数学・物理通信

8巻4号　　2018年6月

編集　新関章三・矢野　忠

2018 年 6 月 7 日

目次(Contents)

宇宙開闢，ダークエネルギー，ダークマター

Beginning of the Universe, Dark Energy and Dark Matter

中 西　襄 *1

Noboru NAKANISHI *2

1　はじめに

現代物理学の基礎理論は，素粒子物理学としては標準理論 *3 が，重力理論としては一般相対論が非常な成功を収め，それからの逸脱を試みた理論はほとんどすべて潰れたと言ってもよい状況となっている．ただ，標準理論と一般相対論では説明がつかないのではないかと疑われる事実として，「ダークエネルギー」と「ダークマター」の問題がある．それに宇宙論の主要なテーマとして宇宙開闢の問題がある [1].

これらの問題はすでに非常に多くの研究者によって論じられている．しかし筆者の素人目には，どうも原理的な基礎を忘れて辻褄合わせばかりに先走り過ぎているように思えてならない．例えば宇宙開闢では，宇宙がごく短時間だけ指数関数的に膨張したとする仮説「インフレーション理論」が，すでに確立されたかのようにまかり通っている．しかし，それを説明するために導入される「インフラトン場」は，手で自由に細工されるまったく得体の知れないものである．ダークエネルギーはアインシュタイン方程式に宇宙項を導入すれば説明できるが，素粒子物理学のいわゆる「真空のエネルギー」から説明しようとすると “桁数の桁数”が 2 桁も 3 桁も食い違う．ダークマターは重力理論との整合性からその存在は確実だが，その構成粒子はいくら探しても見つからないので，標準理論と関係のない暗黒世界の素粒子を勝手に仮定する話が流行している．

筆者の感想では，もう少し素直に考えられないものかと思う．一般相対論は古典論だから，そのままでは素粒子の標準理論とは整合しないので，これを量子化するのは自然である．これを量子重力という．これまでいろんな量子重力理論が提起されてきたが，量子重力を直接実験的に検証するのは技術的に不可能なので，それらの正否を実験的に選別することはできない．

重力場は一般座標変換不変性という局所対称性があり，その点で標準理論に含まれるゲージ場と似ているから，ゲージ場の量子化と同じ手法でアインシュタイン理論を量子化するのが一番素直であろう．これは見事に遂行できて美しい理論が得られる．これを「量子アインシュタイン重力」という．

この論説では，一般相対論すなわち古典アインシュタイン重力と素粒子の標準理論，それに量子アインシュタイン重力を付け加えた枠組みで，宇宙開闢，ダークエネルギー，ダークマターの

*1 京都大学名誉教授

*2 nbr-nak@trio.plala.or.jp

*3 ニュートリノは質量がゼロでないと修正したもの

問題を論じたいと思う．だた 1 つの未解決問題を説明するだけのため，ただそれだけのために，理論的根拠の薄弱な仮定を導入することはしないというのが基本原則である．.

ここで述べることは筆者の個人的主張に基づくものである．主な論点は，すでにほかのところで発表したものであるが，いろいろなところで述べたので，理論的背景の解説を兼ねてまとめてみた．

2 宇宙のはじまりに関する考え方

宇宙はどのように始まったのだろうかという疑問は，誰もが抱く疑問とみえ，世界には多くの宇宙創成神話がある．最も有名なのは，ユダヤ教やキリスト教の聖典 (正典) とされる旧約聖書の天地創造の物語である．そこには唯一神（ヤハウェ）が天地を創造した 1 週間の日課が描かれている．多神教の日本の神話では，せっせと日本列島をこしらえたのは伊弉諾尊（イザナギノミコト）・伊弉冉尊（イザナミノミコト）だが，その何代かのご先祖様があって，最初に現れたのは天御中主神（アメノミナカヌシノカミ）だということになっている．創成神話で困るのは，宇宙創成を司った最初の神自身を，一体誰がこしらえたのか説明できないことである．天御中主神は何もないところから自力で現れたらしい．それでも神の居住地である高天原（タカマガハラ）は，その前から準備されていたようだ．仏教では輪廻の考え方に基づき，宇宙は始めも終わりもないとしているのであろう．

科学と結びついた天地創造説としては，ニュートンの考えが有名である．天体の運行は，初期条件さえ与えられればその後の運動は彼の運動方程式ですべて決められる．しかし運動量の初期値だけはどうにもならない．そこで最初の一撃は神が与えたと仮定した．彼が神を持ち出したのは，キリスト教による迫害を逃れるためのカムフラージュだったかもしれない．しかし “ニュートンの神”は，最初以外は一切手を出すことが許されないのだから，現在では使用済みの廃物と化しているわけだ．

20 世紀にはいってアインシュタインが一般相対論を樹立すると，宇宙はアインシュタイン方程式で記述されることになった．重力場は 4 次元の時空計量 $g_{\mu\nu}(x)$ と同定されたので，それはテンソル場であって，エネルギー・運動量テンソルをソースとしている．テンソル場はゲージ場（ベクトル場）とは異なりソースは定符号であって，引力になったり斥力になったりすることはない．ニュートンの重力理論の質量が相対論的エネルギーに代わるだけで，重力はつねに引力になる．したがって，アインシュタイン方程式に従えば，真空解以外は宇宙は一方的につぶれる方向に進むことになる．これでは困ると考えたアインシュタインは，宇宙を定常的にするために，たんに $g_{\mu\nu}(x)$ に比例する項を彼の方程式に付け加えた．この項は，係数が極端に小さくて宇宙スケールの問題にしか効かないと仮定するので，「宇宙項」と呼ばれている．しかしその必要はなかった．その後まもなくハッブルが宇宙は膨張していることを発見したのである．アインシュタインは “わが人生最大の失敗” として宇宙項仮説をひっこめたとされる [*4]．

その後，膨張宇宙論が優勢になる．宇宙が膨張し続けているものならば，過去には宇宙は非常

[*4] この逸話はガモフの創作という説もある．

に小さいものだったはずだ．そして重力に逆らって膨張するためには初めに莫大な運動エネルギーを必要とするから，宇宙は熱かったに違いない．ガモフは熱い初期宇宙で元素の合成が行われたとする，いわゆる「ビッグバン宇宙論」を唱えた．他方，20 世紀中葉にはボンディ・ゴールドらの「定常宇宙論」も人気があった．彼らは，ハッブルの観測事実と整合させるために，エネルギー保存則に反して物質が無から創生すると仮定した．ちなみに “ビッグバン” という言葉は，定常宇宙論の立役者であったホイル *5 が膨張宇宙論を揶揄するために発明した言葉である *6.

その後，ガモフが予言していた宇宙背景輻射が，ペンジアス・ウィルソンによってまったく偶然に観測され，膨張宇宙論に軍配が上がった．ビッグバンは標準宇宙論に昇格し，現在では我々が目にしているこの宇宙がはじめ非常に小さかったという説に反対する人はいない．じっさい，宇宙誕生から 40 万年くらい経ってから起こったと考えられる宇宙の晴れ上がり（光が自由に空間を進めるくらいにまで物質の密度が低下したとき）の詳細は人工衛星を用いて観測され，宇宙背景輻射は 10^{-5} の精度で 2.7K の黒体輻射と同定された．しかしこのあまりにも見事すぎる一様性がかえって説明がつかず．インフレーション理論を生む．これについては改めて論ずる．

3 場の量子論の概観

場の量子論の概観を，筆者の考え方に基づいて解説しておこう *7.

場の量子論は素粒子物理学の基礎理論である．微視的現象を論ずるので通常重力は無視する．じっさい，素粒子の標準理論では重力は考えない．したがって，時空は特殊相対論に従いミンコフスキー空間であるとする．座標系も直交座標に限定し，計量テンソルを $\eta_{\mu\nu}$ と書く．それは行列で表すと 4 次の対角行列で，その対角要素は $(1,-1,-1,-1)$（符号をすべて逆にしたものを採用することもある）である．時空座標を x^μ $(\mu=0,1,2,3)$ とすると，$\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$ はローレンツ不変量である．ただしアインシュタインの規約に従い，繰り返し現れるテンソル添え字については和をとるものとする．x^μ を座標の集合とみるときは，添え字を省いてたんに x と書く．

場の量子論では，基本量は素粒子そのものではなく，素粒子を支配する量子場である．量子場は時空の (超) 関数なので，ジェネリックに $\varphi_A(x)$ と書いておこう（A は素粒子の名前やその内部自由度に対応する）．$\varphi_A(x)$ はオペレータでもあって，その全体はオペレータ代数を構成している．その表現空間 $\mathcal{V}$ は内積が定義された（可算）無限次元の複素線形空間であるが，必ずしもヒルベルト空間であるとは限らない．$\mathcal{V}$ の要素は状態ベクトルと呼ばれ，$|\alpha\rangle$ のように表す．内積は $\langle\beta|\alpha\rangle$ のように書く．これは $\langle\alpha|\beta\rangle^*$ に等しい（* は複素共役を表す）．状態ベクトルは一般に座標空間の並進やローレンツ変換に応じて変換する．ただし変換を受けない状態ベクトルが存在し，それを真空と呼び，$|0\rangle$ と記す．一般の状態ベクトルは真空に量子場（を波束でならした

*5 ホイルは異端の科学者で，多くの物議をかもす主張をしたことで有名である．生命の起源は，パンスペルミア説をとり，彗星が最初の生命を運んで来たと考えた．晩年には，大英博物館の始祖鳥化石は捏造であるとの説を展開した．

*6 モネの作品「印象・日の出」にかこつけて揶揄に使われた “印象” という言葉が絵画の「印象派」の正式名称になったように，“ビッグバン”は膨張宇宙論の正式名称になった．

*7 以下ではすべて自然単位（$c=1$, $\hbar\equiv h/2\pi=1$）を用いる．

もの）の多項式を作用させて作れるものと想定する *8．$\langle 0|0\rangle = 1$ であるが，$\langle \alpha|\alpha\rangle$ は必ずしも正とは限らない．言葉の濫用だが，この量を（平方根をとらずに）物理では $|\alpha\rangle$ のノルムと呼ぶ．ノルムは量子論の確率解釈と結びついているので，負ノルムをもつ状態ベクトル（ゴーストと呼ばれる）が観測に関係する量に寄与しては困る．そこで補助条件というものを設定し，補助条件を満たす状態ベクトルの全体で構成される物理的部分空間 $\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}$ というものを導入する．$\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}$ では，負ノルムの状態ベクトルが存在しないようになっていなければならない．$\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}$ の中のゼロノルムの状態ベクトルの全体 $\mathcal{V}_0$ は $\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}$ の部分空間をなすので，その商空間 $\mathcal{H} = \mathcal{V}_{\mathrm{phys}}/\mathcal{V}_0$ が定義でき *9，それはヒルベルト空間になる．ヒルベルト空間内では量子力学の場合と同様にして量子論の確率解釈が可能である．

以上は一般的な枠組みであるが，具体的なモデルは通常作用積分 $\mathfrak{S} = \int d^4x\mathcal{L}(x)$ を与えることによって規定される．ここにラグランジアン密度 $\mathcal{L}(x)$ は，同時空点での $\varphi_A(x)$ とその 1 階微分 $\partial_\mu\varphi_A(x)$（$\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$）の関数で，後者に関しては 2 次多項式である．$\mathfrak{S}$ が $\varphi_A(x)$ の変換に対して不変なとき，その変換群をそのモデルが持つ対称性という．並進やローレンツ変換のように変数 x^μ の変換を伴う対称性を時空対称性，そうでないものを内部対称性という．対称性の要請だけでは $\mathcal{L}(x)$ は決まらないが，くりこみ可能性（有限個のパラメータの調整により観測可能量がすべて有限確定になるという要請）が要求されると存在は非常に厳しくなる．標準理論では $\mathfrak{S}$ はくりこみ可能で，有限個のパラメータの自由度を除いて，その形は本質的に一意的である．

