数学・物理通信

8巻5号　　2018年6月

編集　新関章三・矢野　忠

2018 年 6 月 7 日

目次(Contents)

1. 熱交換器の問題 (2)

世戸 憲治 2

2. 直交座標系から極座標系へ

矢野　忠 7

3. ラプラス演算子の極座標表示再考 2

矢野　忠 16

4. 不思議な数式 2

山崎和夫 28

5. 編集後記

矢野　忠 31

1. Problem of Heat Exchanger (2)

Kenji SETO 2

2. From Cartesian Coordinates to Polar Coordinates

Tadashi YANO 7

3. The Laplacian in Polar Coordinates Revisited 2

Tadashi YANO 16

4. Strange Number Orders 2

Kazuo YAMAZAKI 28

5. Editorial Comments

Tadashi YANO 31

熱交換器の問題 (2)

世戸 憲治 *

Problem of Heat Exchanger (2)

Kenji Seto*

1　はじめに

前回の「熱交換器の問題 (1)」(「数学・物理通信」8 巻 4 号) では，同量の高温槽と低温槽とで熱交換をさせたとき，完全な温度の逆転が起こることを証明した．ここでは，前回予告したように，この問題を中西襄先生が提案した解法で述べることにする [*1]．この方法は，臨界現象のくりこみ群の考え方を応用したもので，前回述べた両槽ともに 2 分割する方法を多段階方式で実行する方法である．前回のものは，結論に達するまでに長い計算を要するが，今回のものは比較的簡単な計算で済むという利点がある．また，ここでは，これら二槽の質量が異なる場合にも拡張してみる．

2　中西方式による解法

ここで扱う問題は前回と同じで，「同量の 100 ℃の水 A と 0 ℃の水 B があり，これらの水を混ぜることなく，接触という手段で，A の水が持つ熱を B の方へ移すとき，B の水の温度を何度まで上げることができるか」という問題である．ここでは，これまで使ってきた 100 ℃という温度を温度の基本単位にとることで，以下ではこれを 1 と記すことにする．前回の 2 分割方式をまとめると，図 1 のように，A の水の温度は 1 から 3/8 となり，B の温度は 0 から 5/8 となる．

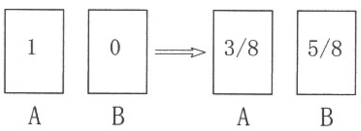

図 1

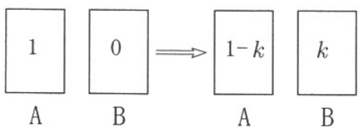

図 2

ここで図 2 に示すように，この操作を一般化して考え，初め温度が 1, 0 であった A, B の水にある操作をした結果，その温度が $1-k$, k になるものとする．これを 2 分割方式に応用し，各分割されたもの同士にこの操作を適用していくと，次ページ図 3 のようになる．この図の第 1 段階では，1 と 0 間の操作なので，図 2 と同

* 北海学園大学名誉教授　　E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

*1 「浴槽の物理学」(「数理科学」’77 年 10 月号,「別冊・数理科学」’84 年 4 月号)

じ，第 2 段階では，$1-k$ と 0 間の操作なので，$1-k$ に，$1-k$ および k が付いて，$(1-k)^2$ および $k(1-k)$ となる．第 3 段階では，1 と k 間の操作なので，いったん，両者から k を引いて，$1-k$ と 0 としてから，第 2 段階のときと同じ操作で，$(1-k)^2$ と $k(1-k)$ となり，初めに差し引いてあった k を加えて，$(1-k)^2+k$ および $k(1-k)+k$ となる．第 4 段階についてはもう説明するまでもないであろう．

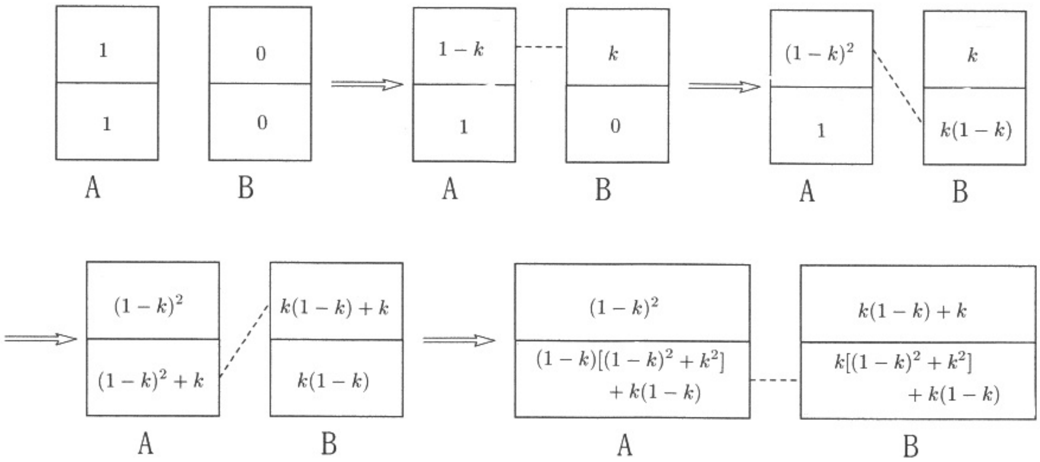

図 3

この図を初めに見るときは，4 個ある各点線の部分を単に接触させるものとして見ていく．このときの k は $k_0=1/2$ である．すべての接触が終わった時点で，A, B の仕切りをはずしたときの温度を，それぞれ，$A(k)$, $B(k)$ とすると，

$$\begin{aligned} A(k) =& \frac{1}{2}\Big[(1-k)^2+(1-k)[(1-k)^2+k^2]+k(1-k)\Big]=(1-k)(1-k+k^2) \\ B(k) =& \frac{1}{2}\Big[k(1-k)+k+k[(1-k)^2+k^2]+k(1-k)\Big]=k(2-2k+k^2) \end{aligned} \tag{2.1}$$

となる．この式で $k=k_0$ のときは，$A(k_0)=3/8$, $B(k_0)=5/8$ となるが，この $B(k_0)$ の方を $k_1=B(k_0)$ とおく．(2.1) 式から一般の k に対し，

$$A(k)+B(k)=1 \tag{2.2}$$

が成り立つが，これは熱エネルギー保存則に対応する．これから，$A(k_0)$ は $1-k_1$ となる．

もう一度この図 3 を見て，こんどは，k を k_1 として，つまり，各点線の部分を 1 回目に見たすべての操作を含むものとして見ていく．そして，最後の操作が終わった時点で仕切りをはずすと，A, B それぞれの温度は，$A(k_1)=147/512$, $B(k_1)=365/512$ となる．前と同様に，$k_2=B(k_1)$ とおく．以下同様にしてこの操作を n 回くり返すと，

$$k_n=B(k_{n-1}), \qquad k_0=1/2 \tag{2.3}$$

なる漸化式を得る．次ページ図 4 に，この $y=B(k)$ のグラフを示す．このグラフは原点をとおり，$k=1$ のところで，直線 $y=k$ に接している．図中の赤線で示したように，初め $k=k_0$ から始め，この曲線にぶつかったところが k_1 で，そこから横線を引き，直線 $y=k$ にぶつかったところから縦線を引いて再びこの曲線にぶつか

るところが k_2 である．以下同様にこの操作を n 回くり返すと，k_n が求まる．この図からこの操作をくり返していくと k の値は 1 に収束していくことは明らかであろう．つまり，k_n は $n \to \infty$ で 1 となる．(2.2) 式からそのときの A の温度は $A(k_n) = 1 - B(k_n) \to 0$ となって A と B で温度の逆転が起こる．

