を求めると，

$$\frac{dx}{dt} = v - V + v\log\left(\frac{\ell + Vt}{\ell}\right) \tag{2.7}$$

となって，$t = 0$ のときの速度は $v - V$ となる．これでは，$V > v$ のとき，前進どころか，後退させられることになる．しかし，

$$t_0 = \frac{\ell}{V}\big(e^{(V-v)/v} - 1\big), \qquad \text{のとき} \qquad \frac{dx}{dt} = 0 \tag{2.8}$$

となり，その後，速度はプラスに転じるので，時間さえかければ，虫は他端の B 端に到達できることになる．そのときの $x$ 座標は $x = \ell$ となるので，(2.6) 式から，その時間を $t_1$ とすると，

$$t_1 = \frac{\ell}{V}(e^{V/v} - 1) \tag{2.9}$$

と求められる．驚くべきことに，この解は，解くべき方程式は異なるにもかかわらず，虫が B 端に達するための前回求めた時間 $t$ の解と一致している．これは何かの理由があるのであろうか．

前回は，$\ell = 1\,\mathrm{m}$,　$v = 1\,\mathrm{m/h}$,　$V = 1\,\mathrm{km/h}$ という極端な値にして，虫が B 端まで到達するまでに $t_1 = 2.2489 \times 10^{427}$ 年というとんでもない時間がかかることを求めた．今回は，$\ell = 1\,\mathrm{m}$,　$v = 1\,\mathrm{m/h}$, $V = 2\,\mathrm{m/h}$ という値にした場合を計算してみると，速度がゼロになる時間 $t_0$, および，虫が B 端に到達する時間 $t_1$ は，

$$t_0 = 0.8591\,\text{時間}, \qquad\qquad t_1 = 3.1945\,\text{時間} \tag{2.10}$$

となる．次ページの図 2 に，この設定値で，(2.6), (2.7) 式に基づいた $x$, および，$dx/dt$ を，時間 $t$ の関数として図示する．

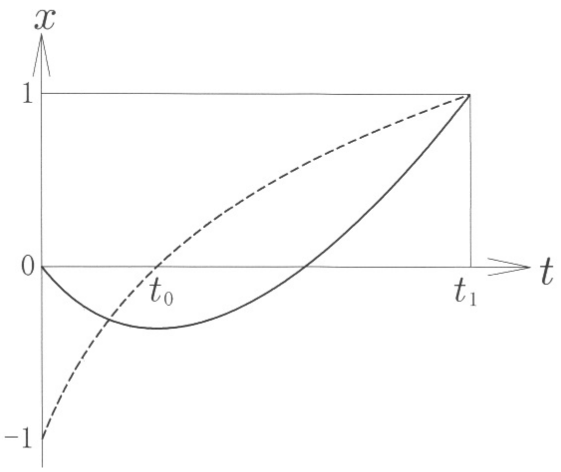


**図 2**　座標 $x(t)$ : 実線,　　速度 $dx/dt$ : 点線

この図は，座標 $x(t)$ を実線で，また，速度 $dx/dt$ を点線で示した．また，縦軸の目盛り 1, 0, -1 は，座標のときは m 単位，速度のときは，m/h を単位とする．

ここまで書いた段階で，中西先生に見ていただいたところ，これは座標変換の問題で，今回の $x+Vt$ を改めて $x$ とおき直すと前回のものと一致するということを教えていただいた．これは慣性系内の変換であり，単に観測者の見る立場の違いでしかない．ということで，先生は，前回のときから，今回書いたものを見通していたのかもしれません．

**[ 謝辞 ]**

今回も，京都大学名誉教授の中西襄先生にこの原稿を見ていただき，先に述べたように貴重なコメントをいただきました．先生に感謝いたします．

# 対数と指数とは同じ？

矢野　忠[1]

# Are the Logarithms the Same as the Exponents ?

Tadashi YANO[2]

## 1　はじめに

このエッセイはすでに愛数協[3]の機関誌「研究と実践」に掲載されたものである [1].「研究と実践」の読者は主として小学校の先生方であるから，この「数学・物理通信」に掲載すれば，より広い読者が期待できる．なお,「数学・物理通信」に投稿するにあたり，細かな修正を加えた．

札幌の高校の中村文則先生によれば, 指数と対数とは同じものを違った見方で見ているだけだという [2]．私も以前に電気電子工学科ミニマム [3] で指数表示と対数表示という用語を用いたが, 中村先生ほど徹底してはいなかった．

中村先生は指数と対数の関係を英語の能動態と受動態と類似のものに見立てて詳しく説明されている．しかし, 普通の人にとっては指数と対数とは同じものを違った見方をしているとの認識はされていないのではないかと思う[4]．

よく知られているように指数関数と対数関数とは互いに逆関数であり, 同じ関数ではない．それが指数と対数とが違ったものというイメージを生んでいるのではないかと思う．しかし, では指数と対数とが同じものであるのならば, なぜ異なった呼ばれ方をするのかといった謎に迫ってみたいというのがこのエッセイの目的である．

第 2 節では「対数とは何だったか」を辞書の説明によって復習する．第 3 節では対数と指数の関係を見る．第 4 節はまとめである．補遺では対数の定義をいくつかのテクストから抜粋して示す.