詳しいことは省略するが，正準量子論の一般的な構成を簡単に述べておこう．場の方程式の導出法は解析力学の場合と同じで，変分原理 $\delta\mathfrak{S} = 0$ から，オイラー・ラグランジュの方程式として得られる．オペレータなので “最小” 作用の原理とはいえない．正準理論では $\mathfrak{S}$ の変分だけが意味があるので，後述の経路積分とは異なり $\mathfrak{S}$ そのものが意味をもつことはない．解析力学の場合と同じく $\varphi_A(x)$ の正準共役を $\pi^A(x) = \partial\mathcal{L}(x)/\partial(\partial_0\varphi_A(x))$ で定義し，$\varphi_A(x)$ および $\pi^B(y)$（ただし $y^0 = x^0$）に対し正準交換関係（または反交換関係）を設定する *10．以上の設定に基づいて 4 次元交換子 $[\varphi_A(x), \varphi_B(y)]$ のシステム（反交換子のものも含む）に対するコーシー問題を構成することができる．つまりこれによって原理的に $\varphi_A(x)$ のオペレータ代数が定義されたことになる．次に真空 $|0\rangle$ を導入し，表現空間 $\mathcal{V}$ を構成する *11．

状態ベクトルの空間 $\mathcal{V}$ は時間に依存しない．このような理論構成をハイゼンベルク描像という．場の量子論は本来ハイゼンベルク描像で定式化されるべきものであるが，ハイゼンベルク描像で表現を構成する一般的レシピが与えられたのは，比較的最近のことである [2]．ハイゼンベルク描像は理論的考察には重要であるが，実際の計算には不向きである．量子力学の場合，シュレディンガー方程式が実用的だったことを思い起こすと，ハミルトニアンを用いてシュレディン

*8 “何らかの方法で完備化されていると考える” という意味である．

*9 平たく言えば，“ゼロノルムベクトルだけの違いは無視すれば” ということである．

*10 $[X, Y] \equiv XY - YX$ を X と Y の交換子，それのマイナスをプラスに変えたものを反交換子という．正準交換関係では

$$i\delta(x^0 - y^0)[\pi^A(x), \varphi_A(y)] = \delta^4(x - y) \qquad (A\ \text{についての和はとらない})$$

で，それ以外の組み合わせに対する交換子はすべて 0 である．

*11 表現はうまく作れるとは限らない．限定的な破綻がある場合は量子異常という．

ガー方程式をたてることが考えられる．この理論構成をシュレディンガー描像という．不幸にしてシュレディンガー描像は，場の量子論ではローレンツ不変性になじまないばかりでなく，真空がとんでもない悪戯をして使い物にならない．そこで両方の描像の中間的な描像である相互作用描像が導入された．

ラグランジアン密度の式で微分記号は度外視して場について 2 次式の部分を，自由ラグランジアン密度という．そして自由ラグランジアン密度をもとに構成した場の量子論を，自由場の量子論という．自由場の量子論は場の方程式が線形なので厳密に解ける．しかもローレンツ不変性に抵触しない．そこで与えられたラグランジアン密度を自由ラグランジアン密度とその残りである相互作用ラグランジアン密度に分け，前者による自由場の量子論の解で状態ベクトル空間を設定し，相互作用ラグランジアン密度に基づいて構成した “相互作用ハミルトニアンによるシュレディンガー方程式”（これを朝永・シュウィンガー方程式という）をたてる．この理論構成が相互作用描像である．相互作用描像でも真空が悪戯をする（真空偏極という）が，観測に直接関係のある物理的 S 行列（S 行列要素の絶対値の 2 乗が状態間の遷移確率密度を与える）ではまとめて相因子として取り出せるので，人畜無害である．しかし相互作用描像の真空は原理的に時間に依存するヘンテコなもので，真の真空である $|0\rangle$ とは厳格に区別しなければならない．S 行列要素は相互作用ハミルトニアンに関する冪展開で計算できる．これを摂動論という．摂動論での計算はいちいち最初からやらなくても，ファインマン・ダイアグラムの方法により，ルーチン計算ができる．

さらにファインマンの経路積分により，S 行列要素の母関数が与えられる．ファインマンの経路積分は作用積分 $\mathfrak{S}$ さえ与えられれば，形式的に場の汎関数積分として書き下せるもので，非常に手軽である．そのため場の量子論と言えばファインマンの経路積分のことだと思っている人がある（とくに若い人に多い）．しかしファインマンの経路積分はあくまで母関数に過ぎないのであって，これを場の量子論の基礎に据えるのは誤りである．じっさい，物理的 S 行列のユニタリー性は確率解釈可能性のための必要条件であるが，オペレータ形式の理論をバックにしない限りその証明は不可能である．したがって，ファインマンの経路積分は，一本立ちの理論体系と見るわけにはいかないのである．それゆえ，$\delta\mathfrak{S}$ に関係ない $\mathfrak{S}$ の値に基づいて物理的考察をする人があるが，これはまったく根拠のない推論である．そして当然のことだが，そのような推論から導かれた予言（インスタントン，アキシオンなど）が実験的に検証されたことはまったくない．

4　対称性とその自発的の破れ

対称性とは前節にも述べたように，作用積分 $\mathfrak{S}$ を不変に保つ場の変換群である．連続変換の場合のみを考察する．古典理論の場合と同様にして，ネーターの定理が成立する．すなわち，対称性に対応した保存カレント $J^\lambda(x)$（$\partial_\lambda J^\lambda(x) = 0$）が存在することが証明される．そしてこの第 0 成分を 3 次元空間積分すると，形式的に保存チャージ $Q = \int d^3x J^0(x)$ が得られる．積分が収束しなくても，それは変換の生成子になる（積分を交換子をとってから遂行する.）．すなわち，場 $\varphi_A(x)$ の無限小変換 $\Delta\varphi_A(x)$ が交換子 $i\epsilon[Q, \varphi_A(x)]$（$\epsilon$ は無限小パラメータ）で表され

る．とくに，並進群の生成子は P_μ，ローレンツ群の生成子は $M_{\mu\nu}$ と書く．P_0 はエネルギー演算子であり，ハミルトニアンと同定できる．エネルギーの正定値性の要請により，P_0 の固有値は非負で，ゼロになるのは真空 $|0\rangle$ に限る（つまり，そうなるように表現をこしらえる.）．表現が並進不変性とローレンツ不変性を尊重しているならば，$P_\mu|0\rangle = 0$，$M_{\mu\nu}|0\rangle = 0$ である．P_μ の空間成分と $M_{\mu\nu}$ の空間成分はそれぞれ運動量演算子，角運動量演算子である．オペレータを真空で挟んだものを真空期待値というが，1 時空点のみの関数であるオペレータの真空期待値は，真空の並進不変性により，定数である．

内部対称性に関しては必ずしも表現がその対称性を尊重するとは限らない．表現が対称性を尊重しない場合，その対称性は「自発的に破れた」という．自発的対称性の破れは通常 $Q|0\rangle \neq 0$ で表されるが，この式は積分が収束しないと意味がないので，正しくは $\langle 0|[Q, \chi(x)]|0\rangle \neq 0$ となるような場 $\chi(x)$ が存在することと定義する．すなわち，$\langle 0|\Delta\chi(x)|0\rangle \neq 0$ である．Q が P_μ と可換ならば [*12]，$\chi(x)$ は必ず質量がゼロの場であることが証明できる．これを「ゴールドストーンの定理」という．そして，その質量ゼロの粒子を「NG ボソン」（南部・ゴールドストーン・ボソン）という．

対称性の自発的破れの概念は，2008 年に南部陽一郎がノーベル賞を受賞して以来一般にも広く知られるようになったが，南部・ヨナラシニオの論文が出たのはそれより半世紀も前の事である．この論文は，物性論で不可解だった超伝導現象を見事に解明した BCS 理論の考え方を，素粒子物理学に取り入れたものである．カットオフされた発散積分が主要な役割を演じているので，発表当時はうさん臭い論文と思われていた．しかしその少し後，ゴールドストーンがスカラー場を使って自発的に破れた対称性をもつモデルを明快な形で提示することに成功して，この概念は受け入れられるようになった．この「ゴールドストーン模型」はその後ゲージ場を取り入れた「ヒッグス模型」に拡張され，標準理論の屋台骨を支えることになる．

少し式を使わなくてはならないが，後で必要になるので，ゴールドストーン模型について具体的に説明しておこう．このモデルの場は複素スカラー場 $\phi(x) = \phi_1(x) + i\phi_2(x)$ （ここに $\phi_j(x)$ は実スカラー場，$\phi_j^\dagger = \phi_j$）で，そのラグランジアン密度は，

$$\mathcal{L}_{\mathrm{G}} = \partial^\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi - V(\phi) \tag{4.1}$$

である．(x) は省略した．ダガー（†）はエルミート共役を表す [*13]．ポテンシャル $V(\phi)$ は

$$V(\phi) = u\phi^\dagger\phi + \frac{\lambda}{4}(\phi^\dagger\phi)^2 \tag{4.2}$$

で与えられるとする（第 2 項の係数 λ は正）．明らかに $\mathcal{L}_{\mathrm{G}}$ は相変換 $\phi \mapsto e^{i\theta}\phi$ で不変である．無限小変換は $\Delta\phi = i\epsilon\phi$ なので，その真空期待値は $\langle 0|\phi(x)|0\rangle$ に比例する．

ϕ の真空期待値の計算において，量子補正が無視できるとし（第 0 近似），$\langle 0|\phi(x)|0\rangle = v/\sqrt{2}$ とおく．上述のように，真空の並進不変性により，これは定数になる（v は複素数）．したがっ

[*12] 有限自由度の系ならば，このとき Q は P_μ と同時対角化可能なので，$Q|0\rangle \neq 0$ はありえない．つまり自発的対称性の破れが起こるためには，無限大自由度の系であることが必要である．

[*13] $\langle\alpha|X^\dagger|\beta\rangle = \langle\beta|X|\alpha\rangle^*$.

て $\partial_\mu\phi$ の真空期待値はゼロとなる．真空はエネルギー最小の状態だから，それを求めるには $dV(|v|/\sqrt{2})/d|v| = 0$ を解けばよいことになる．すなわち

$$\Big(u + \frac{1}{4}\lambda|v|^2\Big)|v| = 0 \tag{4.3}$$

を満たす．

$u > 0$ のときは $v = 0$ がエネルギーの最小値を与える．したがって真空は相変換に対して不変で，対称性は破れていない．他方，$u < 0$ ならば，$v = 0$ は極大を与え，最小は $|v|^2 = -4u/\lambda$ のときである．このとき $v \neq 0$ であるから，対称性は自発的に破れている．$\arg v$ は任意であるから，真空の一意性と矛盾しないためには $\arg v$ を特定の値に固定しなければならない．したがって，確かに対称性が破れているのが見られる．そして対称性の生成子と ϕ_2 との交換子の真空期待値はゼロのならないので，ϕ_2 が NG ボソンである．じっさい u の値を代入して計算してみればわかるように，ϕ_2 は質量は（少なくとも第 0 近似で）ゼロであることが見られる．

ゴールドストーン模型では，エネルギーの最小に応じて自発的対称性の破れが起こったり起こらなかったりしたが，これは必ずしも一般的な現象とは限らないことに注意しておこう．表現が無条件に自発的対称性の破れを引き起こすこともあるのである．

5　素粒子の標準理論

スピン s は素粒子を区別する基本的量子数である．スピンはローレンツ群の表現を指定する量子数なので，角運動量保存則に寄与する．その値は非負の整数または半奇数だが，標準理論ではくりこみ可能性の要請から $s = 0, 1/2, 1$ に限定される．

スピン 1/2 の場をディラック場といい，ディラック方程式を満たす [*14]．量子化のさいは反交換関係に従う（フェルミ統計という）．ディラック場で記述される素粒子はクォークとレプトンに大別される．クォークは「強い相互作用」と「電弱相互作用」（「電磁相互作用」と「弱い相互作用」を統合したもの）の 2 種類の相互作用をし，前者による束縛状態としてハドロン（バリオンとメゾン）という粒子を構成する．ハドロンの電荷は素電荷の整数倍だが，クォーク自身は半端な電荷をもち，決して観測されることはない．6 種類あることが知られているが，2 種類ずつがセットとなって「世代」を構成している．各世代は質量を除きほぼ同様な振る舞いをする．第 1 世代のクォークは u クォークと d クォークで，それぞれ素電荷の 2/3 倍と $-1/3$ 倍の電荷をもつ．陽子は “uud バリオン”，中性子は “udd バリオン”である．レプトンも同じく 6 種類あり，3 世代に分けられる．第 1 世代は電子と電子ニュートリノである．レプトンは強い相互作用をしない．