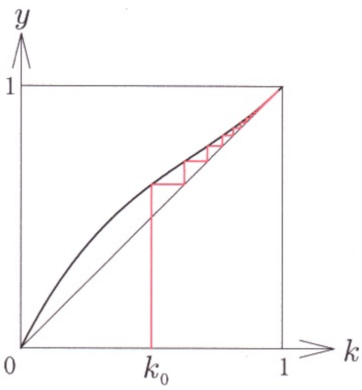

図 4　$y = B(k)$ のグラフ

3　水 A と水 B の質量が異なる場合

ここでは，この問題を拡張して，水 A，水 B の質量が異なる場合について述べる．A, B の質量を，それぞれ，M_A，M_B とする．いま，これら A, B にある操作をした結果，B の温度が 0 から，k になったとする．このとき，A から B に移った熱量は，$M_B k$ なので，A の温度は 1 から $M_B k / M_A$ 下がって $1 - M_B k / M_A$ となる．以下，数式簡略化のため，ここでの質量比を

$$\lambda = \frac{M_B}{M_A} \tag{3.1}$$

とおくことにする．これを用いてもう一度言い直すと，図 5 に示すように，A は 1 から $1 - \lambda k$ に，B は 0 から k となる．

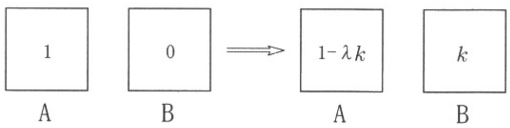

図 5

前節と同様に，この操作を 2 分割方式に応用し，各分割されたもの同士に適用していくと，次ページ図 6 のようになる．この図を初めに見るときは，各点線部分を単に接触させるものとして見ていく．このときは，$1 - \lambda k$ と k が同温になるので，k を，$k_0 = 1/(1+\lambda)$ とする．すべての接触が終わった時点で，各槽の仕切りをはずしたときの A, B 槽の温度を，それぞれ，$A_\lambda(k)$，$B_\lambda(k)$ とすると，

$$\begin{aligned} A_\lambda(k) &= \frac{1}{2}\Big[(1-\lambda k)^2 + (1-\lambda k)\big[(1-\lambda k)(1-k) + +\lambda k^2\big] + k(1-\lambda k)\Big] = (1-\lambda k)(1-\lambda k + \lambda k^2) \\ B_\lambda(k) &= \frac{1}{2}\Big[k(1-k) + k + k\big[(1-\lambda k)(1-k) + \lambda k^2\big] + k(1-\lambda k)\Big] = k(2 - k - \lambda k + \lambda k^2) \end{aligned} \tag{3.2}$$

となる．特に，$k = k_0$ のときの A, B 槽の温度は，

$$A_\lambda(k_0) = \frac{1+2\lambda}{(1+\lambda)^3}, \qquad B_\lambda(k_0) = \frac{1+3\lambda+\lambda^2}{(1+\lambda)^3} \tag{3.3}$$

となる．このときの B 槽の温度を $k_1 = B_\lambda(k_0)$ と定義する．この場合の熱エネルギー保存の式は，一般の k に対し，

$$A_\lambda(k) + \lambda B_\lambda(k) = 1 \tag{3.4}$$

となる．

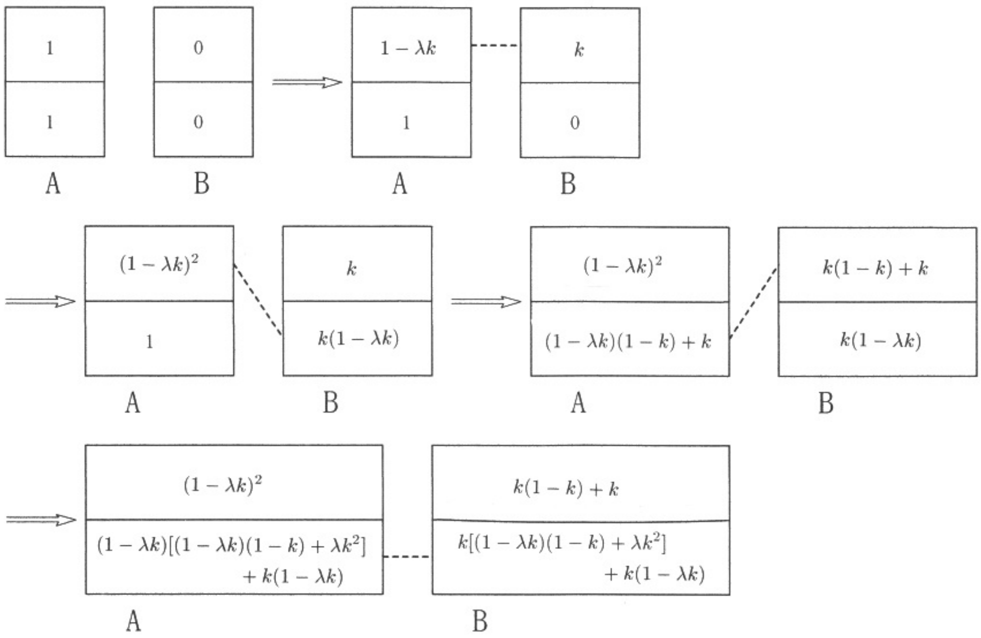

図 6

あとは，前節のときと同じように，この図をもう一度，$k = k_1$ として，つまり，この点線部分を 1 回目に見たときのすべての操作をまとめたものとして見ていく．ということを n 回くり返すと，漸化式，

$$k_n = B_\lambda(k_{n-1}), \qquad k_0 = 1/(1+\lambda) \tag{3.5}$$

を得る．この式を出発値 k_0 から始めて順次 k_1, k_2, $\cdots$ を求めていくと，次第にその値は大きくなるが，その間隔は狭まり，ある値に収束する．その収束値を κ とすると，それは方程式

$$\kappa = B_\lambda(\kappa), \qquad \text{すなわち}, \qquad \kappa = \kappa(2-\kappa-\lambda\kappa+\lambda\kappa^2) \tag{3.6}$$

を満たすことになる．この解は，$\kappa = 0,\ 1,\ 1/\lambda$ の 3 個となるが，k_0 から出発した場合 0 に収束することはないので，収束値は 1 または $1/\lambda$ となる．どちらに収束するかは，λ の値によって変わってくる．すなわち，$\lambda \gtrless 1$ によって，出発値 $1/(1+\lambda)$, 収束値 1 または $1/\lambda$ の大小関係が変わり，

$$\begin{array}{lll} \lambda \le 1 & \text{のとき} & 1/(1+\lambda) < 1 \le 1/\lambda \\ \lambda > 1 & \text{のとき} & 1/(1+\lambda) < 1/\lambda < 1 \end{array} \tag{3.7}$$

となる．これから，B の最終温度である k_n の $n \to \infty$ での収束値は，出発値に近い方となるので，

$$\begin{aligned} \lambda \leq 1 \quad &\text{のとき} \quad k_n \xrightarrow{n\to\infty} 1 \\ \lambda > 1 \quad &\text{のとき} \quad k_n \xrightarrow{n\to\infty} 1/\lambda \end{aligned} \tag{3.8}$$

となる．また，A の最終温度は，(3.4) 式から

$$\begin{aligned} \lambda \leq 1 \quad &\text{のとき} \quad A_\lambda(k_n) \xrightarrow{n\to\infty} 1-\lambda \\ \lambda > 1 \quad &\text{のとき} \quad A_\lambda(k_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

となる．これを言葉で言い表すと，$\lambda \leq 1$, すなわち $M_B \leq M_A$ の場合は，B の温度は 1 となり，A は $(M_A - M_B)/M_A$ となる．逆に，$\lambda > 1$, すなわち，$M_B > M_A$ の場合は，A の温度は 0 となるが，B の方は M_A/M_B となる．

以下，これらの典型的な場合である $\lambda = 1/2$ or $\lambda = 2$ の場合の $y = B_\lambda(k)$ のグラフ，および k_n の収束値を求めたものを図 7，図 8 に示す．

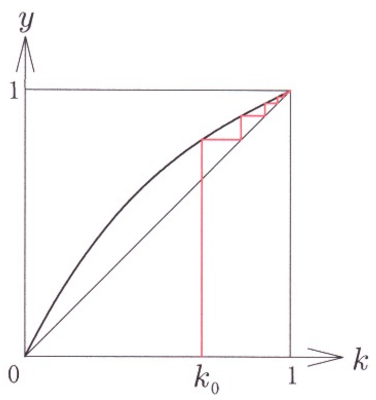

図 7 $y = B_\lambda(k)$ のグラフ：$\lambda = 1/2$

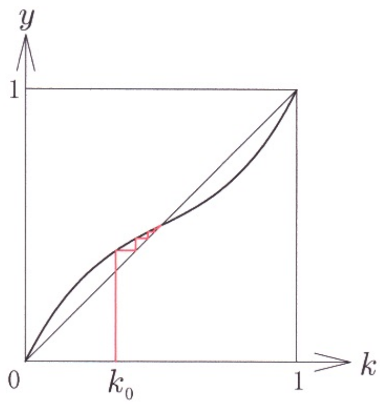

図 8 $y = B_\lambda(k)$ のグラフ：$\lambda = 2$

4 おわりに

前回の「熱交換器の問題 (1)」で扱った方法は，単純多分割法とでも言えるものであった．それに対し，今回紹介した中西方式は多段式 2 分割法と言える．どちらも，A, B 槽の量が等しい場合，および，異なる場合で，同じ結論を導くものであるが，計算のし易さからいうと今回の方がはるかに簡単である．ただし，今回のものは，図 3，図 6 で見るように，一般化された温度 k について考察していくので，前回のものに比べ抽象的になっている．これは，言わば図形を用いた数学的帰納法のようなもので，慣れない人にとっては理解に苦しむかもしれない．私自身，初めに中西先生からこの方法を伺ったときは，これで本当の証明になっているのか理解するのに時間がかかってしまった．