## 2　対数とは何だったか

中村先生のホームページを見て, 対数とは何だったかが気になり, 改めて広辞苑 [4] で調べてみた．それによれば,

> [対数 (logarithm)] 正の数 $a$ および $N$ が与えられたとき, $N = a^b$ という関係を満足する実数 $b$ の値を, $a$ を底（てい）とする $N$ の対数といい, $b = log_a N$ で表す．$N$ を真数という.（中略）対数を使えば, 桁数の多い多数の数の乗除を加減法で行うことができる．

と書かれている．この記述で説明はつくされている訳だが, その意味するところがはっきりとわかるだろうか. 別の情報源としてある英英辞典 [5] を見れば, logarithm は数学の用語として

> the exponent expressing the power to which a fixed number (the base) must be raised in order to produce a given number (the antilogarithm) : logarithm are normally computed to the base of 10 and are used for shortening mathematical calculations （べきを表す指数で, 一つの固定された数（底）がある与えられた数に（真数）になるように累乗される．対数は通常 10 を底として計算され, 数学的計算を簡略化するのに使われる）

[1] 元愛媛大学工学部

[2] yanotad@earth.ocn.ne.jp

[3] 愛数協とは愛媛県数学教育協議会の略称で，民間教育団体の数学教育協議会の下部団体である．

[4]「対数と指数とが同じものである」ことをことさら強調しないのは数学教育において関数概念がより重要であり，指数関数と対数関数とは同じものではないからであろう．そのことに異論があるわけではない．

とほぼ同じような説明がされている．

少し察しのいい人なら, この二つの説明ですべてわかってしまったかもしれないが, 少しこれらの説明を敷衍して以下に述べてみたい．

## 3　対数と指数の関係

まず要点をまとめておこう．$a \neq 1$ である正の実数 $a$ に対して, 任意の正の実数 $N$ を

$$N = a^b \tag{3.1}$$

と表すような $b$ の値は一義的に定められる．この $b$ を

$$b = \log_a N \tag{3.2}$$

と表し, この $b$ のことを $a$ を底とする $N$ の対数という．すなわち, (3.1) と (3.2) とは数学的に同値な表現である [6].

ではなぜこのような同値な表現があるだろうか[5]．それは対数と指数とが別々の起源をもっているかららしい．

ネピアは大きな数の乗除, 累乗, 累乗根の計算を対数の和と差に帰着することによって労力の軽減を図ることを目指していた．そういった目的から考えたとき, 現在の用語で表せば, ある数 $N$（真数: anti-logarithm）をよく使う便利な数 $a$（底: base）の何乗として表せるかということに関心があった．それを指数記号的に表せば,

$$N = a^{\square} \tag{3.3}$$

となる．すなわち, □ がいくらになるかを求めることに焦点があった．それならば, クローズアップされた □ をもっと表に出した表現をしたいと考えるのは当然だろう．それをネピアは

$$\square = \log_a N \tag{3.4}$$

と表したと考えられる [7] [8]．ここで, □ はもとの計算したい数（真数）$N$ に対する対数で, それを $b$ と表せば,

$$b = \log_a N \tag{3.5}$$

となる．現在ではこういう風に解釈できるのだが, ネピアの時代には指数は一般的には知られていなかった．しかし, 簡単な指数法則はすでにアルキメデスには知られていたらしい [9] [11].

一方, 指数の方は上と同じ記号を用いれば, ある正の数 $a$ を $b$ 乗すれば, いくらになるかに焦点があるから, それを式で表すと

$$a^b = \square \tag{3.6}$$

となり, 求めたいのは $\square = N$ である．それだから

$$N = a^b \tag{3.7}$$

と表される [10].

指数が普通に使われるようになり, また関数という考えが出てきて, 現在では

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y \tag{3.8}$$

と二つの表現が同値であることがわかっているが, 左側の $y = a^x$ という表示はそもそもネピアは知らなかった．それで, 右側の $x = \log_a y$ という表記が考え出されたということだろう．

[5] (3.1) を難しいという学生はいないのに,（3.1) と (3.2) が同値な表現だと口を酸っぱくして強調した後でも (3.2) は難しくてわからないという学生が少数だがいる．講義のときに何を聞いているのだろう．

私は (3.8) の左側の表記を指数表示, 右側の表記を対数表示と名づけている [3]. これは対数関数を表すときには対数表示を, 指数関数を表すときには指数表示を使うのが現在一般的だからである. もちろん対数関数は指数関数の逆関数であるから, 指数関数を $y = a^x$ と表したときにその変数の $x$ と $y$ とを交換して単に $x = a^y$ としただけで $x$ は変数で, $y$ は関数とみると思ってもかまわないのだろうが, 指数表示と対数表示の同値な関係

$$x = a^y \Leftrightarrow y = \log_a x \tag{3.9}$$

を利用して $y$ が $x$ の関数であることを明示するために

$$y = \log_a x \tag{3.10}$$

という対数表示がすでに存在していたことは対数関数にとっては有難いことだった. この表示のお陰で変数 $x$ の関数としての対数関数 $y$ が鮮明に表示できた. しかし, この対数関数と指数関数が異なった関数であるために, 指数と対数とはちがう別々のものという印象を私たちに与えているのだろう.

## 4　おわりに

指数と対数の演算の規則についてはこのエッセイでは述べなかったが, それについてはどの代数の本に載っているし, 中村先生も [2] で詳しく述べられている. しかし, いつか機会があればそれについても言及してみたい.

## 補遺　文献にみる対数の定義

いままでの数学教育が悪かったわけではないということを示すために私のもっている書籍の中でどのように対数を定義しているかを時代順に，抜粋しておく.

まず『わかる代数学』 [12] では

> $a$ を 1 以外の正の数として,
>
> $$a^x = b$$
>
> という関係があるとき，$x$ のことを **$a$ を底とする $b$ の対数 (logarithm)** といい，この $x$ を表すには,
>
> $$x = \log_a b$$
>
> とする.

としている.

つぎに『解析の基礎』後編 [13] では『わかる代数学』とほとんど同じであるが,

> $a$ が 1 に等しくない正数とするとき，指数が $x$ である
>
> $$a^x = b$$
>
> が与えられたとき，指数 $x$ のことを「**$a$ を底とする $b$ の対数**」といって,
>
> $$x = \log_a b$$
>
> と表す.

と述べている. ここではっきり指数 $x$ と対数が同じことが認識されている.