スピン 1 の場は力を伝達する場であり，後述の理由からゲージ場と呼ばれる．強い相互作用を伝達するゲージ場をグルーオン，電弱相互作用を伝達するゲージ場を電磁場（光子の場）および弱ボソン場という．スピン 0 の場は質量を生み出す場で，ヒッグス場という．これらは量子化のさい交換関係に従う（ボース統計という）．

[*14] ディラック場では粒子と反粒子が独立な自由度として存在する．

標準理論は，強い相互作用に対する「量子色力学」と電弱相互作用に対する「電弱理論」（ワインバーグ・サラム理論）を合併したものである．前者では，各クォークが 3 色の「カラー」を持つとされ，3 次元特殊ユニタリー群 $SU(3)$ の基本表現に従う．この $SU(3)$ 対称性は，古典論的には時空の各点ごとに連続的に変化してもよいような対称性，すなわち「局所対称性」である．一般に局所対称性の変換は，時空に関する微分 ∂_μ とは整合しない．変換性を尊重するようにこれを修正した微分を，共変微分という．共変微分は通常の微分とゲージ場より成る．量子色力学の場合，ゲージ場はグルーオン場であって，カラー $SU(3)$ の随伴表現に従う．グルーオンは電荷をもたないが，観測にはかからない．

電弱相互作用の対称性は，カイラル対称性と呼ばれる 2 次元特殊ユニタリー群 $SU(2)$ とハイパーチャージと呼ばれる 1 次元ユニタリー群 $U(1)$ との積であり，4 自由度をもつ局所対称性である．この局所対称性の 3 自由度は自発的に破れる．元の対称性はすべて破れるのだが，破れない自由度として $SU(2)$ の中の $U(1)$ と元からある $U(1)$ とのある特別な組み合わせが生き残るのである．これが電磁対称性であって，それのゲージ場が電磁場に他ならない．一般にゲージ場は対称性が自発的に破れていないとその質量はゼロであるが，自発的に破れると正の質量を持つようになる [*15]．このメカニズムを「ヒッグス機構」という．電弱理論で自発的破れを引き起こす役者が，ゴールドストーン模型の複素スカラー場をダブルにした 4 自由度を持つ場である．このうち 3 自由度は質量ゼロの NG ボソンであり，ヒッグス機構によって観測されない（なぜそうなのかは後述）．残りの 1 自由度がヒッグス粒子で正の質量を持つ．最近 CERN の巨大加速器でヒッグス粒子が観測され大きく報道されたが，理論として重要なのはヒッグス場の真空期待値のほうであって，ヒッグス粒子のほうはむしろ招かざる客なのであった [*16]．なお，カイラル対称性はラグランジアン密度にディラック場の質量が入っていると成り立たない．したがってその質量を生み出すだけのために湯川相互作用というものを導入し，ヒッグス場の真空期待値を利用する．これは標準理論の一番見苦しい部分であろう．

標準理論は正準量子化可能で，場の量子論としてきちんと定式化される．ただしゲージ場の場合は特別な問題が生ずる．それはゲージ変換が場の自由度と対等な自由度を持つことに起因する．このためゲージ自由度に関しては $\delta\mathfrak{S} = 0$ が意味を持たなくなるばかりでなく，正準共役量がうまく定義できないという事態が起こる．この困難を避けるために，「ゲージ固定項」を導入し，ゲージ変換ができないようにする．この際，「B 場」[*17] というスカラー場が導入される．このままではゲージ不変性が失われているので，さらに 2 つのフェルミ統計に従う奇妙なスカラー場「FP ゴースト」（ファデエフ・ポポフ・ゴースト）と「反 FP ゴースト」[*18] を導入し，ゲー

[*15] ズボラして，最初から弱ボソン場を正の質量をもつベクトル場として理論を構成すると，くりこみ不可能になることが知られている．ゲージ理論とヒッグス機構の利用が電弱理論の神髄である．

[*16] ちょうど古典電磁気学でマクスウェル方程式を定式化するのに変位電流の導入が必要になったようなものだ．そういう理論のコンシステンシーから従う予言が後に実験で確認されることが，“本物の理論”のすごいところなのである．

[*17] NL 場（中西・ロートラップ場）ともいう．

[*18] 反 FP ゴーストは FP ゴーストの反粒子ではない．最初に経路積分で発見されたといういきさつから，この誤解が生じたのである．反 FP ゴースト場は BRS 変換すると B 場になる．

ジ変換の量子論版である「BRS 変換」(ベッキ・ルーエ・ストラ変換) *19 を考える．古典的ゲージ変換の無限小任意関数は，BRS 変換では FP ゴーストという特定の場に置き換わる．理論は BRS 不変になるように構成されるので，ネーターの定理により BRS チャージ Q_B が存在する．この BRS チャージを使って補助条件（九後・小嶋条件）

$$Q_B|\mathrm{phys}\rangle = 0 \tag{5.1}$$

を設定することにより，物理的部分空間 $\mathcal{V}_{\mathrm{phys}} = \{|\mathrm{phys}\rangle\}$ が定義される．この物理的部分空間のノルムは非負であることが証明される．

標準理論の一部分として含まれる量子電磁力学（電磁場と電子の系の場の量子論）は，可換群 $U(1)$ のゲージ理論であるが，縦波光子の自由度は補助条件により非物理的になり，観測にかからない．これによって電磁波が横波であることが量子論的に保証される．また電弱理論の場合，NG ボソンは非物理的になり，観測にかからない．俗に“ヒッグス機構により NG ボソンは弱ボソンに食われてその縦波成分に化けた”といわれるが，理論から NG ボソンが消失したのではない．並進不変な局所場の理論である限り，ゴールドストーンの定理によりそれは存在しなければならない．ただ，決して観測できないだけである．クォークやグルーオンも観測できないのに存在すると認めるのならば，NG ボソンの存在も認めるべきであろう *20．しかし残念ながら，素粒子の一覧表にカイラル対称性の NG ボソンが載せられたことはない．クォークやグルーオンが観測にかからない理由については次節に改めて論ずる．

6　ダークマターの問題

よく知られているように，ダークマターとは自ら輝くことのない天体（もしくは天体もどき）である．そういうものが存在すること自体は当然だが，問題はその量があまりにも莫大であることで，通常の天体の総量の数倍にも及ぶ．そしてダークマターの大部分は，狭い範囲に局在するのではなく，銀河や銀河団の規模に広がっている．ダークマターが存在することは，観測事実とニュートンの重力理論とからきちんと推論できることである．一般相対論を援用する必要があるような問題ではない．

ダークマターを構成する実体は何かというのが大問題とされている．光速に近い速度で運動してないので，光子やニュートリノではない．また電磁的相互作用や強い相互作用による反応が観測できないので，標準理論で想定されている粒子から構成されているようには思えない．そこで多くの研究者は，標準理論の粒子とは微弱な相互作用しかしない闇の世界の重い粒子があると想定している．しかしそのような珍奇な粒子は巨大加速器 LHC でいくら探しても見つからない．ダークマターはごく少量ながら地球上でもそこらへんにぶらぶらしているはずだが，それも見つからない．これが現状である．

---

*19 BRST 変換ともいう．

*20 現実に明白な物理的効果も存在している．じっさい，もしもそれが存在しなければ，荷電パイオン（最も軽いメゾンである湯川中間子）は理論的に崩壊できなくなってしまい（中間状態が角運動量保存則に反するから），明白に実験と矛盾する [3]．

以上から，ダークマターは，古典論的な重力相互作用によっては観測されるが，量子論的なミクロの反応では観測できないと考えるのが自然であろう，粒子があるのにそれを直接観測できないという可能性は，前節で説明したように場の量子論の枠内で存在する．NG ボソンである．それは補助条件 (5.1) によって観測にかからないのであった．残念ながら NG ボソンは質量がゼロなので，ダークマターの候補にはなりえない．しかし，標準理論にはほかにも観測にかからない粒子があった．クォークやグルーオンなどである．

量子色力学ではカラーを持つ粒子はすべて観測にかからないことになっている．“・・・ことになっている” というのは理論的に証明ができていないからである．これを「カラー閉じ込め問題」といい，量子色力学最大の宿題である [*21]．クォークと反クォークとが分離できないことを力学的に証明しようとするいわゆるクォークの閉じ込めの研究はあるが，このような方法ではすべてのカラー粒子の閉じ込めを証明することは不可能である．荷電の保存がラグランジアン密度を見ただけでわかるように，例外なく成立しているカラーの閉じ込めは，理論を詳しく計算しなくてもわかるようなもののはずであろう．すなわちカラーの閉じ込めはマニフェストであるはずだ．

マニフェストなカラー閉じ込めは，補助条件の方法を用いれば可能である．それは物理的状態は無色であるという補助条件を設定すればよい．具体的にいうと，カラー $SU(3)$ の生成子を $Q^a\ (a = 1, 2, \cdots, 8)$ とするとき，(5.1) に加えて

$$Q^a|\mathrm{phys}\rangle = 0 \tag{6.1}$$

を補助条件とするのである [4]． Q^a は Q_B と可換なので，さらなる補助条件は生じない．

これですべてのカラー粒子を閉じ込められるかどうか？問題は単純ではない．それは「お月様の裏側問題」というものがあるからである．現実ではないが，理論的に電子を補助条件を用いて閉じ込めたいと思ったとする．電磁対称性 $U(1)$ の生成子を Q とするとき，上と同様に $Q|\mathrm{phys}\rangle = 0$ という補助条件を設定するわけだ．これで電子が観測できないことになるかというと，そうは問屋が卸さない．ここに電子があって，お月様の裏側に陽電子がある状態は補助条件を満たし，物理的状態であるから，お月様の裏側を見なければ，ここの電子が観測されてしまう．しかし，じつはこの問題は可換群の場合の特性であって，カラーの場合のように非可換群の場合には起きない．その理由は一言でいえば，近頃はやりの概念である「量子もつれ」（エンタングルメント）が生ずるためである．

物理的状態において，離れた地点に波束がある 2 つの粒子の一方を取り出せるためには，2 つの粒子に対応する場のオペレータが単純積の形になっていなければならない．しかし非可換群の場合，単純積の状態は決して自明な表現（単位元のみから成る表現）を与えないことが証明される．カラー $SU(3)$ の場合，クォーク場 $\psi^\alpha(x)$ と反クォーク場 $\bar{\psi}^\alpha(x)$ から成る自明な表現すなわち無色の状態は，たとえば

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \bar{\psi}^\alpha(y)\psi^\alpha(x)|0\rangle \tag{6.2}$$

[*21] これの 1 つの解を数学的な問題の形に変形した命題の証明が，ミレニアム問題の 1 つにもなっている．

のような状態である．$x^\mu = y^\mu$ ならばメゾンだが，x^μ と y^μ とが離れている物理的状態では量子もつれが起きていて，クォークの波束を単独で取り出すことは不可能である．したがって非可換群の場合には (6.1) のような補助条件によって閉じ込めが実現する *22.

さて，こうしてカラーの閉じ込めが実現したとすると，ダークマターをカラー粒子と同定するのは自然なように思われる [5]．カラー粒子との散乱は初期状態が非物理的であるから，一切観測にはかからない．しかし，物質としては存在するのだから，もちろん古典論的な重力相互作用については物理的な粒子と変わるところはない.

ビッグバン宇宙論に基づいて空想を逞しくすると，宇宙のはじめにたくさんあったクォークと反クォークが対消滅し，わずかに半端で生き残ったクォークからバリオンが作られる．しかしこれは 3 体衝突しなければならず，多くのクォークがバリオンになり損ねるであろう．バリオンになり損ねたクォークがダークマターであると考えるならば，それがバリオンの数倍あることは自然であると思われる．両者の存在量の桁が同じということは，ダークマターがバリオンとまったく別質の存在ではないことを示唆しているのではなかろうか.