[謝辞]

今回も，京都大学名誉教授の中西襄先生にこの原稿を見ていただき，いくつかのコメントをいただきました．「はじめに」のところで述べたように，今回のものは，その基本となるアイデアは先生からいただいたもので，私がしたことは，それをわかりやすく解説したにすぎません．先生に心から感謝いたします．

直交座標系から極座標系へ

矢野　忠 [1]

From Cartesian Coordinates to Polar Coordinates

Tadashi YANO[2]

1　はじめに

量子力学での角運動量について Gasiorowicz の *"Quantum Physics"* [1] の第 10 章を読んでいたら，そのはじめのところに 3 次元の極座標 (r, θ, ϕ) と直交座標 (x, y, z) との関係

$$
\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\phi \\
y &= r\sin\theta\sin\phi \\
z &= r\cos\theta
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

が導入され，その微分

$$
\begin{aligned}
dx &= \sin\theta\cos\phi dr + r\cos\theta\cos\phi d\theta - r\sin\theta\sin\phi d\phi \\
dy &= \sin\theta\sin\phi dr + r\cos\theta\sin\phi d\theta + r\sin\theta\cos\phi d\phi \\
dz &= \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

から，これを右辺の $dr, d\theta, d\phi$ について

$$
\begin{aligned}
dr &= \sin\theta\cos\phi dx + \sin\theta\sin\phi dy + \cos\theta dz \\
d\theta &= \frac{1}{r}(\cos\theta\cos\phi dx + \cos\theta\sin\phi dy - \sin\theta dz) \\
d\phi &= \frac{1}{r\sin\theta}(-\sin\phi dx + \cos\phi dy)
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

と解いた式が出ていた．そしてこの (1.3) を用いれば,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \phi} \\
&= \sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \\
\frac{\partial}{\partial z} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

が簡単に導かれる．

この (1.3),(1.4) の求め方について考えてみるのがこのエッセイの目的である．これはまた量子力学での角運動量を考える準備ともなる．

なぜ (1.4) の求め方を問題とするのか．これは一つには 3 次元のラプラス演算子の直交座標系での表現

$$
\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}
\tag{1.5}
$$

[1]元愛媛大学工学部
[2]yanotad@earth.ocn.ne.jp

と関係している．これを 3 次元の極座標で

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\Lambda_3 \\ \Lambda_3 &= \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \end{aligned} \tag{1.6}$$

と表すときに，(1.4) を 2 度オペレートして

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{1.7}$$

を 3 次元極座標で求めて，それらの和をとるのが愚直な (1.6) の求め方である．そして，その計算の詳細を逐一述べたエッセイを書いたことがあった [2]．この愚直なやり方については中西先生のご批判をうけてもっと簡便な求め方をこの「数学・物理通信」に載せた [3]．したがって，このエッセイでは 3 次元のラプラス演算子の極座標表示を求めることはしない．

しかし，(1.3) の求め方とか (1.4) の求め方についていろいろ考えてみるのが，このエッセイの目的である．これは，また上に述べたように，量子力学の角運動量を考える準備となっている．

2　(1.3) の導出

(1.2) から (1.3) を求めるのは，どうしてか．これは（1.3）のように微分 $dr, d\theta, d\phi$ について解いた式があれば，(1.4) が容易に求められることはすぐにわかる．しかし，私ははじめ Gasiorowicz の意図が理解できなくて,「なぜ？」と考えた．

では，以下に中学生の連立方程式を解く練習のようだが，どうやって (1.2) から (1.3) を求めるか考えてみよう．

(1.2) をよく見てみよう．微分 dx, dy は微分 $dr, d\theta, d\phi$ を 3 つとも含んでいるが，微分 dz は $dr, d\theta$ は含んでいるが，$d\phi$ は含まない．したがって，(1.2.1),(1.2.2) から $d\phi$ を消去すれば，dx と dy の 1 次結合を $dr, d\theta$ の 1 次結合として表すことができて，この式を (1.2.3) と連立させれば，$dr, d\theta$ について解くことができる [3]．こうして求められた $dr, d\theta$ を (1.2.1) または (1.2.2) に代入すれば，$d\phi$ が求められる [4]．

では，これから (1.2) から (1.3) への導出をしよう．

(1.2.1),(1.2.2) から $d\phi$ を消去するために (1.2.1) に $\cos\phi$ をかけ，(1.2.2) に $\sin\phi$ をかけて辺々をくわえれば，すなわち (1.2.1) $\times\cos\phi+$ (1.2.2) $\times\sin\phi$ をつくれば,

$$\cos\phi dx+\sin\phi dy=\sin\theta dr+r\cos\theta d\theta \tag{1.2.4}$$

これと連立させて，解くべき方程式は

$$dz=\cos\theta dr-r\sin\theta d\theta \tag{1.2.3}$$

である．(1.2.4) と (1.2.3) から $d\theta$ を消去すれば，すなわち，(1.2.4) $\times\sin\theta+$ (1.2.3) $\times\cos\theta$ をつくれば

$$\sin\theta\cos\phi dx+\sin\theta\sin\phi dy+\cos\theta dz=dr \tag{1.2.5}$$

となる．

つぎに (1.2.3),(1.2.4) から dr を消去すれば，すなわち，(1.2.4) $\times\cos\theta-$ (1.2.3) $\times\sin\theta$ をつくれば,

$$\cos\theta\cos\phi dx+\cos\theta\sin\phi dy-\sin\theta dz=rd\theta \tag{1.2.6}$$

[3] 数式の番号として (l.m.n) と表したときには (l.m) の中の n 番目の式を指す．また (l.m.k) として (l.m) の中にはないが，派生して出てきた式の番号を指す．

[4] (1.4) を得るためには，(1.2) から求められた $\frac{\partial}{\partial r}$，$\frac{\partial}{\partial\theta}$，$\frac{\partial}{\partial\phi}$ すなわち，(5.1)-(5.3) を $\frac{\partial}{\partial x}$，$\frac{\partial}{\partial y}$，$\frac{\partial}{\partial z}$ について解くことも考えられる．この求め方については付録 1 で示す．しかし，(1.2) を $dr, d\theta, d\phi$ について解いて，(1.3) を求め，それから (1.4) を求めるほうが少し簡単だと思う．

これで，(1.2.5) と (1.2.6) から dr と $d\theta$ とが求められる．

$$dr = \sin\theta\cos\phi dx + \sin\theta\sin\phi dy + \cos\theta dz \tag{1.3.1}$$

$$d\theta = \frac{1}{r}(\cos\theta\cos\phi dx + \cos\theta\sin\phi dy - \sin\theta dz) \tag{1.3.2}$$

この (1.3.1) と (1.3.2) とを (1.2.1) または (1.2.2) に代入すれば，$d\phi$ が求められる．ここでは (1.2.1) に代入すれば，

$$d\phi = \frac{1}{r\sin\theta}(-\sin\phi dx + \cos\phi dy) \tag{1.3.3}$$

が求められる．

3 $(dr, d\theta, d\phi)$ から (dx, dy, dz) への変換とその逆変換

(1.2) と (1.3) とをマトリックスの形に表す．まず (1.2) を

$$d\mathbf{r} = A(r,\theta,\phi)d\mathbf{\Theta} \tag{3.1}$$

と表す．ここで，

$$d\mathbf{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

$$d\mathbf{\Theta} = \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\phi \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

$$A(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

である．(3.1) は $(dr, d\theta, d\phi)$ から (dx, dy, dz) への変換を与えている．

そして (dx, dy, dz) から $(dr, d\theta, d\phi)$ への逆変換は

$$d\mathbf{\Theta} = B(r,\theta,\phi)d\mathbf{r} \tag{3.5}$$

で表される．ここで，$d\mathbf{r}, d\mathbf{\Theta}$ は (3.2),(3.3) である．また $B(r,\theta,\phi)$ は (1.3) から

$$B(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi & \frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi & -\frac{1}{r}\sin\theta \\ -\frac{\sin\phi}{r\sin\theta} & \frac{\cos\phi}{r\sin\theta} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