高等学校のテクストであった,『数学 I』 [14] では**対数の定義**として

$$x = a^y \leftrightarrow \log_a x = y \quad a \text{ は 1 でない正の数}$$

としている．すなわち，$x = a^y$ と $\log_a x = y$ とが同値であることを強調している．
まず『数学入門』下 [15] では

> **対数**　指数関数の曲線をつかって
>
> $$3 = 2^{\square}$$
> $$4 = 2^2$$
> $$5 = 2^{\square}$$
> $$\cdots$$
>
> としたとき，右肩にかいた指数を 2 を底とする $3, 4, 5, \cdots$ の対数という．ここで「2 を底とする 5 の対数」という長いコトバを数学者は $\log_2 5$ とかく．
>
> $$5 = 2^{\log_2 5}$$

遠山先生も対数と指数とが同じことをはっきりと認識しておられる．
さらに,『中高一貫数学コース　数学 3』 [16] では

> $a$ が 1 でない正数とする．このとき，正数 $x$ に対して $a^y = x$ となる $y$ を
>
> $$y = \log_a x$$
>
> と表す．$\log_a x$ のことを $a$ を底とする $x$ の対数という．
>
> この定義は，簡単に
>
> $$y = \log_a x \Longleftrightarrow x = a^y$$
>
> と表した方が見やすいかもしれません．

と書かれている．ここでも指数と対数とが同じとの言及はないものの必要な注意はなされている．
最後に『運動と変化のはなし』 [17] では

> $$y = a^x$$
>
> は，
>
> $$x = \log_a y$$
>
> と表します．
>
> $\log_a y$ は logarithm of $y$ based $a$ を記号化したものです．
>
> logarithm は，ロゴスの個数，つまり累乗の指数という意味でした．$y = a^x$ と表したときの累乗の指数 $x$ のことです．$a$ は，基底となるロゴスですから，底といいます.「$a$ を底（ロゴス）とする $y$ の対数（累乗の指数)」という意味です.（注：引用にあたって文の一部を修正してある）

と述べられている．武藤先生の記述では対数とは「累乗の指数」であるということが意識的にはっきりと述べられている．

# 参考文献

[1] 矢野　忠，指数と対数とは同じ？，研究と実践，94 号 (2007.6) 13-15

[2] 中村文則, 指数と対数の関係のちょっとした小手技, http://www.nikonet.or.jp/spring/sisuu/sisuu.htm

[3] 矢野　忠,『電気電子工学科ミニマム』（第 3 版）（愛媛大学電気電子工学科, 2001.3）6-9

[4] 『広辞苑』（第五版）（岩波書店, 1998）

[5] *Webster's New Word Dictionary* (2nd College Ed., 1982)

[6] http://ja.wikipedia.org/wiki/対数
このインターネットのウィキペディア (Wikipedia) の対数の項によれば, この「指数関数を用いた対数の定義」はオイラー (Euler) によるものだという．またここには対数の「演算法則からの定義」もある．[7] にも同じような定義が載っている．

[7] 志賀浩二,『中高一貫数学コース　数学 3 を楽しむ』（岩波書店, 2003）2-29
この段落の記述は数学史的には正しくない．すぐ後にも述べてあるようにネピアは指数を知らなかったし, 小数さえもまだ使われていなかった．ネピアの定義した対数は現在私たちの知っているものとは少し違っている．教育的なわかりやすさと歴史的事実とは相反することが多い．科学史からいろいろ学ぶことができるが, 実際の発展の歴史はかなり複雑である．

[8] L・ホグベン（今野武雄訳）『百万人の数学』（筑摩書房, 1971）123-172

[9] F・カジョリ（小倉金之助補訳）復刻版『カジョリ初等数学史』（共立出版, 1997) 224

[10] この段落に書いたことは, しかし, どうも現在の指数関数の概念に強く影響された, ものの見方のようである．近代的な指数記号は小数とともに導入された．
F・カジョリ（小倉金之助補訳）復刻版『カジョリ初等数学史』（共立出版, 1997) 216-221 および 336-340 を見よ．

[11] 遠山　啓,『数学入門』下（岩波新書, 1960）96 にはアルキメデスが大きな数を表すのに指数表示を用いたとある．

[12] 秋山武太郎,『わかる代数学』（日新出版，1965）253
この文献の私のもっている版の発行年は 1965 年だが，版の古いものが存在することは確かであるから，最初にもってきている．

[13] 藤森良夫,『解析の基礎』後編（考え方社，1953）492

[14] 田島一郎，中村幸四郎，中村勝彦,『高等学校　数学 I 代数編』（好学社，1956）146

[15] 遠山　啓,『数学入門』下（岩波新書, 1960）102-103

[16] 志賀浩二,『中高一貫数学コース　数学 3 』（岩波書店，2003）21

[17] 武藤　徹,『運動と変化のはなし』（関数編）（日本評論社，2012）89

# 対数の効用

矢野　忠 [1]

## Logarithm for Refresher

Tadashi Yano [2]

## 1　はじめに

朝日新聞 (2015.4.11)[1] に「車のリモコンキー，なぜ間違わない？」という記事が載っていた．それによると車のリモコンのキーのボタンを押すと「ロックを解除しなさい」という命令の電波が車に届いてロックが解除になるという．車のキーの電波は 315 メガヘルツ前後であり，一定だという．それならどうして自分の車のドアのロックが解除されて他の車のドアのロックの解除にならないのかというと各車に登録番号 (ID) があり，それは 0 か 1 かで 32 桁分の ID があるという [3]．

この数は $2^{32}$ である．これが約 43 億だということである．さてこの数を求めるにはどうしたらいいか．こういうきっかけから対数を導入してみたい．もっとも 2 節で述べるが，$2^{32}$ を求めるためだけなら，対数を導入する必要はないが，対数にはもっと広い使い道がある．