ダークマターの現在の状態を次のように推測する．それは全体として電気的に中性で，雲のように広がっているであろう．雲は液滴のようなものから成り立っている．液体の水は 1 個の酸素原子と 2 個の水素原子から成る分子の集合というより，酸素イオンと水素イオンが 1:2 比で混ざりあったものと考えられるが，それと同じようにダークマターを構成しているのは，u クォークと d クォークが 1:2 比で電気的な力でまとまった液滴みたいなものであると想像する.

以上のような仮説がもし正しかったら，カラーの閉じ込めとダークマターの 2 大問題が，わけのわからない闇の世界を導入することなく説明できたことになり，標準理論万歳!!ということになるであろう.

7　一般相対論とその量子化の必要性

一般相対論は特殊相対論が局所的には成立するように重力を時空の曲がりとして取り込んだ理論で，「アインシュタイン重力」とも呼ばれる．それは，一般相対性原理と等価原理という 2 大原理に基づいて整然と構成された理論で，第 1 近似としてニュートンの重力理論を含み，ニュートン理論では説明がつかない多くの観測事実を，新たに調節可能なパラメータを導入することなく見事に説明した，現在人類が持つ最高の理論であるといえる.

アインシュタイン重力の本質は一般相対性原理にある．これはすべての基礎方程式は一般共変（一般座標変換のもとで形を変えないこと）でなければならないということである．ここに一般座標変換とは任意の（2 階連続微分可能な）関数による変換で，つまり微分幾何として意味のある式でなければならないという要請である.

アインシュタイン重力では $g_{\mu\nu}(x)$ は，時空計量と重力場という 2 つの役割を演ずる．時空計

*22 普通の理論の場合，散乱過程の前後の状態を表す漸近状態のはる空間がフォック空間，すなわち各粒子の個数演算子が独立に非負整数値を固有値とするような固有状態ではられる空間だが，(6.1) のような補助条件が課せられた場合にはフォック空間ではなくなる．このことは原理的に実験的にチェック可能のはずである.

量としては，擬リーマン空間の無限小 4 次元距離 ds を

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \tag{7.1}$$

という形で与える．

他方，それは重力場としてアインシュタイン方程式 [*23]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\kappa T_{\mu\nu} \tag{7.2}$$

を満たす．記号の詳しい意味は必要ないので，簡単に説明しておくと，リッチテンソル $R_{\mu\nu}$ はリーマンの曲率テンソルを縮約したもの，スカラー曲率 R はリッチテンソルに $g^{\mu\nu}$ を乗じて縮約したもの，アインシュタイン定数 κ はニュートンの万有引力定数 G に $8\pi/c^4$ を乗じたもの，エネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ は，物質に関する作用積分を一般共変化したものを S_M とするとき，その S_M を $g^{\mu\nu}$ について変分して得られるものである．

アインシュタイン方程式が変分原理から導かれるという事実は重要である．アインシュタイン・ヒルベルトの作用積分は

$$S_E \equiv \frac{1}{2\kappa}\int d^4x\sqrt{-g}R \tag{7.3}$$

で与えられる．ここに $g \equiv \mathrm{det}g_{\mu\nu}$ (det は行列式を表す）である．$\sqrt{-g}$ は積分体積が不変測度になるように挿入された（つまり $d^4x\sqrt{-g}$ が一般座標変換しても変わらない.）．したがってこの因子は S_M の定義式にも挿入されている．アインシュタイン方程式は変分原理 $\delta(S_E + S_M) = 0$ から得られる [*24]．

$\sqrt{-g}$ が定数でないゆえに，本来のラグランジアン密度が定数項を含んでいても，無視することはできない．そのような項がある場合には，アインシュタイン方程式は,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} \tag{7.4}$$

になる．新しく付け加わった左辺第 3 項が宇宙項と呼ばれるものである．宇宙項は不変測度という物理的意味があまりよく分からないものから出てきた “変なもの” であるにも拘わらず，宇宙スケールで明白な物理的効果を生む．じっさい，後で述べるように，この項がいろいろと物議をかもすことになる．

ここで重要な注意をしておく．アインシュタイン方程式自体は計量符号がユークリッド的かローレンツ的かの情報は一切含んでいないことである．すなわち重力場 $g_{\mu\nu}(x)$ をローレンツ的時空計量と同定したとき，はじめて擬リーマン幾何学の方程式になる．のちに述べるように，量子重力では重力場と時空計量は同じものではないので，このことはよく留意していただきたい．したがって，(7.1) は量子化の対象にはならない．ここの $g^{\mu\nu}(x)$ までもオペレータとすると，時空座標まで量子化しなければならなくなる [*25]．

[*23] 右辺の符号がマイナスになっているのは，時空計量を時間方向を正にとる素粒子物理学の習慣に整合させたためで，気にする必要はない．

[*24] R は 2 階微分を含むので，部分積分しなければならない．

[*25] このところを誤解して，重力の量子化は必然的に時空の量子化を導くと思っている人がいるが，時空は量子化する必要がないし，そのやり方を決める指導原理もない．

さて，量子論もアインシュタイン重力も非常な成功を収めた理論で，これらが正しい物理学の理論であることはほとんど疑う余地はない．したがって，アインシュタイン重力を素直に量子化した理論すなわち量子アインシュタイン重力を導入するのは，極めて自然であると考えられる．しかるに，まったく不思議なことに，多くの研究者が量子アインシュタイン重力を基礎理論として受け入れたがらないのである．

重力が中性子の波動関数に予期通りの影響を与えることは実験的に確かめられている．しかし，重力そのものが量子論的効果を示すという実験的証拠はない．それはあまりにも微弱で，人類の持つ技術ではとらえることができないと考えるのが自然なのだが，それを原理的なレベルの問題ととらえて，重力は量子化する必要はないという立場をとる人たちがいる *26．重力が関係するときは，作用と反作用が原理的に性質が異なる力だと仮定するわけだ．

この立場を最も手っ取り早く理論化する方法は，作用積分として $S_E + S_M$ をとり，重力場は量子化せず，S_M は標準理論の作用積分を一般共変化したものとするのである．この理論は古典論と量子論をチャンポンにしたものなので，「ハイブリッド理論」と呼ぶことにする．しかし，ハイブリッド理論は原理的にナンセンスなのである．このことは宇宙項の問題との関連で，あとから議論する．ハイブリッド理論を基礎理論とは考えずに，近似理論だとする立場もあるが，これは理論構成そのものがおかしいのだから，やはり意味がない．原理的な困難がないアプローチは，重力場を特定のものに固定した（つまり外場とした）量子論，すなわち「曲がった時空での量子論」と通常呼ばれるものである *27．しかしこれがどういう理論の近似なのかはよくわからない．

作用積分は S_M のみとし，アインシュタイン方程式の右辺をつじつま合わせのため，何らかの状態での期待値に置き換えるという姑息なことを考える人もある．しかしこれはその状態の選択方法が不明だし，それを量子論的観測した場合の，いわゆる波束の収縮問題でおかしなことになってしまう [7]．

重力場を量子化しないもっとドラスティックな立場は，重力そのものを基礎的な力でなく，ほかの力から導かれる，いわゆるエマージェントなものだとするものである．「エマージェント」とは，個々の構成要素が従う法則とはまったく異なるような法則が，構成要素の集合に対して成立することである．その代表的な例は熱力学である．構成要素である分子はニュートンの運動法則に従うが，多数の分子を統計学的に処理すると熱力学の法則が得られる．しかし熱力学の法則からニュートンの法則を導くことは不可能であろう．アインシュタインの理論はニュートンの理論よりさらに基礎的な理論であり，第一原理から明快な論理に基づいて構成された美しい理論である．そんなものがエマージェントとして出てくるなどということは到底信じられない．エマージェントな理論は作用積分を持たないと思う．

アインシュタイン重力は量子化されなければならない．この意見に同意する研究者も，重力場を素直に量子化しない複雑怪奇な理論を好む人が多い *28．その根拠は，量子アインシュタイン

---

*26 量子電磁力学のくりこみ可能性を証明したダイソンは，この立場を表明している [6]．

*27 ブラックホールのホーキング輻射理論はこの例である．

*28 複雑怪奇な理論では，いくらでも理論のつぎはぎができるから，やることに事欠かないというメリットがあるからであろう．

重力はいわゆる「発散の困難」が避けられないと信じていることである．すなわち，共変的摂動論を適用して計算すると，くりこみ不可能で，数値的予言ができないからである．しかし，量子アインシュタイン重力に摂動論を適用するのは誤りである *29．摂動論を定式化するためには，$g_{\mu\nu}(x)$ は $\kappa \to 0$ の極限で，特定の時空計量たとえば $\eta_{\mu\nu}$ になると仮定しなければならない．しかし理論そのものに特定の座標系を導入するのは，明らかに一般相対性原理に反する．特定の時空計量が天から降ってくるわけはない．次節に述べるように，$g_{\mu\nu}(x)$ の $\kappa \to 0$ 極限はオペレータなのである（その具体的な表式も理論からちゃんと計算できるものである．）．量子アインシュタイン重力を正しく計算したときに，発散の困難があるか否かはもちろんまだわからないが，負ノルム状態からの寄与を含むので発散の解消は十分期待できる．

8　量子アインシュタイン重力

人間は量子論に接してそれを奇妙なもののように感じるが，量子論のほうが古典論より基礎的な理論であることは疑いない．それならば "自然" が自らを語る言葉は当然量子論であろう．不幸にして，人間は直接一般の状態ベクトルを見ることはできない．それを "観測" と称して無理やりに古典論的に理解可能な状態に持っていくのである．どの理解可能な状態に移行するかは確率的にしか予言できないので，量子論は確率解釈が必要になるのだ．だから，究極理論を構成するときは，人間サイドからではなく，"自然" のサイドから考えなければならないはずである．そこで筆者は，10 年余り前に，次の原理を提唱した [8]：

[量子優先の原理]　究極理論においては，いかなる古典物理学的概念も，その量子論的構成より論理的に先行して現れてはならない．

この原理に従えば，特定の時空計量の存在をあらかじめ仮定するような理論は，究極理論ではありえない．$g_{\mu\nu}(x)$ は重力場に対応するオペレータであって，理論構成において直接時空計量とは同定できない．つまり特定の計量符号をもった時空計量は，始めには存在しないわけだ．そうすると，x^μ というのは一体何だろうということになる．それは計量も接続もない世界の住人だ．そこで最も素直な仮定は，x^μ はアフィン空間の住人であるとすることであろう．

アフィン空間というのは，並進と一般線形変換に対する不変性が成立する空間である．いわば "のっぺらぼう" であって，時間の方向性を含まない．相対論は時間を空間とまとめて 4 次元空間にしてしまったが，もともとニュートンの力学では時間は独立した 1 次元の直線であった．時間の方向性を取り入れるために，4 次元アフィン空間とは別に「原時間」という重複点のない 1 次元の連続体を考え，前者から後者への連続写像 f を導入する．原時刻 t の原像 $f^{-1}t$ によって「同原時刻」を定義する．このように時間概念を相対論的時空から解放することは，正準形式における時間の特別扱いと相対論的共変性との間の不協和音を回避するために大切なことである．

さて，量子アインシュタイン重力の定式化へ話を進めよう [9]．もちろん重力部分の作用積分

*29 このことは BRS 不変性に基づいてきちんと証明ができる．

としては S_E をとる．一般座標変換不変性という局所対称性があるので，ゲージ場の量子化と同じくゲージ固定項と FP ゴースト項を導入し，BRS 不変になるようにするわけだが，その前に解決しなければならない問題がある．それは作用積分が，$\sqrt{-g}$ のような因子を含んでいることだ．$-g$ は正定値なオペレータではないから，その平方根がエルミートだという保証はない．この問題を明快に解決する方法は，四脚場に相当する場 $h_\mu^{\ a}(x)$ を導入することである．接空間のような概念は導入しないので，四脚場の幾何学的解釈は忘れておかなければならない．