で与えられることは前節で述べた．そうすれば

$$A(r,\theta,\phi)B(r,\theta,\phi) = 1 \tag{3.7}$$

であることが予期される．これは (3.1) に (3.5) を代入すれば

$$d\mathbf{r} = A(r,\theta,\phi)B(r,\theta,\phi)d\mathbf{r} \tag{3.8}$$

となるから，(3.8) が成り立つためには (3.7) が成立しなくてはならない．これを具体的に計算してみても

$$A(r,\theta,\phi)B(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi & \frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi & -\frac{1}{r}\sin\theta \\ -\frac{\sin\phi}{r\sin\theta} & \frac{\cos\phi}{r\sin\theta} & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

となる [5]．

4 (3.6) の別の導出法

(1.1) で (x,y,z) を (r,θ,ϕ) で表し，それから (1.2) を導出した．これから (3.4) の (3,3) 行列 $A(r,\theta,\phi)$ を導いた．しかし，(1.1) をまず (r,θ,ϕ) について解けば

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{4.1}$$
$$\tan\theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \tag{4.2}$$
$$\tan\phi = \frac{y}{x} \tag{4.3}$$

となる．これから (3,3) 行列 $B(r,\theta,\phi)$ を導くこともできる．

このとき，(r,θ,ϕ) について文字通りに解けば，(4.2),(4.3) ではないが，このままの形で両辺を θ,ϕ について微分した方がいくぶん計算が簡単である．計算のやり方を $\tan\theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$ について説明しておこう．(4.2) の左辺の θ と右辺の x との微分をとれば

$$\sec^2\theta d\theta = \frac{x}{z\sqrt{x^2+y^2}}\ dx$$

であるから

$$d\theta = \cos^2\theta\frac{x}{z\sqrt{x^2+y^2}}dx = \cos^2\theta\frac{(r\sin\theta)\cos\phi}{r\cos\theta(r\sin\theta)}dx = \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi dx$$

となる．ここで分子と分母の共通因子をわかりやすいように $(r\sin\theta)$ とかっこでくくった．これから

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi \tag{4.4}$$

を得ることはやさしい．

[6] では $\tan\theta = \frac{x^2+y^2}{z}$ の代わりに，$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ を用いている．また (r,θ,ϕ) について文字通りに解いて

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{4.5}$$
$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \tag{4.6}$$
$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \tag{4.7}$$

とし，これから (1.3) または (3.6) を求める計算は結構面倒である．計算の途中経過と結果は [6] に詳細に述べられている．

[5] 詳細な計算は付録 2 に示す．

この節では (4.1)-(4.3) を用いての $B(r,\theta,\phi)$ の導出を示しておく.

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r} = \sin\theta\cos\phi \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{y}{r} = \sin\theta\sin\phi \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{z}{r} = \cos\theta \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial x} &= \cos^2\theta\frac{1}{z}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \cos^2\theta\frac{1}{r\cos\theta}\frac{r\sin\theta\cos\phi}{r\sin\theta} \\ &= \frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial y} &= \cos^2\theta\frac{1}{z}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \cos^2\theta\frac{1}{r\cos\theta}\frac{r\sin\theta\sin\phi}{r\sin\theta} \\ &= \frac{\cos\theta\sin\phi}{r}\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial z} &= \cos^2\theta\sqrt{x^2+y^2}\left(-\frac{1}{z^2}\right) \\ &= \cos^2\theta\ r\sin\theta\left(-\frac{1}{r^2\cos^2\theta}\right) \\ &= -\frac{\sin\theta}{r}\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial x} &= -\cos^2\phi\frac{y}{x^2} \\ &= -\cos^2\phi\frac{r\sin\theta\sin\phi}{r^2\sin^2\theta\cos^2\phi} \\ &= -\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial y} &= \cos^2\phi\frac{1}{x} \\ &= \cos^2\phi\frac{1}{r\sin\theta\cos\phi} \\ &= \frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \tag{4.16}$$

5　おわりに

このエッセイでは, (1.2) から (1.3) への導出とか (1.4) の導出について述べた. (1.2) から (1.3) が導かれたら，それから (1.4) を導出するのは難しくはない.

一方，(1.2) から

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial z} \qquad (5.1)\\
\frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= r\cos\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial y} - r\sin\theta\frac{\partial}{\partial z} \qquad (5.2)\\
\frac{\partial}{\partial \phi} &= \frac{\partial x}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= -r\sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial x} + r\sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial y} \qquad (5.3)
\end{aligned}$$

を導き，これを $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ について解くという方針で (1.4) を求めることも考えられる．このやり方での (1.4) の導出を付録 1 で述べる．

6　付録 1　(1.4) の別の導出

5 節の「おわりに」で (1.4) の別の導出の方針を述べたが，それを実際に行ってみよう．導出の前に解き方を考えてみよう [5].

(5.1)-(5.3) をながめてみると $\frac{\partial}{\partial r}$ を表す式 (5.1) と $\frac{\partial}{\partial \theta}$ を表す (5.2) とは $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ とをすべて含んでいるが，$\frac{\partial}{\partial \phi}$ を表す式 (5.3) は $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ を含んでいるが，$\frac{\partial}{\partial z}$ を含んでいない．

それで，もし (5.1),(5.2) から $\frac{\partial}{\partial z}$ を含む項を消去して，$\frac{\partial}{\partial r}$ と $\frac{\partial}{\partial \theta}$ の 1 次結合を $\frac{\partial}{\partial x}$ と $\frac{\partial}{\partial y}$ の 1 次結合で表すことができれば，こうして得られた式を (5.4) とすれば，(5.3) と (5.4) とを $\frac{\partial}{\partial x}$ と $\frac{\partial}{\partial y}$ との連立方程式として，解くことができる．そして $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ とが求められれば，これらを (5.1) または (5.2) へ代入すれば，$\frac{\partial}{\partial z}$ を求めることができる．

これで解法の方針が立ったので，実際の計算にとりかかろう．

(5.1) の $\frac{\partial}{\partial z}$ の前の係数は $\cos\theta$ であり，(5.2) の $\frac{\partial}{\partial z}$ の前の係数は $-r\sin\theta$ であるから，(5.1)$\times r\sin\theta+$(5.2)$\times\cos\theta$ をつくれば，

$$r\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial \theta} = r\cos\phi\frac{\partial}{\partial x} + r\sin\phi\frac{\partial}{\partial y} \qquad (5.4)$$

ここで，この (5.4) と連立させる (5.3) を再度ここに書いておこう．

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = -r\sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial x} + r\sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial y} \qquad (5.3)$$

(5.3) と (5.4) とから $\frac{\partial}{\partial y}$ の項を消去するとすれば，(5.4) の $\frac{\partial}{\partial y}$ の前の係数が $r\sin\phi$ で (5.3) の $\frac{\partial}{\partial y}$ の前の係数が $r\sin\theta\cos\phi$ であるから，(5.4) $\times\sin\theta\cos\phi-$ (5.3) $\times\sin\phi$ をつくれば，$\frac{\partial}{\partial y}$ を消去できる．

これを計算してみれば，

$$r\sin^2\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial \theta} - \sin\phi\frac{\partial}{\partial \phi} = r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} \qquad (5.5)$$

また (5.4) の $\frac{\partial}{\partial x}$ の前の係数が $r\cos\phi$ で，(5.3) の $\frac{\partial}{\partial x}$ の前の係数が $-r\sin\theta\sin\phi$ であるから (5.4)$\times\sin\theta\sin\phi+$ (5.3) $\times\cos\phi$ をつくれば，$\frac{\partial}{\partial x}$ を消去できる．

$$r\sin^2\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial \theta} + \cos\phi\frac{\partial}{\partial \phi} = r\sin\theta\frac{\partial}{\partial y} \qquad (5.6)$$

したがって，(5.5),(5.6) から

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{1.4.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{1.4.2}$$

が得られる．この (1.4.1),(1.4.2) を (5.1) に代入すれば

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} \tag{1.4.3}$$

これらは (1.4) に一致している．この計算は (1.2) から (1.3) の導出と比べれば，ちょっと複雑である．

Gasiorowicz が (1.2) から (1.3) を導いたのは，だから (5.1)-(5.3) を $\frac{\partial}{\partial x}$，$\frac{\partial}{\partial y}$，$\frac{\partial}{\partial z}$ について解くのが (1.2) から (1.3) を導くのよりも複雑になるということを見通していたということであろう．この点に Gasiorowicz には教える内容を少しでもわかりやすくするという彼の教育についての才能が出ていると思う．