2 節では対数を用いないで，$2^{32}$ を求める．つづいて 3 節では対数を用いたときに $2^{32}$ の概数を求める．4 節では 3 節で用いた「対数」とは何かを説明する．5 節はまとめである．6 節は付録で車の ID ナンバー数が $2^{32}$ になる理由の説明である．

## 2　対数を用いなければ

$2^{32}$ がどれくらいの数になるのか．それを知りたいという明確な目的をいまもっている．そのために対数を導入したいが，やはりまず対数を用いないとき，どうやって計算するか．

これは $2^{32}$ を計算すればよい．このごろは関数電卓という便利なものがあるから，それで $2^{32}$ と入力して計算すれば，瞬時に $2^{32} = 4,294,967,296$ が得られるので別に筆算で紙の上で計算することもない．

しかし，ここはちょっと地道に計算をしてみよう．それにはちょっと知識がいる．たとえば，$2^{10} = 1024$ であることを知っていれば，$2^{20} = 1024 \times 1024 = 1,048,576$ が得られる [4]．このときには知識として $2^{20} = 2^{10} \times 2^{10}$ を用いている．同様に $2^{30} = 2^{20} \times 2^{10}$ を用いれば $2^{30} = 1,073,741,824$ が得られる．

$2^{32}$ はこの数に 4 をかければよいから，$2^{32} = 4,294,967,296$ が得られる．これは電卓で求めた数と同じである．

使った関係は指数の $a^x a^y = a^{x+y}$ という関係だけである．

## 3　対数を用いれば

いま

$$y = 2^{32} \tag{1}$$

[1]元愛媛大学工学部

[2]yanotad@earth.ocn.ne.jp

[3]付録に ID ナンバーの数のしくみについて述べる．

[4]$2^{10} = 1024$ という知識がないとすれば，まず $2^3 = 8$ であることを思い出そう．そうすると $2^6 = 64$ であることがすぐにわかる．$2^9 = 64 \times 8 = 512$ となるから，$2^{10} = 2 \times 2^9 = 1024$ である．

とおこう．ほんとうは $2^{32}$ を求めたいのだ．その数値がいくらになるかはともかくとして $2^{32}$ を $y$ という記号で表した．ここでこの式の両辺の対数をとることにしよう [5]．

これから $2^{32}$ の概数を対数をつかって計算しよう．ところがどうしたことかこの計算が私にはできなくなっている．対数を高等学校で学んで約半世紀以上が過ぎたとはいうけれどもこれくらいのことはできてしかるべきであろうに，情けない．

ということで，いくつかの試行錯誤の後で，ようやく計算ができた．その計算はつぎのようである．

$2^{32} = y$ とおいてその常用対数をとる．これは $\log y = 32 \log 2$ である．$\log 2 = 0.3010$ であるから $\log y = 32 \log 2 = 9.632$ となる．この場合の 9 は指標と言って $y$ の数としての桁数を表す．$y$ は 9 桁の数であることがわかる．すなわち，10 億のオーダーの数である．詳しい数値は小数点以下の仮数と言われる部分から計算できる．

この部分は 0.632 である．手元にある対数表を引くと $\log 4 = 0.6020$ であり，$\log 5 = 0.6990$ であるから，その差は $\log 5 - \log 4 = 0.0970$ となる．$(0.632 - 0.602)/0.0970 = 0.030/0.0970 = 0.30$ が得られる [6]．これは対数表の数値のないところに対して，対数値を求める，補間の比例部分の計算である．これから $\log 4.3 = 0.632$ が得られる．したがって，$\log y = 9.632$ であるので $y$ はおよそ $y = 4.3 \times 10^9$ となって，43 億という概数が得られる．これはきちんと計算してみると 2 節で示したように 4,294,967,296 となる．

## 4 対数とは

高校で数学を学んだが，その後は数学に縁のない人にとってはもう対数とはなんだったか覚えていないかもしれない [2]．それは $\log_{10} y$ は数 $y$ の十進数での桁数を表すと思ってほしい [7]．1 より小さい正の数の対数はマイナスの数になる [8]．

$\log_{10} 1 = 0$ であるが，これは 1 は 10 の 0 乗であることを意味する．また $\log_{10} 10 = 1$ であるが，これは 10 は 10 の 1 乗であることを示している．

なんだか難しそうだが，実は

$$10^0 = 1$$

を単に

$$\log_{10} 1 = 0$$

と書いたにすぎない．$10^0$ の指数 0 が対数である．また，同様に

$$10^1 = 10$$

を単に

$$\log_{10} 10 = 1$$

と表す．

対数の定義は

$$y = a^x$$

の指数 $x$ を

$$x = \log_a y$$

[5] 対数を説明するエッセイだのに何の説明もなしに対数をとるなどという語が出るのは普通には許されない．自己矛盾の最たるものだが，許してほしい．高校で対数を学んだが，もう忘れてしまった人を暗に想定している．

[6] 0.632 は $\log y$ の小数点以下の数から来ている。

[7] ここでは対数の底が 10 の場合の常用対数を考える．微分積分学では普通はネピア数 $e = 2.71828\cdot$ を底とする自然対数をとる．

[8] 複素解析での対数でなければ，$y > 0$ の制限がある．

と表す．ここで $x = \log_a y$ の $x$ を $a$ を底とする $y$ の対数という[9]．$x$ は $y = a^x$ と表したときには指数という名前でよばれている．だから対数と指数は実は同じものである．なぜ同じものに異なった名前がついているか．それはその歴史的起源が異なるからである[10].