$h_\mu^{\ a}(x)$ は 16 個の独立成分を持つ重力の基本場であって，

$$g_{\mu\nu}(x) = \xi_{ab}\, h_\mu^{\ a}(x) h_\nu^{\ b}(x) \tag{8.1}$$

とする．ξ_{ab} は非特異な対称行列である．2 次形式に関するシルベスターの定理により，一般性を失うことなしに，それは対角行列で，その対角要素はすべて $+1$ か -1 のいずれかであるとすることができる．そのとき不変測度は $h = \det h_\mu^{\ a}$ ととれるので，平方根の問題は解消する．ξ_{ab} の対角要素は，原時間が 1 次元であることから，1 個だけが他と符号が異なるものでないと空虚な理論しか構成できないことがいえるので，最終的には $\xi_{ab} = \pm\eta_{ab}$ になる．複号のうちのどちらを選ぶかはたんなるコンベンションなので，プラスのほうをとることにする．$h_\mu^{\ a}$ の導入により独立成分の数が 6 個増えたが，それに相当する局所内部変換に対する不変性を要求すれば，その分に関する BRS 不変性に移行させることができ，補助条件を設定して物理的部分空間から排除できる．

さて，一般座標変換のゲージ固定には，古典論で「調和条件」もしくは「ド・ドンデア条件」と呼ばれる座標条件の式を生むようなものをとると [*30]，並進不変性と一般線形変換 $GL(4)$ 不変性を保ったまま正準量子化が可能である．原時間は x^0, x^1, x^2, x^3 の任意の 1 次関数とするとき，並進不変性と一般線形変換不変性により，一般性を失うことなくそれを x^0 に帰着させることができる．$GL(4)$ はスピン 1/2 の表現を持たないので，ディラック場は時空に関してスカラー場になるが，内部変換に関してスピン 1/2 の表現になる．またゲージ場は $A_\mu = h_\mu^{\ a} A_a$ と書き直すことにより，x^μ の線形変換に関してはスカラー場に置き換えられる．すなわち物質場（重力場とその関連の補助場以外の総称）はすべてスカラー場である．

正準量子化は 3 節で述べたように行う．ただし，5 節で述べたゲージ場の量子化と同じ注意が必要である．すでに量子化が必要であることがわかっているゲージ場と同じテクニックで重力場もきちんと量子化ができることを強調しておきたい．重力場だけまったく物質場と異なる量子化をする理論がいくつか提起されているが，理論はできるだけ整合的であるべきだと思う．正準交換関係から，計算は相当大変であるが，すべての同時刻交換子が見事に閉じた形で得られる．そして 4 次元交換子に対してコーシー問題を設定できる．そこで真空 $|0\rangle$ を導入してその表現を構成することになるが，もちろんこれを閉じた形で解くことは不可能である．

ネーターの定理に従い，並進生成子 P_μ，一般線形変換生成子 $\hat{M}^\mu_{\ \nu}$，内部ローレンツ変換生成子 M^{ab} $(= -M^{ba})$ が存在する．これらの具体的な表式とその時間非依存性，および量子場間の

[*30] ド・ドンデア条件は，ゲージ理論のランダウ・ゲージに対応する最も自然と考えられるゲージ固定である．このとき，時空，B 場，FP ゴースト，反 FP ゴーストによってはられる $(4 \times 4 =)$16 次元超空間での超対称性 $IOSp(8,8)$（8+8 次元非斉次オルソシンプレクティック超代数）が実現する．

同時刻交換関係を使えば，これら生成子間の交換関係およびこれら生成子と量子場間の交換関係をすべて具体的に計算することができる．その結果はもちろん，これらの変換群のリー代数から期待されるものと完全に一致する（つまり正しい表現になっている．）．とくに，重要なのは次の交換関係である：

$$i[P_\mu,\ h^c_\lambda(x)] = \partial_\mu h^c_\lambda(x), \tag{8.2}$$

$$i[\hat{M}^\mu_{\ \nu},\ h^c_\lambda(x)] = x^\mu \partial_\nu h^c_\lambda(x) + \delta^\mu_{\ \lambda} h^c_\nu(x), \tag{8.3}$$

$$i[M^{ab},\ h^c_\lambda(x)] = \eta^{ac} h^b_\lambda(x) - \eta^{bc} h^a_\lambda(x). \tag{8.4}$$

並進不変性は自発的に破れていないとすると，1 時空点の関数オペレータの真空期待値は定数になる．したがって，

$$\langle 0|h^c_\lambda(x)|0\rangle \equiv u^c_\lambda \tag{8.5}$$

と書くと，$\partial_\nu u^c_\lambda = 0$ である．(8.3) と (8.4) の真空期待値をとると，

$$i\langle 0|[\hat{M}^\mu_{\ \nu},\ h^c_\lambda(x)]|0\rangle = \delta^\mu_{\ \lambda} u^c_\nu, \tag{8.6}$$

$$i\langle 0|[M^{ab},\ h^c_\lambda(x)]|0\rangle = \eta^{ac} u^b_\lambda - \eta^{bc} u^a_\lambda \tag{8.7}$$

を得る．行列 u^c_λ は非特異であると仮定する（そうでなければ時空の次元が退化してしまうから）．そのとき (8.5) と (8.6) から，$\hat{M}^\mu_{\ \nu}$ の全成分と M^{ab} の全成分が自発的に破れていることがわかる．

しかしこれらのすべての対称性が破れてしまったわけではない，電弱理論において，$SU(2)$ も $U(1)$ もすべて自発的に破れたが，前者の中の $U(1)$ と後者との特別な組み合わせが電磁対称性 $U(1)$ として破れずに生き残った．それと同様なことが今の場合にも起こっている．すなわち，一般線形変換群 $GL(4)$ の中のローレンツ群と内部ローレンツ群の特別な組み合わせは破れずに生き残っているのである．

以下，時空 x^μ と直接関連しない添え字を $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ で書くことにする．行列 u^α_γ の転置逆行列を $v^\gamma_{\ \beta}$ とする（すなわち $u^\alpha_\gamma v^\gamma_{\ \beta} = \delta^\alpha_{\ \beta}$）．そこで

$$\tilde{M}^{\alpha\beta} \equiv \left(\eta^{\beta\gamma} u^\alpha_\delta v^\epsilon_{\ \gamma} - \eta^{\alpha\gamma} u^\beta_\delta v^\epsilon_{\ \gamma}\right)\hat{M}^\delta_{\ \epsilon} + M^{\alpha\beta} \tag{8.8}$$

とおくと，(8.6)(8.7) により，

$$\langle 0|[\tilde{M}^{\alpha\beta},\ h^c_\lambda(x)]|0\rangle = 0 \tag{8.9}$$

が得られるので，この生成子による対称性は自発的に破れてはいない．じっさい，これが素粒子理論における時空ローレンツ対称性の生成子であることは，物質場との交換関係を計算して確かめることができる．つまり，ディラック場はこの生成子 $\tilde{M}^{\alpha\beta}$ に関して時空的スピン 1/2 場となるのである．このときの物理的時空座標は $\tilde{x}^\alpha \equiv u^\alpha_\beta x^\beta$ によって与えられる．すなわち，物理的時間の方向はここではじめて決まるのである．

一般線形変換の生成子の対称部分は自発的に破れているから，ゴールドストーンの定理により，スピン 2 の NG ボソンが存在しなければならない．これがまさしく重力子（重力波の量子）

にほかならない．このようにして，重力子の質量は正確にゼロでなければならないことが証明される [*31].

9　ダークエネルギーの問題

ダークエネルギーの問題は 21 世紀の大問題といわれる．宇宙は現在膨張はしているが，自己重力によって減速していなければならない．ところが遠方の Ia 型と呼ばれる超新星の観測などから，予期に反して加速膨張していることが明らかとなった．ダークエネルギーの根源に関してはいろいろの仮説が提起されているが，ダークエネルギーの説明だけのために，ほかに何のメリットもないのに基本的な理論変更をするのは，根拠薄弱すぎて賛同できない．現在までのところ，ダークエネルギーはアインシュタイン方程式に非常に小さい宇宙項をつけ加えれば説明できる．したがって，古典論の範囲内の問題と了解してしまえば，話はこれで終りである．

しかし，宇宙項の存在を手で入れるのではなく，量子論的考察から導きたいと考えるのは自然な欲求であろう．というのは，標準理論で自発的対称性の破れが起こっており，またそれを拡張した対称性を持つ大統一理論という仮説を信じるならば，自発的対称性の破れは大きく起こっていなければならないからである．4 節で述べたように，スカラー場 $\phi(x)$ がゼロでない真空期待値をもつとき，すなわち

$$\langle 0|\phi(x)|0\rangle \neq 0 \tag{9.1}$$

であると，作用積分を一般共変化したとき，これに不変測度 $\sqrt{-g(x)}$ がかかり，これから宇宙項が生み出される可能性があるわけだ．しかしこうして導かれる宇宙項は途方もなくでかい（120 桁も大き過ぎる）ので，かえって理論の困難となる．

これは素粒子の世界と重力場を無反省に一緒くたに取り扱ったハイブリッド理論の破綻を示すものととらえるべきであろう．ハイブリッド理論では，重力場だけが量子化されずに古典場のまま作用積分に取り込まれている．この理論が論理的におかしなものであることを示そう [10].

素粒子の場が量子化されている以上，量子論として定式化されなければならない．対称性はネーターの定理に基づいて，生成子間および生成子と場の間の交換関係によって記述される．生成子と場の交換子は場の無限小変換である．逆に言えば，場は，それが対称性の生成子と非可換であることによってはじめて変換できるのである．したがって，古典場である重力場はいかなる対称性変換も受けない．すなわちハイブリッド理論は一般座標変換を対称性として持ちえない．じっさい，重力場は特定の固定されたものであるから，重力場に関する変分を考えるのもナンセンスである．ゆえに，変分原理からアインシュタイン方程式は導けない．したがって，素粒子の作用積分から生み出されるスカラー場の真空期待値が，導出不能のアインシュタイン方程式に寄与することもありえない．

経路積分マニアはよく，量子論的近似計算を済ませてからその結果を機械的に一般座標変換不変な形にすり替えるが，これはどういう根拠に基づくのか不明である．古典場が異なれば量子系

[*31] 重力子の存在およびその質量がゼロであることは，誰しも期待するところではあるが，理論的には決して自明なことではない．

として異なる系である，それらのアンサンブルに対して，なぜ一般相対性原理が成立すべきなのだろうか.

重力場を考慮して量子論的効果を調べるには，やはり量子アインシュタイン重力を出発点にしなければばならない．残念ながら，量子アインシュタイン重力を計算するのは大変な仕事である．前節で述べたように，コーシー問題を解いて表現を求めるのは至難の業で，具体的方法としては，κ での冪級数展開を用いる [*32].

第 0 近似は完全に求められる [2]．もちろんそれは摂動論で勝手に仮定したような特定の時空計量ではない．$g_{\mu\nu}(x)$ の第 0 近似 $g^{(0)}_{\mu\nu}(x)$ $(= \eta_{ab}{h^{(0)}}_\mu{}^a(x){h^{(0)}}_\nu{}^b(x))$ は $g^{(0)}_{\rho\lambda}(y)$ と 4 次元的に可換であるが，他にそれと非可換な量があるので，オペレータである．4 次元可換性から，任意の正則関数 $F(z_{\mu\nu})$ に対し，

$$\langle 0|F(g^{(0)}_{\mu\nu}(x))|0\rangle = F(\langle 0|g^{(0)}_{\mu\nu}(x)|0\rangle) \tag{9.2}$$

が推論できる．これは表現空間 $\mathcal{V}$ が正定値ノルム空間ではないから可能になる式であることを強調しておこう．ヒルベルト空間ではこのように古典量みたいなオペレータは存在できないのである.

時空計量は $\langle 0|g^{(0)}_{\mu\nu}(x)|0\rangle$ によって与えられる．前節でやったように，真空が並進不変であれば，この量は定数行列になる．しかし，特定の問題については，並進が自発的に破れている可能性も考えられる [*33]．その場合は (9.2) を使うと，量子アインシュタイン重力の方程式から真空中の古典アインシュタイン方程式が導かれる.