7 付録 2 (3.9) の計算

(3.4) と (3.6) のマトリックスの各要素を

$$\begin{aligned} A(r,\theta,\phi) &= \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{7.1}$$

と表し，

$$\begin{aligned} B(r,\theta,\phi) &= \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi & \frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi & -\frac{1}{r}\sin\theta \\ -\frac{\sin\phi}{r\sin\theta} & \frac{\cos\phi}{r\sin\theta} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{7.2}$$

と表せば，

$$A(r,\theta,\phi)B(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \tag{7.3}$$

と表せる．具体的に c_{ij} の要素を以下に計算する．

$$\begin{aligned}
c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \\
&= \sin^2\theta\cos^2\phi + \cos^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\phi \\
&= \cos^2\phi + \sin^2\phi \\
&= 1 \\
c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\
&= \sin^2\theta\cos\phi\sin\phi + \cos^2\theta\cos\phi\sin\phi - \cos\phi\sin\phi \\
&= \cos\phi\sin\phi - \cos\phi\sin\phi \\
&= 0 \\
c_{13} &= a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\
&= \cos\theta\sin\theta\cos\phi - \cos\theta\sin\theta\cos\phi \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \\
&= \sin^2\theta\cos\phi\sin\phi + \cos^2\theta\cos\phi\sin\phi - \cos\phi\sin\phi \\
&= \cos\phi\sin\phi - \cos\phi\sin\phi \\
&= 0 \\
c_{22} &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \\
&= \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\phi \\
&= \sin^2\phi + \cos^2\phi \\
&= 1 \\
c_{23} &= a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\
&= \cos\theta\sin\theta\sin\phi - \cos\theta\sin\theta\sin\phi \\
&= 0 \\
c_{31} &= a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} \\
&= \cos\theta\sin\theta\cos\phi - \cos\theta\sin\theta\cos\phi \\
&= 0 \\
c_{32} &= a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} \\
&= \cos\theta\sin\theta\sin\phi - \cos\theta\sin\theta\sin\phi \\
&= 0 \\
c_{33} &= a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \\
&= \cos^2\theta + \sin^2\theta \\
&= 1
\end{aligned}$$

これらの計算から確かに (3.7) が求められることがわかる．

ここまで計算をした後でいうのは気が引けるが，実は $A(r,\theta,\phi)B(r,\theta,\phi) = 1$ を示すために上の計算をする必要はなかった．

実は (3.1) は

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\phi \end{pmatrix} \tag{7.4}$$

であり，また (3.5) は

$$\begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \tag{7.5}$$

であるから，マトリックスの積 AB をつくると，

$$AB = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.6}$$

であることがすぐにわかる．

たとえば，c_{11} は

$$c_{11} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x} = 1 \tag{7.7}$$

となり，c_{12} は

$$c_{12} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial y} = 0 \tag{7.8}$$

となる．他の要素も同様である．

また，一般的に直交直線座標系 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ から直交曲線座標系 $(u^1, u^2, \cdots, u^n)$ の場合の変換と逆変換のマトリックスの積も

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^j}\frac{\partial u^j}{\partial u^k} = \delta^i_k \tag{7.9}$$

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial u^k} = \delta^i_k \tag{7.10}$$

が成り立つ [6]．ただし，(7.9),(7.10) では上下に 2 度出てくる，添字 j については 1 から n まで和をとるという，Einstein の規約が用いられている．

(2018.4.20)

参考文献

[1] S. Gasiorowicz, *“Quantum Physics”*　(Wiley, 1974) 167-178

[2] 矢野　忠,『物理数学散歩』(国土社, 2011) 38-47

[3] 矢野　忠, ラプラス演算子の極座標表示再考，数学・物理通信　7 巻 9 号 (2017.12) 10-20

[4] 石井俊全,『一般相対性理論を一歩一歩数式で理解する』(ベレ出版，2017) 416-418

[5] 佐々木重吉,『微分方程式概論』下（槇書店，1973）149 − 151

[6] 石井俊全,『一般相対性理論を一歩一歩数式で理解する』(ベレ出版，2017) 419

ラプラス演算子の極座標表示再考 2

矢野　忠 [1]

The Laplacian in Polar Coordinates Revisited 2

Tadashi YANO[2]

1　はじめに

「ラプラス演算子の極座標表示」という表題のエッセイを以前に書いた [1]．このエッセイを『数学散歩』 [2] に収録したころには，江沢洋先生の『微分積分の基礎と応用』 [3] が出版されていたので，これを参考文献として追加し，その計算法の特徴について言及したが，その考えにしたがって，計算を実行したことはなかった．

このエッセイでは江沢先生のアイディアにもとづいた，導出を述べることを目的とする．ただ，ちょっとした小さな計算の改良も試みる．これは以前の計算で長々とした数式を展開してしまったことを反省した「式の計算を小分けに」した試みである [3]．

前のエッセイ [4] では，3 次元のラプラス演算子の直交座標（デカルト座標）表示から極座標系表示への変換には，一度円柱座標系に変換した後に，極座標系に変換する方法について述べた．この方法に関心のある方は [4] をご参照ください．

2 節では計算の出発点と方針を述べる．3 節では (2.12)，すなわち，$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$ を計算する．4 節は計算の核心部分であり，ラプラス演算子の極座標表示を求める．5 節はまとめである．6 節は付録 1 で $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$ を求めるときの注意である．7 節は付録 2 で 4 節の $\Delta\psi$ を表す，係数 $P_i, (i=1\text{-}9)$ の計算を示す．8 節は付録 3 で P_4, P_5, P_6 の補助計算である．9 節は付録 4 で 2 次元ラプラス演算子の極座標表示の導出である． 10 節は付録 5 で 9 節の 2 次元ラプラス演算子の極座標表示の係数 A, B, C, D, E の計算である． 11 節は付録 6 で係数 B, D の補助計算である．

2　計算の出発点と方針

エッセイ「直交座標系から極座標系へ」 [5] ですでに述べた

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\psi}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} \\
&= \sin\theta\cos\phi\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi\frac{\partial\psi}{\partial\theta} - \frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} \\
\frac{\partial\psi}{\partial y} &= \sin\theta\sin\phi\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} \\
\frac{\partial\psi}{\partial z} &= \cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

が計算の出発点である．この式の導出は先のエッセイ [5] に詳しく述べたから，これらの式を前提とする．ただし，ここで $\psi(x,y,z)$ であるが，変換後も $\psi(r,\theta,\phi)$ とする．変数が変われば，関数名も変えるべきかと思うが，同じ関数の記号を使う．

---

[1]元愛媛大学工学部

[2]yanotad@earth.ocn.ne.jp

[3]こういう長々とした式の計算のことを，かつて一世を風靡した受験数学の「考え方」で知られた，藤森良蔵，良夫父子は「万里の長城を築く」と比喩的にいい,「式の計算は小分けに」というのを代数計算のモットーとされた．

さて，(2.1) から

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \tag{2.2}$$

を計算して，これをくわえた

$$\Delta\psi := \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \tag{2.3}$$

を 3 次元の極座標 (r, θ, ϕ) で表すことが目的である．得られる最終的な式を先取りして示しておけば，

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Lambda\psi \tag{2.4}$$

$$\Lambda = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} \tag{2.5}$$

である．

さて，$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$ を計算するためにちょっとした工夫をする．それはつぎの置換えである．

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = a_r\frac{\partial\psi}{\partial r} + a_\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + a_\phi\frac{\partial\psi}{\partial\phi} \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = b_r\frac{\partial\psi}{\partial r} + b_\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + b_\phi\frac{\partial\psi}{\partial\phi} \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = c_r\frac{\partial\psi}{\partial r} + c_\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + c_\phi\frac{\partial\psi}{\partial z} \tag{2.8}$$

ここで $a_r, a_\theta, \cdots, c_\phi$ はつぎのように定義されている．

$$a_r = \sin\theta\cos\phi, \qquad a_\theta = \frac{\cos\theta\cos\phi}{r}, \qquad a_\phi = -\frac{\sin\phi}{r\sin\theta} \tag{2.9}$$

$$b_r = \sin\theta\sin\phi, \qquad b_\theta = \frac{\cos\theta\sin\phi}{r}, \qquad b_\phi = \frac{\cos\phi}{r\sin\theta} \tag{2.10}$$

$$c_r = \cos\theta, \qquad c_\theta = -\frac{\sin\theta}{r}, \qquad c_\phi = 0 \tag{2.11}$$