私は

$$y = a^x$$

を「指数表示」と名付けている．それに対して同等な表現である

$$x = \log_a y$$

を「対数表示」と名付けている．これは数学的には同じものであるが，焦点のあて方だけが異なっている．

## 5　おわりに

このエッセイでは車の ID ナンバーの数がどれくらいの大きさになるかを対数を用いたり，用いないで求めた．これは対数の効用を示す一つの例となっている．高校の数学で対数を学んだが，それを忘れてしまった人が対数を思い出すように「対数とは」という説明を簡単に行った．詳しくはこの号に掲載した前出のエッセイ [2] もあわせてよんでほしい.

## 6　付録　ID ナンバーの数

箱 $\boxed{\phantom{0}}$ に 0 と 1 のどちらかを入れる場合の数はいくらあるだろうか．これは実際に 0 か 1 をいれてみればよい.

$\boxed{0}$ $\boxed{1}$

の 2 通りあることはだれでもわかる．すなわち，2 である．では箱が 2 つになれば，$\boxed{\phantom{0}}$ $\boxed{\phantom{0}}$ に 0 と 1 のいずれかを入れる場合の数はどうなるか.

もう箱を描くのが面倒だから 0 と 1 との並びをつくってみれば，

$$00, 01, 10, 11$$

の 4 つになる．すなわち，場合の数は $2^2 = 4$

もし箱が 3 つになれば，場合の数は $2^3 = 8$ となる．というふうに桁が 1 つ増えるごとに場合の数は 2 倍，4 倍，8 倍，$\cdots$ となっている．それで 32 桁の 2 進数ならば，$2^{32}$ となる．そしてそれを計算するとなんとおよそ 43 億にもなる．朝日新聞 (2015.4.11) には 32 桁の 2 進数の一つとして 11,100,101,010,110,110,110,011,110,000,100 という数が出ていた.

(2018.3.29)

## 参考文献

[1] 車のリモコンキー，なぜ間違わない？，朝日新聞 (2015.4.11)

[2] 矢野　忠，指数と対数は同じ？，数学・物理通信，8 巻 3 号（2018.3）11-15

[9] $\log_a y$ の記号がわからないという学生がかならずいるが，いつでもこれは $y = a^x$ と同じだということに立ち返りたい.
[10] ここでの対数という用語は対数関数のことではないことを注意しておこう.

# 不思議な数式

山崎和夫 [1]

**Strange Number Orders**

Kazuo YAMAZAKI[2]

最近何かの本で，下記のような数式を見つけて頭の体操のため考えてみたことを書かせていただく．

$$1 \times 8 + 1 = 9$$
$$12 \times 8 + 2 = 98$$
$$123 \times 8 + 3 = 987$$
$$1234 \times 8 + 4 = 9876$$
$$12345 \times 8 + 5 = 98765$$
$$123456 \times 8 + 6 = 987654$$
$$1234567 \times 8 + 7 = 9876543$$
$$12345678 \times 8 + 8 = 98765432$$
$$123456789 \times 8 + 9 = 987654321$$

なぜこのようなきれいな式が成り立つのか．最初はいくらか試行錯誤をした後で，これは数学的帰納法で証明可能なはずと気づいた．そこで下記の (2), (3) を思いつき，後はすぐできた．

**（解答）** $n$ を $1 \leq n \leq 9$ の自然数として，$X(n) = 123\cdots n$, $Y(n) = 987\cdots(10-n)$ と定義する．
証明すべき式は

$$Y(n) = 8X(n) + n \tag{1}$$

である．$X(n)$ と $Y(n)$ についてつぎの式が成り立つ．

$$X(n+1) = 10X(n) + (n+1) \tag{2}$$
$$Y(n+1) = 10Y(n) + (9-n) \tag{3}$$

$1 \times 8 + 1 = 9$ であるから (1) は $n = 1$ のときに成り立つ．
したがって数学的帰納法によって (2),(3) が $n = k$ のとき成り立つことを仮定して，(1) が $n = k+1$ のときに確かに成り立つことを示せればよい．すなわち，

$$Y(k+1) = 8X(k+1) + (k+1) \tag{4}$$

を示せればよい．ここで (4) の左辺と右辺を別々に計算してそれが等しいことを示す．
まず (4) の左辺は

$$\begin{aligned} Y(k+1) &= 10Y(k) + (9-k) \\ &= 10[8X(k) + k] + (9-k) \\ &= 80X(k) + 10k + (9-k) \\ &= 80X(k) + 9(k+1) \end{aligned}$$

[1]京都大学名誉教授
[2]kazuo-yamazaki@y2.dion.ne.jp

つぎに (4) の右辺は

$$\begin{aligned}8X(k+1)+(k+1) &= 8[10X(k)+(k+1)]+(k+1)\\ &= 80X(k)+9(k+1)\end{aligned}$$

これで (4) が成りたつことが証明された．

少し恥ずかしい，老人の頭の体操だとお許しください．

# 再帰定義された冪乗関数

世戸 憲治 *

# Factorial Function Defined by Recursive Formula

Kenji SETO*

## 1 はじめに

前回書いた「伸びるゴム棒に沿って虫が這う問題」(今号の 8 巻 3 号) の中にでてくる (2.7) 式

$$x = \frac{v_0}{V_0}(\ell_0 + V_0 t)\log\left(\frac{\ell_0 + V_0 t}{\ell_0}\right)$$

を見ているうちに変なことを考えてしまった．この式で，$\ell_0$ は棒の初めの長さ，$v_0$, $V_0$ は，それぞれ，棒の上を虫が這う速度と棒が伸びていく速度であり，$x$ は時刻 $t$ における虫の位置である．この式を，$\omega = V_0/\ell_0$ とおいて変形すると，

$$x = \frac{v_0 \ell_0}{V_0}\log\left[(1+\omega t)^{(1+\omega t)}\right]$$

となる．この log の中に入っている関数はどのような振る舞いをする関数なのかということが気になりだした．ここで，改めて $x = 1 + \omega t$ とおくことにすると，$y = x^x$ という関数である．これは指数関数以上に速く増大する関数であるが，あまりお目にかかることはないので，その振る舞いがよくは分からない．ここでは，これをさらに再帰的に拡張した関数についても調べてみよう．