10　宇宙開闢の問題

観測によれば，宇宙背景輻射は 10^{-5} の精度で 2.7K のプランク分布である．宇宙ははじまりの頃極めて一様等方だった．また宇宙は現在極めて平坦である．平坦で一様等方というのは，素人考えからすると大変自然なことで，問題がなさそうに感じられるのだが，専門家によるとこれがなかなか説明しにくいことであるようだ．一様等方性がそんなに不思議なことならば，なぜビッグバン理論でアインシュタイン方程式を解くとき，いつでも（銀河団スケールより大きいところでは）宇宙は一様等方だと躊躇なく仮定できるのだろうか.

相対論によれば，いかなる作用も光速より速く伝わることはできない．したがって，宇宙が始まってからあまり時間が経っていない時期には因果的に関係がつく範囲は極めて限定される．因果の地平を超えて一様性が実現しているのは理解しがたいというわけだ．この問題をすんなり解決したと称する仮説がインフレーション理論だ．かなり大きな宇宙項らしきものを宇宙のはじめだけ導入すれば，宇宙は指数関数的に膨張して因果の地平はなくなるというわけである．インフレーション理論は，現在標準宇宙論の一部分として取り入れられているようだ.

この宇宙項みたいなものは，インフラトン場と呼ばれるスカラー場 $\varphi(x)$ の真空期待値から

---

*32 摂動論とは異なる．摂動論は $\sqrt{\kappa}$ での冪展開である.

*33 例えば，時空の特異点の存在を並進の自発的破れとしてとらえるというような可能性が考えられるのではないかと思う.

出てくると仮定される．その値にしたがって “宇宙の基底状態” が時間的に変化していくらしいが *34，その場の量子論的意味はよくわからない．場の量子論の真空との関連はどうなっているのだろうか．ともかくインフラトン場は “ニュートンの神” のごとく，宇宙のはじめにだけ現れてその後はほぼ死んでいなければならない．インフラトン場は標準理論の素粒子とは全く相互作用しないもので *35，作用積分においてそれがどのような形で入ってくるのか，理論的に決定する方法はまったくない．結果から逆算して都合の良いものを模索しているのが現状だ．結局，インフラトン場は “インフレーション理論の，インフレーション理論による，インフレーション理論のためのスカラー場” である．

因果の地平の問題は，宇宙開闢から相対論の時空計量が存在する限り，インフレーションのようなことがなければ逃れられないであろう．しかし宇宙開闢時は，古典論的なアインシュタイン重力よりも量子アインシュタイン重力によって支配されると考えるほうが自然ではないだろうか．そうすれば，先験的に時空計量は存在せず，因果律そのものが存在しないと考えるべきであろう．一般線形変換不変性が自発的に破れて，時間と空間の区別ができたとき，宇宙が一様であるのは不思議なことではないであろう [11]．

宇宙が何もないところから突然出現したのであれば，時間の並進不変性は自発的に破れたことになる．このときネーターの定理は表現段階で破れたことになるから，エネルギーの保存則は破れる．したがってエネルギーが無から生じてもおかしくはない．空間の並進不変性のほうは破れる理由がないから，自発的に破れないとするのが自然であろう．このとき空間は平坦になる．また 8 節の末尾の議論を空間 3 次元について考えれば，空間回転不変性が生き残ることがわかる．つまり等方である．

11　おわりに

宇宙を論ずるときに一番困るのは，一体それは法則そのものなのか，歴史としての問題なのか，どうもよくわからないことである．宇宙はすべてを含む対象だから法則からその性質が導かれるべきだと考えられる．他方，それは時間とともに発展してきた一個の対象だから，歴史の偶然が支配するとも考えられる．いわゆるマルチバース説のように宇宙がたくさんあって，われわれはたまたまその一つに住んでいるというような立場をとるならば，統計的な蓋然性で議論すべきことになる．しかし現実にそこに知的生物が住んでいるという条件を課すと，「人間原理」の話になり，科学精神から逸脱してしまう．

宇宙は外部からの観測者がないから，量子論的な意味における観測も不可能である．宇宙開闢の 10 のマイナス何十乗秒というような時間のことを，さも見てきたように記述できると考えるのはいかがなものであろうか．

本論説では，ダークマター，ダークエネルギー，宇宙開闢という大問題に関する私見を述べさ

*34 宇宙の状態がインフラトンのポテンシャル $V(\varphi)$ の上を “転がっていく” のだそうだが，そのさいの量子論的表現空間はどのように定義されるのだろうか．

*35 インフラトン場の量子論的ゆらぎが宇宙膨張の結果，現在の宇宙の構造の種になる古典論的ゆらぎを生んだということだが，どうして相互作用描像における真空の量子論的ゆらぎが古典論的ゆらぎに変身できるのか，筆者には理解できない．

せていただいた．専門家から見れば素人臭い議論であろう．しかし最近専門家と自認する人たちは，観測結果と辻褄合わせをするために，何らの理論的根拠のないものを手で勝手に導入しすぎるように思う．すでに成功を収めた理論との論理的結びつきが明確でない仮説が成功する確率は，非常に小さいのではないだろうか．筆者の立場は，素粒子の標準理論と一般相対論とを最小限に統合する量子アインシュタイン重力の枠組み内で問題を解決しようと試みることである．定量的なつめはまったく行っていないので，もし誰か筆者の見解に賛同してくださる方があれば，ぜひそれをやっていただきたいと希う．

文　献

[1] 宇宙論について手軽なまとめは：http://ja.wikipedia.org/ 「ビッグバン」参照.

[2] N. Nakanishi, *Prog. Theor. Phys.* **111** 301 (2004).

[3] N. Nakanishi, *Mod. Phys. Letters* **A 17** 89 (2002).

[4] N. Nakanishi and I. Ojima, *Prog. Theor. Phys.* **71** 1359 (1984); **72** 1197 (1984).

[5] 中西襄，素粒子論研究 **116** 148 (2008); 素研電子版 **21** No.2 (2016).

[6] フリーマン・ダイソン（柴田裕之訳），**反逆としての科学**（みすず書房，2008), 192-193.

[7] D. N. Page and C. D. Geilker, *Phys. Rev. Letters* **47** 979 (1981).

[8] 中西襄，数理解析研究所講究録 **1524** (2006), 50.

[9] N. Nakanishi, *Intern. J. Mod. Phys.* **A 29** No.6 (2014) [DOI: 10.1142/S0217751X14500341] およびそれの引用文献.

[10] 中西襄，素研電子版 **19** No.1 (2015).

[11] 中西襄，素粒子論研究 **116** 188 (2008).

熱交換器の問題 (1)

世戸 憲治 *

Problem of Heat Exchanger (1)

Kenji SETO*

1　はじめに

前回の「再帰定義された冪乗関数」(「数学・物理通信」8 巻 3 号) を書いているときに，かなり昔のことになるが，一時，再帰定義に凝っていたことがあり，雑誌「数理科学」にこの種の問題の解説を何篇か掲載したことを思い出した．その中の一つ「浴槽の物理学」(「数理科学」’77 年 10 月号,「別冊・数理科学」’84 年 4 月号) は，いま読み返してみても大変面白い問題なので，今回は，この内容をできるだけ分かりやすく，改めて新しく書き直したものを載せることにする．

この問題は,「図 1 に示すように，100 ℃の水 A と 0 ℃の水 B が同量ずつ存在する．これら 2 つの水を混ぜることなく，接触という手段で 100 ℃の水 A が持つ熱を 0 ℃の水 B に移動させるとき，初めの 0 ℃の水 B の温度を何度まで上げることができるか」という問題である．

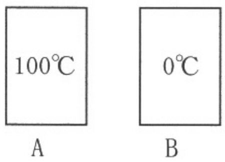

図 1

ただし，これら 2 つの水は外界とは孤立していて外部との熱の出入りはないものとする．これはいわゆる熱交換器の効率を求める問題であるが，理論的には，一般に予測される効率に反して，非常に良いことが証明される．もちろん，これら 2 つの水をそのまま接触させてしまうと，両方が 50 ℃になってそれ以上に熱が移動することはなくなってしまう．しかし，次ページの図 2 に示すように，これら 2 個の水を，それぞれに仕切りを入れて 2 等分にしておき，それらを，A_1, A_2, および，B_1, B_2 とする (1)．まず，A_1 と B_1 を接触させると，それらは両方とも 50 ℃となり (2)，つぎに，A_1 と B_2 を接触させて，25 ℃とし (3)，つぎに，A_2 と B_1 を接触させて 75 ℃とし (4)，最後に，A_2 と B_2 を接触させると 50 ℃となる (5)．ここで，これら 2 つの水の仕切りをはずすと，A の方は，$(25 + 50)/2 = 37.5$ ℃となり，B の方は $(75 + 50)/2 = 62.5$ ℃となる (6)．かくて，A は 50 ℃より低くなり，B の方は 50 ℃より高くなる．この調子で，分割数を多くしていくと，もっと B の温度を上げることができると期待される．その計算をこれから展開していこう．

* 北海学園大学名誉教授　　　　　　　　　E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

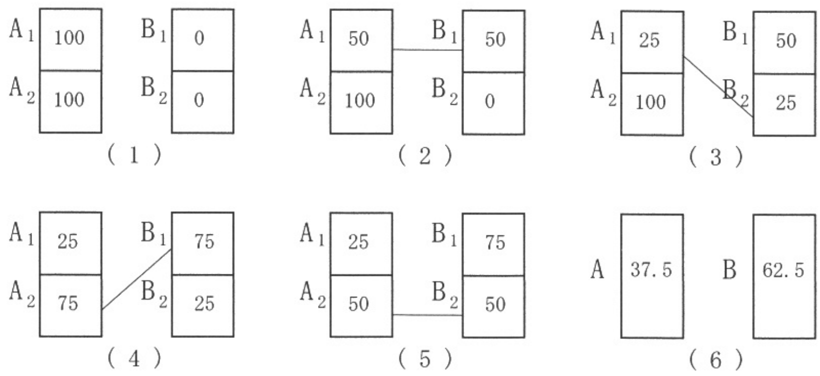

図 2

2　多分割法による計算

2.1　手始めに

ここでは，A の方はまったく仕切らずに，B の方だけを N 等分した場合を考えてみる．B の分割されたものを，それぞれ，$\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \cdots, \mathrm{B}_N$ とする．接触の仕方は，A と B_1, A と B_2, A と $\mathrm{B}_3, \cdots$, A と B_N の順とする．初めの A の温度を $T_0 = 100$ ℃, B の方は 0 ℃とする．いま，A と B_{n-1} までの接触が済んだものとし，このときの A と B_{n-1} の温度を T_{n-1} とする．つぎに，A と B_n との接触をし，これらの温度が T_n になったとする．このとき，A の方の温度は T_{n-1} から T_n へ下がり，B_n の方は 0 ℃から T_n へ上がる．このとき，A の減少した熱量と B_n が獲得した熱量が等しいとおくと，B_n の熱容量が A の $1/N$ であることを考慮して，

$$T_{n-1} - T_n = \frac{1}{N} T_n, \qquad \text{つまり，} \quad T_n = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{-1} T_{n-1} \tag{2.1}$$

となる．この漸化式から，T_n は等比数列となる．すべての接触が終わったときの A の温度 T_N は

$$T_N = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{-N} T_0 \tag{2.2}$$

と求められる．この T_N は N について減少関数であり，$N \to \infty$ の極限では，小数点以下 3 桁の精度で，

$$\lim_{N\to\infty} T_N = e^{-1} T_0 = 36.787\,℃ \tag{2.3}$$

となる．一方，B の仕切りをはずしたときの温度は T_1, T_2, $\cdots, T_N$ を平均したものとなるが，そうするまでもなく，熱エネルギーの保存，および，A, B の水の量が同量であることから，A の下がった温度が B の上がった温度になるはずである．したがって，$N \to \infty$ での B の最終温度は，$100\,℃ - 36.787\,℃ = 63.212\,℃$ となる．この温度は「はじめに」のところで述べた A, B ともに 2 等分したときの B の最終温度 62.5 ℃とそれほどの違いはない．これは，A をまったく仕切らなかったせいであろう．