この形を用いて $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$ を表せば

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \left(a_r\frac{\partial}{\partial r} + a_\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + a_\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)^2\psi \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \left(b_r\frac{\partial}{\partial r} + b_\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + b_\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)^2\psi \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \left(c_r\frac{\partial}{\partial r} + c_\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + c_\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)^2\psi \tag{2.14}$$

この式の形を見ると 3 つの式がすべて同じ形となっている．それではじめの $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$ だけの式を計算して，残りの 2 つ $\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$ は係数の中味を計算するときその違いを考慮すればよい．

それでは，3 節で $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$ を詳しく計算することにしよう．

3 (2.12) の計算

この 3 節では (2.12) の $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$ を計算しよう．どういう計算かは以下の展開を見て頂くとわかる．a_θ, a_ϕ は 3 つの変数 r, θ, ϕ をすべて含むが，a_r は r を含んでいないことに注意して，つぎの計算をする．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} &= \left(a_r\frac{\partial}{\partial r} + a_\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + a_\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)^2\psi \\
&= \left(a_r\frac{\partial}{\partial r} + a_\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + a_\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left(a_r\frac{\partial}{\partial r} + a_\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + a_\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\psi \\
&= a_r\frac{\partial}{\partial r}\left(a_r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + a_r\frac{\partial}{\partial r}\left(a_\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + a_r\frac{\partial}{\partial r}\left(a_\phi\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\right) \\
&+ a_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(a_r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + a_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(a_\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + a_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(a_\phi\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\right) \\
&+ a_\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\left(a_r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + a_\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\left(a_\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + a_\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\left(a_\phi\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\right) \\
&= A_1\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + A_2\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + A_3\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} \\
&+ A_4\frac{\partial\psi}{\partial r} + A_5\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + A_6\frac{\partial\psi}{\partial\phi} \\
&+ A_7\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta} + A_8\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\phi} + A_9\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial\phi}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

となる[4]．ここで，$A_i, (i = 1\text{-}9)$ はつぎのように定義される．

$$\begin{aligned}
&A_1 = a_r^2, && A_2 = a_\theta^2, && A_3 = a_\phi^2 \\
&A_4 = a_\theta\frac{\partial a_r}{\partial\theta} + a_\phi\frac{\partial a_r}{\partial\phi}, && A_5 = a_r\frac{\partial a_\theta}{\partial r} + a_\theta\frac{\partial a_\theta}{\partial\theta} + a_\phi\frac{\partial a_\theta}{\partial\phi}, && A_6 = a_r\frac{\partial a_\phi}{\partial r} + a_\theta\frac{\partial a_\phi}{\partial\theta} + a_\phi\frac{\partial a_\phi}{\partial\phi} \\
&A_7 = 2a_r a_\theta, && A_8 = 2a_r a_\phi, && A_9 = 2a_\theta a_\phi
\end{aligned} \tag{3.2}$$

(3.1) と同様に

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} &= B_1\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + B_2\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + B_3\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} \\
&+ B_4\frac{\partial\psi}{\partial r} + B_5\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + B_6\frac{\partial\psi}{\partial\phi} \\
&+ B_7\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta} + B_8\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\phi} + B_9\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial\phi}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} &= C_1\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + C_2\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} \\
&+ C_4\frac{\partial\psi}{\partial r} + C_5\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \\
&+ C_7\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

ここで $\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$ は $c_\phi = 0$ であるために C_1-C_9 の中で 0 でないものは C_1, C_2, C_4, C_5, C_7 の 5 つだけである．形式的には 9 つの C_i を全部を残した式を形式的に書いてもいいが，0 でないものだけを残した．B_i は A_i の定義で a_r, a_θ, a_ϕ を b_r, b_θ, b_ϕ で置き換えたものであり，C_i は A_i の定義で a_r, a_θ, a_ϕ を $c_r, c_\theta, c_\phi = 0$ で置き換えたものである．

[4] (3.1) の第 2 行目をわざわざ書いたことに注意せよ．付録 1 を参照せよ．

4　3 次元のラプラス演算子の極座標表示

以上の計算結果から 3 次元のラプラス演算子の極座標表示は

$$\begin{aligned}\Delta\psi &= P_1\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + P_2\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + P_3\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\\ &+ P_4\frac{\partial\psi}{\partial r} + P_5\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + P_6\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\\ &+ P_7\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta} + P_8\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\phi} + P_9\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial\phi}\end{aligned} \tag{4.1}$$

と表される．ここで微分演算子の前の係数 $P_i, (i = 1\text{-}9)$ は

$$\begin{aligned}&P_1 = A_1 + B_1 + C_1, \quad P_2 = A_2 + B_2 + C_2, \quad P_3 = A_3 + B_3\\ &P_4 = A_4 + B_4 + C_4, \quad P_5 = A_5 + B_5 + C_5, \quad P_6 = A_6 + B_6\\ &P_7 = A_7 + B_7 + C_7, \quad P_8 = A_8 + B_8, \qquad\quad P_9 = A_9 + B_9\end{aligned} \tag{4.2}$$

である．

これらの係数の計算は付録 2 に述べることにして，ここでは結果をまとめておくと

$$P_1 = 1 \tag{4.3}$$

$$P_2 = \frac{1}{r^2} \tag{4.4}$$

$$P_3 = \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \tag{4.5}$$

$$P_4 = \frac{2}{r} \tag{4.6}$$

$$P_5 = \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta} \tag{4.7}$$

$$\tag{4.8}$$

となる．これ以外の係数は $P_6 = P_7 = P_8 = P_9 = 0$ である．

したがって

$$\begin{aligned}\Delta\psi &= \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\\ &+ \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\end{aligned} \tag{4.9}$$

いま

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) \tag{4.11}$$

であるから，

$$\Lambda = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} \tag{2.5}$$

と定義すれば，(4.9) は (2.4) と表される．

5　おわりに

このエッセイでは, 3 次元のラプラス演算子（ラプラシアン）の極座標表示を導いた．その結果は (2.4),(2.5) である．計算に要した時間は延べ 2 日にわたってそれぞれ数時間をかけて間違いなく導出ができた．1ヶ所だけ計算があわなくてちょっとあわてたが.

これは (3.1) の表し方が簡潔でよかったことと，それに同じ形の残り 2 つの式の計算をする必要がなかったので，簡略化されたことによる．このアイディアは江沢洋先生の「式を小分けに計算する」という考えである．

3 次元のラプラス演算子を極座標で表すことは学生のときに誰でも一度は試みて挫折したことがあるか，または中西先生が示唆されたようにラプラス演算子の円柱座標の変換を経由して，極座標での表示を導くのが普通であろう [4].

しかし，真向から立ち向かってもここで示したやり方ならば，数時間で導出できることがわかった．だが,若いときにはこういうことやり方にはまったく考えが及ばず，中西先生から [2] の計算は「数学嫌いをつくりだすのではないか」といわれたのであった．その批評はもっともだと思う.

確かに，学生時代にまともに計算して 1 週間ほどかかっても，結果がでなかったから，その計算のしかたは芸がなかった．もっとも今回示した計算では高等な考えは全く使っていないので，テクニカルにすぎるかもしれない.

6　付録　1　(3.1) についての注意

(3.1) の第 2 行をわざわざ書いてあることを注意しておこう．すなわち,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} &= \left(a_r\frac{\partial}{\partial r}+a_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+a_\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)^2\psi \\
&= A_1\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+A_2\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+A_3\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} \\
&\quad + A_7\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta}+A_8\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\phi}+A_9\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial\phi}
\end{aligned}
$$

ではなく，ほかにも

$$
A_4\frac{\partial\psi}{\partial r}+A_5\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+A_6\frac{\partial\psi}{\partial\psi}
$$

の 3 項があるのが正しい．こういうまちがいを演算子の取り扱いに慣れていないときにはすることがある．そういうまちがいを防ぎたいという気持ちから，(3.1) の第 2 行をわざわざ書いた．こういうまちがいの原因は $\left(a_r\frac{\partial}{\partial r}+a_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+a_\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)^2\psi$ の演算子の部分だけを普通の式の 2 乗と同じように扱うことによると考えられる.

7　付録　2　P_i,　$(i=1\text{-}9)$ の導出

$P_i, (i=1\text{-}9)$ の導出を行うためには，その各部分 $a_r, a_\theta, \cdots, c_\theta, c_\phi$ の具体的な式は (2.9),(2.10),(2.11) に与えられている.