## 2 $y = x^x$ について

初めに，関数

$$y(x) = x^x \tag{2.1}$$

について調べる．ここでは，この関数を，名前としてふさわしいかよくは分からないが,「冪乗関数」と呼ぶことにする．ただし，$x$ の範囲は正の領域と制限しておく．この関数を見てすぐに分かることは，$y(1) = 1$, $y(2) = 4$, $y(3) = 27$, $\cdots$ などと，両辺の対数をとって，

$$\log(y) = x\log(x) = \frac{\log(x)}{1/x} \xrightarrow{x\to 0} 0, \qquad \text{したがって，} \lim_{x\to 0} y(x) = 1 \tag{2.2}$$

などである．また，この関数は区間 (0, 1) に最小値を持つが，その位置は，両辺の対数をとったものを $x$ で微分すると，

$$\frac{y'}{y} = \log(x) + 1 \tag{2.3}$$

* 北海学園大学名誉教授 E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

となるので，$y' = 0$ となるのは，$x = e^{-1} = 0.367879\cdots$ のときで，その最小値は $y_{\min} = e^{-e^{-1}} = 0.692200\cdots$ となる．以下，$y = x^x$ に関し数値計算してグラフ化したものを図 1 に示す．

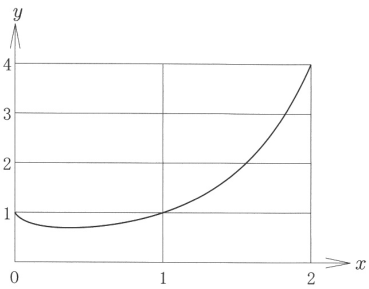


**図 1**　$y = x^x$

## 3　再帰的に拡張してみると

先の関数を拡張して考えると，

$$y = x^{x^x}, \qquad y = x^{x^{x^x}}, \qquad y = x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{x}}}}} \tag{3.1}$$

などが考えられる．これらを形よく定義するには，非負整数 $n$ に関する再帰的方法を用いて，

$$F_n(x) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ x^{F_{n-1}(x)}, & \text{else} \end{cases} \tag{3.2}$$

と定義するのがよいだろう．この $F_n(x)$ を「$n$ 階の冪乗関数」と呼ぶことにする．ここで，番号 $n$ は用いた $x$ の個数と一致する．前節で考えた $x^x$ は $F_2(x)$ であり，$\lim_{x\to 0} F_2(x) = 1$ だったので，この再帰定義から，$n$ 番号が 1 増えた $F_3(x)$ については，$\lim_{x\to 0} F_3(x) = 0$ となることがわかる．以下，同様にして，この再帰定義から，

$$\lim_{x\to 0} F_n(x) = \begin{cases} 0, & n = \text{odd number} \\ 1, & n = \text{even number} \end{cases} \tag{3.3}$$

となることが簡単に証明されるので，$n$ の偶奇で異なる値をとることになる．試しに，この再帰定義に従ってプログラムを組み数値的に求めた $y = F_3(x)$ のグラフを図 2 に示す．

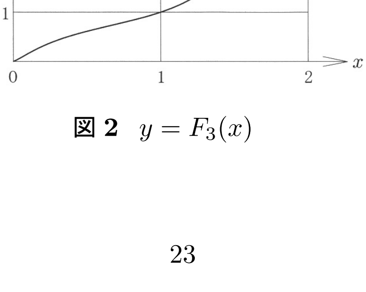


**図 2**　$y = F_3(x)$

ここで，階数 $n$ の値を大きくしていくとどうなるかを考えてみよう．$n = 500, 501$ とした $y = F_{500}(x)$, および，$y = F_{501}(x)$ のグラフを重ね書きしたものを図 3 に示す．

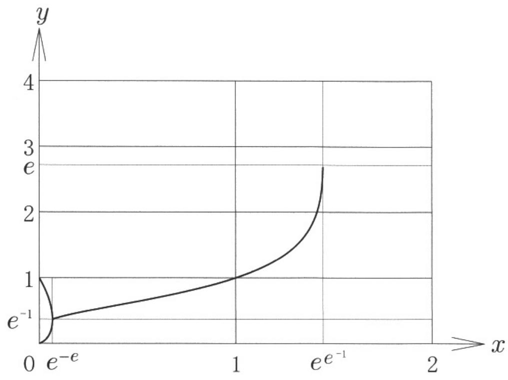


**図 3**　$y = F_{500}(x)$，$y = F_{501}(x)$

これら 2 つのグラフは，$n$ が偶数と奇数の場合なので，確かに異なる形になるが，その異なる部分はほんの $x$ がゼロに近いところだけで，このうち，$x \to 0$ で $y \to 1$ に接続しているものが $n = 500$ の場合で，$x \to 0$ で $y \to 0$ に接続しているものが $n = 501$ の場合である．しかも，$x$ の値がおよそ 0.06 より大きいところでは，これら 2 つのグラフは完全に一致しているように見える．

そこで，$n \to \infty$ という極限での関数を偶数，奇数に分けて，

$$\lim_{n\to\infty} F_{2n+1}(x) = P(x), \qquad \lim_{n\to\infty} F_{2n}(x) = Q(x) \tag{3.4}$$