2.2　A, B ともに仕切った場合

ここでは，A を M 等分，B を N 等分した場合を考える．途中の温度変化を理解しやすくするには，図 3 のように，B の方を横倒しにしておくのがよいだろう．A を仕切ったものを $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_M$ とし，B を仕

切ったものを B$_1$, B$_2$, $\cdots$, B$_N$ とする．計算の都合上，これら仕切られたものの初めの温度を，A について，$T_{1,0}$, $T_{2,0}$, $\cdots$, $T_{M,0}$ とし，B については，$T_{0,1}$, $T_{0,2}$, $\cdots$, $T_{0,N}$ とする．ここでの問題に即していえば，

$$T_{1,0} = T_{2,0} = \cdots = T_{M,0} = T_0 (= 100\,℃), \qquad T_{0,1} = T_{0,2} = \cdots = T_{0,N} = 0\,℃ \tag{2.4}$$

である．余計なことを言えば，一般にはこれらの値が区分毎に異なる値で与えられた場合でも解くことは可能である．しかし，ここではあまりに問題を煩雑化するようなことは避けてこの条件に従って解くことにしよう．

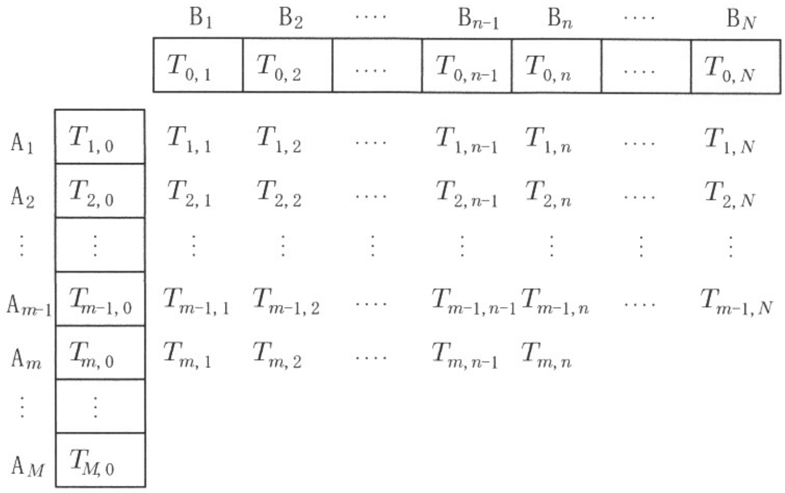

図 3

接触の仕方は，A$_1$ と B$_1$, A$_1$ と B$_2$, $\cdots$ A$_1$ と B$_N$, つぎに，A$_2$ と B$_1$, A$_2$ と B$_2$, $\cdots$ A$_2$ と B$_N$, と進み，最後に A$_M$ と B$_N$ が接触するまで続ける総当たり方式である．図 3 に示すように，A$_1$ と B$_1$ を接触させそれらが熱平衡に達したときの温度を $T_{1,1}$, つぎに，A$_1$ と B$_2$ を接触させたときの温度を $T_{1,2}$ のように記すことにし，以下，同様とする．この方法で，すべての接触が完了したときの A$_1$, A$_2$, $\cdots$, A$_M$ の温度は，$T_{1,N}$, $T_{2,N}$, $\cdots$, $T_{M,N}$ となり，B$_1$, B$_2$, $\cdots$, B$_N$ の温度は $T_{M,1}$, $T_{M,2}$, $\cdots$, $T_{M,N}$ となる．

いま，A$_m$ と B$_{n-1}$ までの接触が済んだものとし，つぎに，A$_m$ と B$_n$ との接触を考えると，A$_m$ の温度は $T_{m,n-1}$ から $T_{m,n}$ に下がり，B$_n$ の方は $T_{m-1,n}$ から $T_{m,n}$ に上がることになる．この間に，A$_m$ が失った熱量と B$_n$ が得た熱量を等しいとすると，A$_m$, B$_n$ の熱容量が，それぞれ，$1/M$, $1/N$ であることに注意して，

$$\frac{1}{M}\left(T_{m,n-1} - T_{m,n}\right) = \frac{1}{N}\left(T_{m,n} - T_{m-1,n}\right) \tag{2.5}$$

という 2 変数の漸化式を得る．以下，この方程式を境界条件 (2.4) 式の基に解くことになるが，計算はかなり面倒になることを覚悟しなければならない．初めに，この式を

$$T_{m,n} = \alpha T_{m-1,n} + \beta T_{m,n-1}, \qquad \alpha = \frac{M}{M+N}, \quad \beta = \frac{N}{M+N}, \quad \alpha + \beta = 1 \tag{2.6}$$

と変形しておく．ここに，α, β はこの第 2，第 3 式で定義する．この方程式を解くにあたって，初めは，添え字 n を固定しておき，添え字 m について遂次代入法を用いて解く：つまり，この式で m 番号を 1 下げた式を作っておき，それをこの式右辺の第 1 項に代入し，

$$T_{m,n} = \alpha^2 T_{m-2,n} + \alpha\beta T_{m-1,n-1} + \beta T_{m,n-1} \tag{2.7}$$

となり，さらに (2.6) 式の m 番号を 2 下げたものを作って代入すると，

$$T_{m,n} = \alpha^3 T_{m-3,n} + \beta \sum_{r=1}^{3} \alpha^{r-1} T_{m-r+1,n-1} \tag{2.8}$$

となる．この操作を $m-1$ 回くり返すと，

$$T_{m,n} = \alpha^m T_{0,n} + \beta \sum_{r=1}^{m} \alpha^{r-1} T_{m-r+1,n-1} \tag{2.9}$$

となるが，境界条件 (2.4) 式によって，$T_{0,n} = 0$ なので，右辺の 1 項目は消去されて，

$$T_{m,n} = \beta \sum_{r=1}^{m} \alpha^{r-1} T_{m-r+1,n-1} \tag{2.10}$$

が得られる．つぎに，この式から n 番号について，遂次代入法を用いて解いていく：すなわち，この式で n 番号を 1 下げたものを作っておき，それをこの式の右辺に代入すると，

$$T_{m,n} = \beta^2 \sum_{r=1}^{m} \sum_{r'=1}^{m-r+1} \alpha^{r+r'-2} T_{m-r-r'+2,n-2} = \beta^2 \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{k} \alpha^{k-1} T_{m-k+1,n-2} \tag{2.11}$$

となる．この最右辺の式は，$r \to l$, $r + r' - 1 \to k$ とおき直したものである．和をとる部分には l 依存性はないので，この l に関する和は k となり，改めて k を r と書き直すと，

$$T_{m,n} = \beta^2 \sum_{r=1}^{m} r \alpha^{r-1} T_{m-r+1,n-2} \tag{2.12}$$

となる．さらに，(2.10) 式で n 番号を 2 下げたものを作っておき，それをこの式に代入すると，

$$T_{m,n} = \beta^3 \sum_{r=1}^{m} \sum_{r'=1}^{m-r+1} r \alpha^{r+r'-2} T_{m-r-r'+2,n-3} = \beta^3 \sum_{k=1}^{m} \Big(\sum_{l=1}^{k} l \Big) \alpha^{k-1} T_{m-k+1,n-3} \tag{2.13}$$

となる．この最右辺の式は前と同じく，$r \to l$, $r + r' - 1 \to k$ とおき直したものである．この l の和の部分は $k(k+1)/2$ となるので，改めて k を r と記すと，

$$T_{m,n} = \beta^3 \sum_{r=1}^{m} \frac{r(r+1)}{2} \alpha^{r-1} T_{m-r+1,n-3} \tag{2.14}$$

となり，さらに，同じことをくり返すと，

$$T_{m,n} = \beta^4 \sum_{r=1}^{m} \sum_{r'=1}^{m-r+1} \frac{r(r+1)}{2} \alpha^{r+r'-2} T_{m-r-r'+2,n-4} = \beta^4 \sum_{k=1}^{m} \Big(\sum_{l=1}^{k} \frac{l(l+1)}{2} \Big) \alpha^{k-1} T_{m-k+1,n-4} \tag{2.15}$$

となる．この l の和の部分は，$k(k+1)(k+2)/6$ となるので，k を r とおき直して，

$$T_{m,n} = \beta^4 \sum_{r=1}^{m} \frac{r(r+1)(r+2)}{6} \alpha^{r-1} T_{m-r+1,n-4} = \beta^4 \sum_{r=1}^{m} \frac{(r+2)!}{3!(r-1)!} \alpha^{r-1} T_{m-r+1,n-4} \tag{2.16}$$

となる．ここまでくると一般形が見えてくるので，つぎは，

$$T_{m,n} = \beta^5 \sum_{r=1}^{m} \frac{(r+3)!}{4!(r-1)!} \alpha^{r-1} T_{m-r+1,n-5} \tag{2.17}$$

となるであろう．この操作を一般に $p-1$ 回くり返したときは，

$$T_{m,n}=\beta^p\sum_{r=1}^{m}\frac{(r+p-2)!}{(p-1)!(r-1)!}\alpha^{r-1}T_{m-r+1,n-p} \tag{2.18}$$

となることが予測できる．これが正しいことは，和公式 *[1]

$$\sum_{r'=1}^{r}\frac{(r'+p-2)!}{(p-1)!(r'-1)!}=\frac{(r+p-1)!}{p!(r-1)!} \tag{2.19}$$

を用い数学的帰納法で証明されるが，ここまでくるとほとんど自明であろう．

この (2.18) 式で $p=n$ としたときは，境界条件 (2.4) 式より $T_{m-r+1,0}=T_0$ なので，

$$T_{m,n}=\beta^n\Big[\sum_{r=1}^{m}\frac{(r+n-2)!}{(n-1)!(r-1)!}\alpha^{r-1}\Big]T_0 \tag{2.20}$$

という結果が得られる．まだ，和が残っているが，この和をとることは一般には難しいようである *[2]．

前述したように，すべての接触が完了したときの $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_M$ の温度は，$T_{1,N}$，$T_{2,N}$，$\cdots$，$T_{M,N}$ となるので，仕切りをはずしたときの最終的な A の温度はそれらの平均値となる．これを $A_{M,N}$ と記すことにすると，

$$A_{M,N}=\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}T_{m,N}=\frac{\beta^N T_0}{M}\sum_{m=1}^{M}\sum_{r=1}^{m}\frac{(r+N-2)!}{(N-1)!(r-1)!}\alpha^{r-1} \tag{2.21}$$

となる．この r と m に関する和は，和の順序を入れ替えると，

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{r=1}^{m}=\sum_{r=1}^{M}\sum_{m=r}^{M} \tag{2.22}$$

となるが，和をとる部分に m 依存性がないので，m の和は簡単にとることができ，

$$A_{M,N}=\frac{\beta^N T_0}{M}\sum_{r=1}^{M}\frac{(M-r+1)(r+N-2)!}{(N-1)!(r-1)!}\alpha^{r-1} \tag{2.23}$$

となる．これ以上，r の和をとることは難しいので，ここで，M の値は一定値に固定しておき，N の方を無限大とする極限をとることにする．このとき，

$$\beta^N=\Big(\frac{N}{M+N}\Big)^N\xrightarrow{N\to\infty}e^{-M} \tag{2.24}$$

$$\frac{(r+N-2)!}{(N-1)!}\alpha^{r-1}=(r+N-2)(r+N-3)\cdots(N)\Big(\frac{M}{M+N}\Big)^{r-1}\xrightarrow{N\to\infty}M^{r-1} \tag{2.25}$$

となるので，(2.23) 式は $N\to\infty$ の極限で，

$$A_{M,\infty}=\frac{e^{-M}T_0}{M}\sum_{r=1}^{M}\frac{(M-r+1)M^{r-1}}{(r-1)!} \tag{2.26}$$