これらの式を前にもどって参照するのは面倒であるから，ここに再記しておく.

$$
a_r=\sin\theta\cos\phi,\qquad a_\theta=\frac{\cos\theta\cos\phi}{r},\qquad a_\phi=-\frac{\sin\phi}{r\sin\theta} \tag{2.9}
$$

$$
b_r=\sin\theta\sin\phi,\qquad b_\theta=\frac{\cos\theta\sin\phi}{r},\qquad b_\phi=\frac{\cos\phi}{r\sin\theta} \tag{2.10}
$$

$$
c_r=\cos\theta,\qquad c_\theta=-\frac{\sin\theta}{r},\qquad c_\phi=0 \tag{2.11}
$$

これらの式を参照すれば，つぎのように $P_i, (i = 1\text{-}9)$ を導出できる．この計算をするためには一部には補助計算が必要となるので，それは付録 3 に与える．

$$\begin{aligned}
P_1 &= A_1 + B_1 + C_1 \\
&= a_r^2 + b_r^2 + c_r^2 \\
&= \sin^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta \\
&= \sin^2\theta + \cos^2\theta \\
&= 1
\end{aligned} \tag{7.1}$$

$$\begin{aligned}
P_2 &= A_2 + B_2 + C_2 \\
&= a_\theta^2 + b_\theta^2 + c_\theta^2 \\
&= \frac{1}{r^2}(\cos^2\theta\cos^2\phi + \cos^2\theta\sin^2\phi + \sin^2\theta) \\
&= \frac{1}{r^2}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\
&= \frac{1}{r^2}
\end{aligned} \tag{7.2}$$

$$\begin{aligned}
P_3 &= A_3 + B_3 \\
&= a_\phi^2 + b_\phi^2 \\
&= \frac{1}{r^2\sin^2\theta}(\sin^2\phi + \cos^2\phi) \\
&= \frac{1}{r^2\sin^2\theta}
\end{aligned} \tag{7.3}$$

$$\begin{aligned}
P_4 &= A_4 + B_4 + C_4 \\
&= \underbrace{a_\theta\frac{\partial a_r}{\partial\theta} + b_\theta\frac{\partial b_r}{\partial\theta} + c_\theta\frac{\partial c_r}{\partial\theta}}_{\frac{1}{r}} + \underbrace{a_\phi\frac{\partial a_r}{\partial\phi} + b_\phi\frac{\partial b_r}{\partial\phi}}_{\frac{1}{r}} \\
&= \frac{2}{r}
\end{aligned} \tag{7.4}$$

$$\begin{aligned}
P_5 &= A_5 + B_5 + C_5 \\
&= \underbrace{a_r\frac{\partial a_\theta}{\partial r} + b_r\frac{\partial b_\theta}{\partial r} + c_r\frac{\partial c_\theta}{\partial r}}_{0} + \underbrace{a_\theta\frac{\partial a_\theta}{\partial\theta} + b_\theta\frac{\partial b_\theta}{\partial\theta} + c_\theta\frac{\partial c_\theta}{\partial\theta}}_{0} + \underbrace{a_\phi\frac{\partial a_\theta}{\partial\phi} + b_\phi\frac{\partial b_\theta}{\partial\phi}}_{\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}} \\
&= \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}
\end{aligned} \tag{7.5}$$

$$\begin{aligned}
P_6 &= A_6 + B_6 \\
&= \underbrace{a_r\frac{\partial a_\phi}{\partial r} + b_r\frac{\partial b_\phi}{\partial r}}_{0} + \underbrace{a_\theta\frac{\partial a_\phi}{\partial\theta} + b_\theta\frac{\partial b_\phi}{\partial\theta}}_{0} + \underbrace{a_\phi\frac{\partial a_\phi}{\partial\phi} + b_\phi\frac{\partial b_\phi}{\partial\phi}}_{0} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{7.6}$$

$$
\begin{aligned}
P_7 &= A_7 + B_7 + C_7 \\
&= 2(a_r a_\theta + b_r b_\theta + c_r c_\theta) \\
&= \frac{2}{r}(\cos\theta\sin\theta\cos^2\phi + \cos\theta\sin\theta\sin^2\phi - \cos\theta\sin\theta) \\
&= \frac{2}{r}\cos\theta\sin\theta(\cos^2\phi + \sin^2\phi - 1) \\
&= 0 \qquad (7.7)\\
P_8 &= 2(a_r a_\phi + b_r b_\phi) \\
&= \frac{2}{r}\cos\phi\sin\phi(-1+1) \\
&= 0 \qquad (7.8)\\
P_9 &= 2(a_\theta a_\phi + b_\theta b_\phi) \\
&= \frac{2}{r^2\sin\theta}\cos\theta\cos\phi\sin\phi(-1+1) \\
&= 0 \qquad (7.9)
\end{aligned}
$$

である．

P_4, P_5, P_6 の補助計算は付録 3 に述べる．

8　付録　3　P_4, P_5, P_6 の補助計算

8.1　P_4 の補助計算

$$\frac{\partial a_r}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cos\phi) = \cos\theta\cos\phi \tag{8.1}$$

$$\frac{\partial b_r}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\sin\phi) = \cos\theta\sin\phi \tag{8.2}$$

$$\frac{\partial c_r}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}(\cos\theta) = -\sin\theta \tag{8.3}$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
a_\theta\frac{\partial a_r}{\partial\theta} + b_\theta\frac{\partial b_r}{\partial\theta} + c_\theta\frac{\partial c_r}{\partial\theta} &= \left(\frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\right)\cos\theta\cos\phi + \left(\frac{\cos\theta\sin\phi}{r}\right)\cos\theta\sin\phi + \left(-\frac{\sin\theta}{r}\right)(-\sin\theta) \\
&= \frac{1}{r}\cos^2\theta(\cos^2\phi + \sin^2\phi) + \frac{1}{r}\sin^2\theta \\
&= \frac{1}{r}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\
&= \frac{1}{r} \qquad (8.4)
\end{aligned}
$$

となり，また

$$\frac{\partial a_r}{\partial\phi} = \frac{\partial}{\partial\phi}(\sin\theta\cos\phi) = -\sin\theta\sin\phi \tag{8.5}$$

$$\frac{\partial b_r}{\partial\phi} = \frac{\partial}{\partial\phi}(\sin\theta\sin\phi) = \sin\theta\cos\phi \tag{8.6}$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
a_\phi \frac{\partial a_r}{\partial \phi} + b_\phi \frac{\partial b_r}{\partial \phi} &= \left(-\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\right)(-\sin\theta\sin\phi) + \left(\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\right)(\sin\theta\cos\phi) \\
&= \frac{1}{r}(\sin^2\phi + \cos^2\phi) \\
&= \frac{1}{r}
\end{aligned}
\tag{8.7}
$$

となる．

8.2 P_5 の補助計算

$$
\frac{\partial a_\theta}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\cos\theta\cos\phi \tag{8.8}
$$

$$
\frac{\partial b_\theta}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cos\theta\sin\phi}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\cos\theta\sin\phi \tag{8.9}
$$

$$
\frac{\partial c_\theta}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right) = \frac{1}{r^2}\sin\theta \tag{8.10}
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
a_r \frac{\partial a_\theta}{\partial r} + b_r \frac{\partial b_\theta}{\partial r} + c_r \frac{\partial c_\theta}{\partial r} &= \sin\theta\cos\phi\left(-\frac{\cos\theta\cos\phi}{r^2}\right) + \sin\theta\sin\phi\left(-\frac{\cos\theta\sin\phi}{r^2}\right) + \cos\theta\left(\frac{\sin\theta}{r^2}\right) \\
&= -\frac{1}{r^2}\cos\theta\sin\theta(\cos^2\phi + \sin^2\phi) + \frac{1}{r^2}\cos\theta\sin\theta \\
&= \frac{1}{r^2}\cos\theta\sin\theta(-1+1) \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{8.11}
$$

となる．また

$$
a_\theta^2 + b_\theta^2 + c_\theta^2 = \frac{1}{r^2}[\cos^2\theta(\cos^2\phi + \sin^2\phi) + \sin^2\theta] = \frac{1}{r^2}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \frac{1}{r^2} \tag{8.12}
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
a_\theta \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + b_\theta \frac{\partial b_\theta}{\partial \theta} + c_\theta \frac{\partial c_\theta}{\partial \theta} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \theta}(a_\theta^2 + b_\theta^2 + c_\theta^2) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r^2}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{8.13}
$$