とおいてみる．これを $F_n(x)$ の定義式 (3.2) に当てはめると，

$$P(x) = x^{Q(x)}, \qquad Q(x) = x^{P(x)} \tag{3.5}$$

となるので，これらの式の対数をとり，$x$ を消去すると，

$$P\log(P) = Q\log(Q) \tag{3.6}$$

となる．ここで，図 4 に $y = P\log(P)$ とおいたグラフを示す．

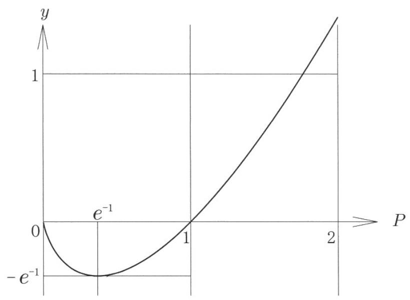


**図 4**　$y = P\log(P)$

この関数は，$P = e^{-1}$ において，最小値 $-e^{-1}$ を持つ．この図から分かるように，$0 < P < 1$ の範囲では，$y$ を与えたとき，2 個の $P$ の値が対応するが，$1 < P$ に対しては，$y$ を与えたとき，1 個の $P$ しか対応しない．

このことは，少なくも $1 < P$ に対しては，$n$ の偶奇性に関係なく $P = Q$ となることを意味している．しかし，先に示した図 3 を見ると $P = Q$ となる領域はさらに広い範囲にわたっている．これはまだ証明ができていないので仮説にすぎないが，$P$ の値が図 4 のグラフの最小点 $P = e^{-1}$ より大きいところ $(e^{-1} < P)$ で，$P = Q$ となることを仮定する．そのとき，(3.5) 式は

$$P = x^P \tag{3.7}$$

となる．この式を $P$ について解こうとすると，超越方程式になってしまうので，逆に $x$ を $P$ の関数として解くと，

$$x = e^{\log(P)/P} \tag{3.8}$$

となる．これから，先に述べた最小点の $P = e^{-1}$ における $x$ は $x = e^{-e} = 0.065988\cdots$ となる．図 3 で見るように，$x$ の値がこれより小さいところでは $P$ と $Q$ の違いが表れているが，この値より大きいところでは $P, Q$ の違いがなく同じ値に収束していると考えられる．

この (3.8) 式のグラフを図 5 に示す．

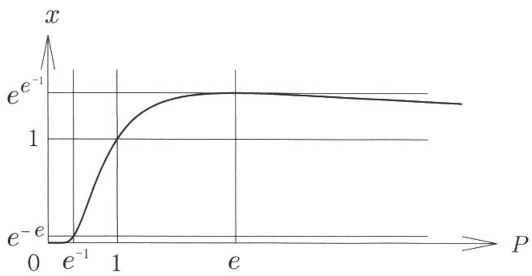


**図 5**　$x = e^{\log(P)/P}$

この (3.8) 式の $x$ を $P$ で微分すると，

$$\frac{dx}{dP} = \frac{1 - \log(P)}{P^2} e^{\log(P)/P} \tag{3.9}$$

となるので，この関数は，$P = e$ において，最大値 $x_{\max} = e^{e^{-1}} = 1.444667\cdots$ を持つ．図 3 で示したグラフは，$x$ の範囲 $(e^{-e},\ e^{e^{-1}})$ で，この図 5 の逆関数の形になっていて，特に，$x = x_{\max}$ では $P = e,\ dP/dx \to \infty$ となっていて，これより大きな $(x_{\max} <)x$ に対しては関数値が定義されない．なお，プログラムでは，十分大きな $n$ に対し，$x_{\max}$ より大きな $x$ での $F_n(x)$ を求めようとすると，「オーバー・フロー」のエラーとなってしまう．

## 4　グラフによる解法

$F_n(x)$ の定義 (3.2) 式は，ロジスティック写像で用いられるグラフを用いた解法がそのまま使える．この方が直感的に理解しやすいので，この節ではこの解法について述べる．まず，この (3.2) 式の定義を

$$F_n(x) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ e^{(\log x) F_{n-1}(x)}, & \text{else} \end{cases} \tag{4.1}$$

と書き直しておく．これをグラフ的に解くには，

$$y = e^{(\log x)F}, \qquad y = F \tag{4.2}$$

とおき，$x$ をパラメータ，$F$ を独立変数，$y$ を従属変数として 2 本のグラフを描いておく．$F=1$ から始めて縦線を引き，この第 1 式にぶつかるところで止め，つぎにそこから横線を引き，第 2 式にぶつかるところで止める．そこからさらに縦線を引き，第 1 式にぶつかるところで止め, さらにそこから横線を引く．この操作を続けることで，$F_n(x)$, $n=0, 1, 2, \cdots$ がつぎつぎに求められる．以下の図では，この操作をした線を赤線で示す．

図 6 に $x=1.6$ の場合を示す．この場合は，これら 2 本の曲線，直線が交わることはないので，上の操作を続けるとしだいに $F$ の値は発散してしまう．つぎにこれら 2 本の曲線，直線が接する場合を考える．そのときは，これら 2 本の式の関数値と微係数が，それぞれ，一致するので，

$$e^{(\log x)F}=F, \qquad (\log x)e^{(\log x)F}=1 \tag{4.3}$$

となり，この解は，

$$F=e, \qquad x=e^{e^{-1}} \tag{4.4}$$

となる．このとき初めて有限の $F$ の値が求められる．このときの図を図 7 に示す．

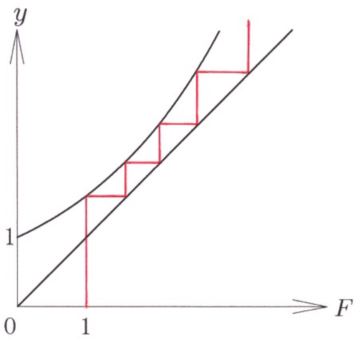


**図 6** $x=1.6$

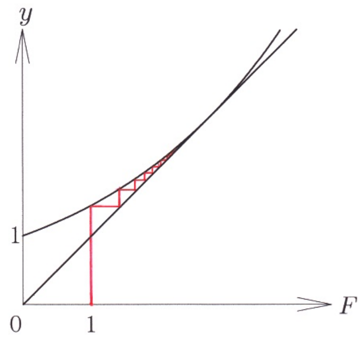


**図 7** $x=e^{e^{-1}}=1.444667\cdots$

$x$ の値がこの $e^{e^{-1}}$ より小さくなると，$F_n(x)$ はある有限値に収束することになる．図 8 に $x=1.4$ の場合，図 9 に $x=0.5$ の場合をを示す．