---

*[1] 「数学公式 II」岩波全書 p.5, 下から 3 番目の公式．この式を二項係数を用いて書くと，$\sum_{r'=1}^{r}\ {}_{r'+p-2}C_{p-1}={}_{r+p-1}C_p$ となるが，この式はこの公式集には載っていない．

*[2] $M=N$ の場合に限って和をとることは可能である．喜安善一「数理科学」'78 年 4 月号参照

となる．この r の和は簡単にとることができ，

$$\sum_{r=1}^{M}\frac{(M-r+1)M^{r-1}}{(r-1)!}=\sum_{r=1}^{M}\frac{M^r-(r-1)M^{r-1}}{(r-1)!}=\sum_{r=1}^{M}\frac{M^r}{(r-1)!}-\sum_{r=2}^{M}\frac{M^{r-1}}{(r-2)!}=\frac{M^M}{(M-1)!} \tag{2.27}$$

となるので，$A_{M,\infty}$ は

$$A_{M,\infty}=\frac{e^{-M}M^{M-1}}{(M-1)!}T_0 \tag{2.28}$$

となる．

ここまでは，A の最終温度について考察してきた．B の最終温度は，$T_{M,1}$，$T_{M,2}$，$\cdots$，$T_{M,N}$ の平均として求まるが，前にも述べたように，熱エネルギーの保存から，A の下がった温度としても求められるので，B の最終温度を $B_{M,N}$ とすると，

$$B_{M,N}=T_0-A_{M,N} \tag{2.29}$$

となる．特に，$N\to\infty$ とした場合は，(2.28) 式から，

$$B_{M,\infty}=\Bigl(1-\frac{e^{-M}M^{M-1}}{(M-1)!}\Bigr)T_0 \tag{2.30}$$

である．ここで，$M=1,\ 2,\ 3,\ 4$ としたときの具体的数値を，小数点以下 3 桁まで求めてみると

$$\begin{aligned}B_{1,\infty}&=(1-e^{-1})T_0=63.212\,℃,\qquad B_{2,\infty}=(1-2e^{-2})T_0=72.932\,℃,\\ B_{3,\infty}&=\Bigl(1-\frac{9}{2}e^{-3}\Bigr)T_0=77.595\,℃,\qquad B_{4,\infty}=\Bigl(1-\frac{32}{3}e^{-4}\Bigr)T_0=80.463\,℃\end{aligned} \tag{2.31}$$

と B の最終温度は A の分割数 M が増えるにしたがって増加していくことがわかる．この値はどこまで増加していくのだろうか．階乗に関する Stirling の公式を使えば，M が十分大きなときの漸近式は，

$$(M-1)!\sim M^Me^{-M}\sqrt{\frac{2\pi}{M}} \tag{2.32}$$

となるので，(2.30) 式は

$$B_{M,\infty}\sim\Bigl(1-\frac{1}{\sqrt{2\pi M}}\Bigr)T_0 \tag{2.33}$$

となる．これから，$M\to\infty$ としたとき，括弧中の 2 項目がゼロとなるので，

$$B_{\infty,\infty}=T_0 \tag{2.34}$$

となって，B の最終温度は A の初めの温度と同じ，つまり，A と B とで，完全に温度の逆転が起こるという驚くべき結果となる．

3　水 A，水 B の質量が異なる場合

ここでは，水 A，水 B の質量が異なる場合への拡張を試みる．A, B の質量を，それぞれ，M_A，M_B とすると，(2.5) 式は，

$$\frac{M_A}{M}\bigl(T_{m,n-1}-T_{m,n}\bigr)=\frac{M_B}{N}\bigl(T_{m,n}-T_{m-1,n}\bigr) \tag{3.1}$$

と修正される．これを変形すると，(2.6) 式に替わって，

$$T_{m,n} = \alpha T_{m-1,n} + \beta T_{m,n-1}, \qquad \alpha = \frac{\lambda M}{\lambda M + N}, \quad \beta = \frac{N}{\lambda M + N}, \quad \lambda = \frac{M_B}{M_A} \tag{3.2}$$

となり，α, β の定義が変わる．ここに，λ は，B の A に対する質量比である．α, β の定義が変わっても前節の (2.23) 式までは，その中身には抵触していないので，そのまま使える．(2.24) (2.25) 式からは，

$$\beta^N = \Big(\frac{N}{\lambda M + N}\Big)^N \xrightarrow{N\to\infty} e^{-\lambda M} \tag{3.3}$$

$$\frac{(r+N-2)!}{(N-1)!}\alpha^{r-1} = (r+N-2)(r+N-3)\cdots(N)\Big(\frac{\lambda M}{\lambda M + N}\Big)^{r-1} \xrightarrow{N\to\infty} (\lambda M)^{r-1} \tag{3.4}$$

と変更され，これにともない　(2.26) 式は，

$$A_{M,\infty} = \frac{e^{-\lambda M}T_0}{M}\sum_{r=1}^{M}\frac{(M-r+1)(\lambda M)^{r-1}}{(r-1)!} \tag{3.5}$$

となる．前節では $\lambda = 1$ だったので，この r の和は簡単に実行できたが，ここではこの和をとることは難しい．そこで，この $A_{M,\infty}$ を λ で 1 階微分すると，

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}A_{M,\infty} = -e^{-\lambda M}T_0\sum_{r=1}^{M}\frac{(\lambda M)^{r-1}}{(r-1)!} \tag{3.6}$$

となり，もう 1 度微分すると，

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}A_{M,\infty} = Me^{-\lambda M}\frac{(\lambda M)^{M-1}}{(M-1)!}T_0 \tag{3.7}$$

となって和がない形になる．ここで，M が十分に大きいときの漸近形を得るために，(2.32) の Stirling の公式を用いると，

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}A_{M,\infty} \sim \frac{T_0}{\lambda\sqrt{2\pi}}\big(\lambda e^{1-\lambda}\big)^M\sqrt{M} \tag{3.8}$$

となる．ここで，括弧の中身が $\lambda e^{1-\lambda} \le 1$, 等号が成立するのは $\lambda = 1$ のときのみ，となることに注意すると，この式右辺は，$M \to \infty$ の極限で

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}A_{\infty,\infty} = \begin{cases} 0, & 0 \le \lambda < 1 \\ \infty, & \lambda = 1 \\ 0, & \lambda > 1 \end{cases} \tag{3.9}$$

となる．これから，2 階微分がゼロとなる $0 \le \lambda < 1$,　$1 < \lambda$, それぞれの領域で，$A_{\infty,\infty}$ は，λ の 1 次式，すなわち，直線となる．明らかに，$\lambda = 0$ のときは $A_{\infty,\infty} = T_0$，$\lambda = 1$ のときは前節から $A_{\infty,\infty} = 0$　となる．また，すべての λ について，(3.5) 式から $A_{M,\infty} > 0$, (3.6) 式から $(\partial/\partial\lambda)A_{M,\infty} < 0$ となるので，　$\lambda = 1$ で $A_{\infty,\infty} = 0$ となることは，$\lambda > 1$ に対しても $A_{\infty,\infty} = 0$ となることを意味する．この結果をまとめると，$A_{\infty,\infty}$ は λ の関数として，

$$A_{\infty,\infty} = \begin{cases} (1-\lambda)T_0, & 0 \le \lambda < 1 \\ 0, & 1 \le \lambda \end{cases} \tag{3.10}$$

となる．これは，$\lambda = 1$ のところで折れ曲がった直線である．また，結果論ではあるが，(3.9) 式で与えた $A_{\infty,\infty}$ の λ での 2 階微分は，

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}A_{\infty,\infty} = T_0\delta(\lambda - 1) \tag{3.11}$$

と Dirac のデルタ関数で書けるものである．

A 槽の温度が，T_0 から $A_{\infty,\infty}$ になったことは，その差，$T_0 - A_{\infty,\infty}$ だけの温度が下がったので，その分の熱エネルギー $M_A(T_0 - A_{\infty,\infty})$ が B 槽に移ったことになる．その結果，B の方は 0 から $M_A(T_0 - A_{\infty,\infty})/M_B$ へと温度が上がることになる．これが B の最終温度 $B_{\infty,\infty}$ である．すなわち，

$$B_{\infty,\infty} = \frac{1}{\lambda}(T_0 - A_{\infty,\infty}) \tag{3.12}$$

あるいは，より具体的に，

$$B_{\infty,\infty} = \begin{cases} T_0, & 0 \le \lambda < 1 \\ T_0/\lambda, & 1 \le \lambda \end{cases} \tag{3.13}$$

という結果が得られる．

4　おわりに

この温度の逆転が起こるというのは，最も理想的に考えた場合であって，実際の熱交換器ではそうはいかないだろう．第 1 に，無限に小さく仕切りを入れるなどということはできないし，第 2 に，完全な熱平衡に達するには無限の時間が必要である．現実的な熱交換器の効率がどの程度なのかは，使う器具によって異なるであろう．私がこの問題を思い付いたのは，昔，お風呂に入るときに簡易式のシャワーを使っていたことである．このシャワーは，パイプに通した水をお風呂の湯の中をくぐらせ，シャワーに使う水の温度を上げるという方式のもので，うまくお風呂の湯をかき混ぜながら使うと，お風呂の方は入れないほど温度が下がってしまうのに，シャワーの方はまだ使用に耐えるということを何度か経験した．初めは，シャワーの温度がお風呂の温度以上に上がることはあり得ないと思っていたので，このことが不思議になり，それ以来，熱交換器に興味を持つようになった．現実の熱交換器は図 4 に示すように，高温槽 A と低温槽 B が接するところは，細いパイプ状になっていて，そこでこれら 2 つの水が互いに逆方向に流れるようになっている．この逆方向というのがミソで，もしこれを同じ方向に流してしまうと両方とも元の A と B の平均温度になってしまい，それ以上に B の温度が上がることはなくなってしまう．

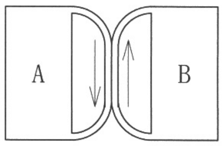

図 4

今回，何十年も前にやった計算を再チェックしてみたが，以前に書いたものは途中の計算をかなり省略した形で書かれていたため，それを解き明かすのに大変な苦労をしてしまった．これは，私の計算力が歳とともに落ちてきたためだろうかと悩んでしまった．

初めにこの問題を始めたときは，A と B で完全に温度が逆転するとは思いもしなかったので，どこかで限界が存在し，あわよくば，新しい自然定数が発見できるのではと考えていた．しかし結果はここに書いたとおりで，そんなものは存在せずに終わりとなってしまった．

この温度の逆転が起こるということは確かに驚くべき結果ではあるが，この結論に達するまでには，あまりに面倒な計算が必要である．これをもっと簡単に証明する方法はないものだろうかと考え，この問題を「数理科

学」に発表するときに，当時，京都大学数理解析研究所におられた中西襄先生にお話ししたところ，先生から，この温度の逆転現象のより簡潔な証明方法を考えていただいた．この中西先生による解法は次回に紹介することにする．

[謝辞]

今回も，京都大学名誉教授の中西襄先生にこの原稿を見ていただき，たくさんのコメントをいただきました．特に，第 3 節の「水 A，水 B の質量が異なる場合」の解法に関しては，その大部分が先生からご教示いただいたものです．先生に心から感謝いたします．

編集後記

8巻4号を発行する．編集後記を共同編集者の新関さんにお願いをしていたのだが，体のことで通院されていてあまり時間がとれないということで矢野が代わりに書くことになった．一時的な措置なので，定常状態になれば，また新関さんに編集後記を書いていただくつもりである．

今回は中西先生の論文が長かったので，他には世戸さんの論文しか載せられなかった．しかし，長い論文はいけないということはないし，この論文は中西先生の思索が凝縮されたいい論文である．

最近，週に1回通っている，ドイツ語のクラスで「数学・物理通信」のことを話したら,「君のやっていることはドイツ語での Zeitschrift（雑誌）の herausgeben（発行）であり，君は Verlag（出版社）だよ」といわれたので，急に自分がドイツの有名な出版社 Springer-Verlag と同様に思われて来て，私たちのやっていることを誇らしくなった.

まあ，半ば冗談で言われたものですが.

（矢野　忠）