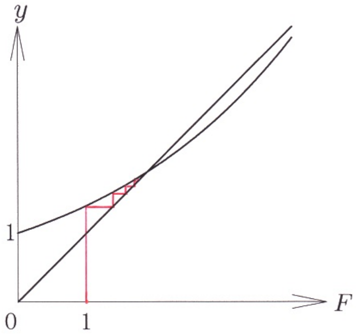


**図 8** $x=1.4$

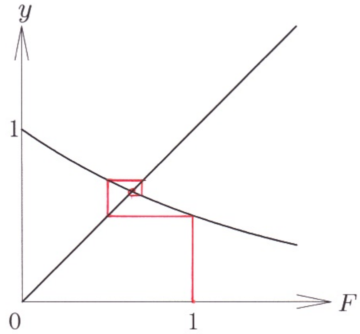


**図 9** $x=0.5$

さらに $x$ の値を小さくしていくと，(4.2) 式の曲線と直線が交わるところで，曲線の方の微係数が $-1$ になるところがある．式で表すと，

$$e^{(\log x)F}=F, \qquad (\log x)e^{(\log x)F}=-1 \tag{4.5}$$

となり，この解は，

$$F = e^{-1}, \qquad x = e^{-e} \tag{4.6}$$

となる．この点がちょうど図 3 で示す分岐点になっていて， $x$ の値がこれより大きいところでは，$F$ は 1 個の値に収束するが，この値より小さいところでは，$F$ は繰り返しの回数の偶奇性により，2 個の値に収束する．この $x = e^{-e}$ の場合を図 10 に，またこれより小さい $x = 0.03$ の場合を図 11 に示す．

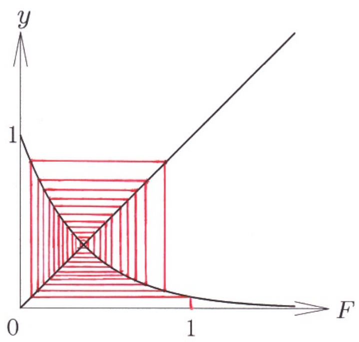


**図 10** $x = e^{-e} = 0.065988\cdots$

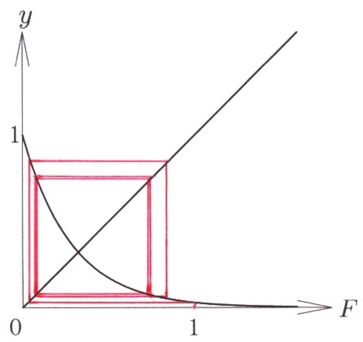


**図 11** $x = 0.03$

## 5 おわりに

今回は，何の役にも立ちそうもない奇妙な関数に興味をもってしまい多大な時間と労力を費してしまった．しかし，今回の仕事で一番面白かったのは，$F_n(x)$ の再帰定義 (3.2) 式に従って，数値計算のためのプログラムを組んだときに，どれくらい大きな $n$ まで計算できるかを試してみたところ，実に $n = 5828$ まで計算ができたことである．それ以上に $n$ の値を大きくすると「スタック領域不足」というエラーになる．プログラム言語の威力をかいま見た思いであるが，これくらい大きな $n$ の値をとっても，$n = 500, 501$ のときの図 3 と見た目にはほとんど違いはない．

なお，(3.2) 式のような式は，数学では「漸化式を用いた定義」と呼ばれることが多いと思われるが，ここでは，プログラム言語でよく使われる「再帰定義」という言葉を用いた．

**[ 謝辞 ]**

今回も，京都大学名誉教授の中西襄先生にこの原稿を見ていただき，貴重なコメントをいただきました．先生に感謝いたします．先生からいただいたコメントをそのままの形で引用させていただきます．『同じ写像の繰り返しの話は，くりこみ群やフラクタルでおなじみのものですね．あまり詳しいことは知りませんが，図 3 のような「分岐」が起こるのは一般的な現象で，これが無限回繰り返されると，カオスに移行するようです．ロジスティック写像 $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$ では，詳しいことが調べられています．』ということで，このロジスティック写像については，かなり昔に，少しかじったことはあったのですが，すっかり忘れていました．先生に言われて思い出し，第 4 節「グラフよる解法」はその手法を用いて書いたものです．

## 編集後記

3 月 15 日に「数学・物理通信」8 巻 1 号，2 号を発行したが，続けて 3 号を発行する．無理をしてこの 3 号を発行することもなかったかもしれないが，世戸憲治さんから予定外のもう一つのご投稿を頂いたので 3 号が発行できた．同氏のご尽力に感謝したい．

2 号の編集後記でフォントの大きさの問題を述べたら，8 ポイントのフォントで問題はないのではないかというご意見を二人の方から頂いた．

一人は世戸さんでこのサーキュラーをプリントして読む人はいないのではないかというご意見で，それならディスプレイ上で任意に拡大して読むことができるのではないかといわれる．

もう一人のご意見を寄せられた方は「徳島科学史雑誌」を発行されている西條敏美さんで画面がきれいにできあがっており，読むのに全く問題がないと思うとのご意見であった．

これは latex による原稿がきれいにできあがるためであると思う．この機会に latex に感謝を申し上げておきたい．

それで, 従来通りの 8 ポイントのフォントを続けていくことにしたい．今回は日本語の目次と英語の目次が別の頁になった．このことを恐れていたのだが，こういう結果となった．今後もこういうことが起こるかもしれない．

次回の発行は 6 月の予定である．

（矢野　忠）