となる．さらに

$$
\frac{\partial a_\theta}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\right) = -\frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi \tag{8.14}
$$

$$
\frac{\partial b_\theta}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{\cos\theta\sin\phi}{r}\right) = \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi \tag{8.15}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
a_\phi \frac{\partial a_\theta}{\partial \phi} + b_\phi \frac{\partial b_\theta}{\partial \phi} &= \left(-\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\right)\left(-\frac{\cos\theta\sin\phi}{r}\right) + \left(\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\right) \\
&= \frac{1}{r^2\sin\theta}\cos\theta(\sin^2\phi + \cos^2\phi) \\
&= \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}
\end{aligned}
\tag{8.16}
$$

となる．

8.3 P_6 の補助計算

$$\frac{\partial a_\phi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\right) = \frac{\sin\phi}{r^2\sin\theta} \tag{8.17}$$

$$\frac{\partial b_\phi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\right) = -\frac{\cos\phi}{r^2\sin\theta} \tag{8.18}$$

であるから，

$$\begin{aligned} a_r\frac{\partial a_\phi}{\partial r} + b_r\frac{\partial b_\phi}{\partial r} &= \sin\theta\cos\phi\left(\frac{\sin\phi}{r^2\sin\theta}\right) + \sin\theta\sin\phi\left(-\frac{\cos\phi}{r^2\sin\theta}\right) \\ &= \frac{1}{r^2}\cos\phi\sin\phi(1-1) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{8.19}$$

となる．さらに

$$\frac{\partial a_\phi}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\right) = \frac{\cos\theta\sin\phi}{r\sin^2\theta} \tag{8.20}$$

$$\frac{\partial b_\phi}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\right) = -\frac{\cos\theta\cos\phi}{r\sin^2\theta} \tag{8.21}$$

であるから，

$$\begin{aligned} a_\theta\frac{\partial a_\phi}{\partial \theta} + b_\theta\frac{\partial b_\phi}{\partial \theta} &= \frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\left(\frac{\cos\theta\sin\phi}{r\sin^2\theta}\right) + \frac{\cos\theta\sin\phi}{r}\left(-\frac{\cos\theta\cos\phi}{r\sin^2\theta}\right) \\ &= \frac{\cos^2\theta\cos\phi\sin\phi}{r^2\sin^2\theta}(1-1) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{8.22}$$

となる．最後に

$$\begin{aligned} a_\phi^2 + b_\phi^2 &= \frac{1}{r^2\sin^2\theta}(\sin^2\phi + \cos^2\phi) \\ &= \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{aligned} \tag{8.23}$$

であるから，

$$\begin{aligned} a_\phi\frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} + b_\phi\frac{\partial b_\phi}{\partial \phi} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \phi}(a_\phi^2 + b_\phi^2) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{8.24}$$

となる。

9　付録　4　2次元ラプラス演算子の極座標表示

このエッセイで使った方法で 2 次元ラプラス演算子の極座標表示を参考のために導出しておこう．

まず，直交座標 (x,y) と 2 次元の極座標 (r,θ) との関係は

$$x = r\cos\theta \tag{9.1}$$

$$y = r\sin\theta \tag{9.2}$$

である．これから (x,y) の微分 (dx,dy) は

$$dx = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta \tag{9.3}$$

$$dy = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta \tag{9.4}$$

となる．これから微分 $(dr,d\theta)$ は

$$dr = \cos\theta dx + \sin\theta dy \tag{9.5}$$

$$d\theta = -\frac{\sin\theta}{r}dx + \frac{\cos\theta}{r}dy \tag{9.6}$$

となるから

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \\ &= \cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \\ &= a_r\frac{\partial\psi}{\partial r} + a_\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\end{aligned} \tag{9.7}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \\ &= \sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \\ &= b_r\frac{\partial\psi}{\partial r} + b_\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\end{aligned} \tag{9.8}$$

ここで

$$a_r = \cos\theta, \qquad a_\theta = -\frac{\sin\theta}{r} \tag{9.9}$$

$$b_r = \sin\theta, \qquad b_\theta = \frac{\cos\theta}{r} \tag{9.10}$$

である．これらを用いれば，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} &= \left(a_r\frac{\partial}{\partial r} + a_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2\psi \\ &= a_r\frac{\partial}{\partial r}\left(a_r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + a_r\frac{\partial}{\partial r}\left(a_\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + a_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(a_r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + a_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(a_\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) \\ &= a_r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \left(a_r\frac{\partial a_\theta}{\partial r} + a_\theta\frac{\partial a_\theta}{\partial\theta}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + 2a_r a_\theta\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial r} + a_\theta\frac{\partial a_r}{\partial\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r} + a_\theta^2\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\end{aligned} \tag{9.11}$$

同様にして

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = b_r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \left(b_r\frac{\partial b_\theta}{\partial r} + b_\theta\frac{\partial b_\theta}{\partial\theta}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + 2b_r b_\theta\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial r} + b_\theta\frac{\partial b_r}{\partial\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r} + b_\theta^2\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} \tag{9.12}$$

である．したがって

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}&=A\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+B\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+C\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial r}+D\frac{\partial\psi}{\partial r}+E\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\\&=\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}++\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\end{aligned}\tag{9.13}$$

ここで

$$A=a_r^2+b_r^2=1\tag{9.14}$$

$$B=a_r\frac{\partial a_\theta}{\partial r}+b_r\frac{\partial b_\theta}{\partial r}+a_\theta\frac{\partial a_\theta}{\partial\theta}+b_\theta\frac{\partial b_\theta}{\partial\theta}=0\tag{9.15}$$

$$C=2(a_ra_\theta+b_ra_\theta)=0\tag{9.16}$$

$$D=a_\theta\frac{\partial a_r}{\partial\theta}+b_\theta\frac{\partial b_r}{\partial\theta}=\frac{1}{r}\tag{9.17}$$

$$E=a_\theta^2+b_\theta^2=\frac{1}{r^2}\tag{9.18}$$

である．

A,B,C,D,E の計算は付録 5 に示す.

10　付録　5　A,B,C,D,E の計算

この節では付録　4 で省略した A,B,C,D,E の計算を示す.

A,B,C,D,E はつぎのようになる.

$$A=a_r^2+b_r^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1\tag{10.1}$$

$$B=\underbrace{a_r\frac{\partial a_\theta}{\partial r}+b_r\frac{\partial b_\theta}{\partial r}}_{0}+\underbrace{a_\theta\frac{\partial a_\theta}{\partial\theta}+b_\theta\frac{\partial b_\theta}{\partial\theta}}_{0}=0\tag{10.2}$$

$$C=2(a_ra_\theta+b_rb_\theta)=\frac{2}{r}\cos\theta\sin\theta(-1+1)=0\tag{10.3}$$

$$D=a_\theta\frac{\partial a_r}{\partial\theta}+b_\theta\frac{\partial b_r}{\partial\theta}=\frac{1}{r}\tag{10.4}$$

$$E=a_\theta^2+b_\theta^2=\frac{1}{r^2}(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=\frac{1}{r^2}\tag{10.5}$$

となる．

なお，B,D の補助計算は付録 6 に示す.

11　付録　6　B,D の補助計算

まず，B の計算に必要な偏微分は

$$\frac{\partial a_\theta}{\partial r}=\frac{\sin\theta}{r^2}\tag{11.1}$$

$$\frac{\partial a_\theta}{\partial\theta}=-\frac{\cos\theta}{r}\tag{11.2}$$

$$\frac{\partial b_\theta}{\partial r}=-\frac{\cos\theta}{r^2}\tag{11.3}$$

$$\frac{\partial b_\theta}{\partial\theta}=-\frac{\sin\theta}{r}\tag{11.4}$$

である．これを用いると

$$
\begin{aligned}
a_r \frac{\partial a_\theta}{\partial r} + b_r \frac{\partial b_\theta}{\partial r} &= \cos\theta \left(\frac{\sin\theta}{r^2}\right) + \sin\theta \left(-\frac{\cos\theta}{r^2}\right) \\
&= \frac{1}{r^2}\cos\theta\sin\theta(1-1) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{11.5}
$$

であり，また係数 E の計算から

$$
a_\theta^2 + b_\theta^2 = \frac{1}{r^2} \tag{11.6}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
a_\theta \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + b_\theta \frac{\partial b_\theta}{\partial \theta} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \theta}(a_\theta^2 + b_\theta^2) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r^2}\right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{11.7}
$$

つぎに D に必要な偏微分は

$$
\frac{\partial a_r}{\partial \theta} = -\sin\theta \tag{11.8}
$$

$$
\frac{\partial b_r}{\partial \theta} = \cos\theta \tag{11.9}
$$

である．したがって

$$
\begin{aligned}
a_\theta \frac{\partial a_r}{\partial \theta} + b_\theta \frac{\partial b_r}{\partial \theta} &= \left(-\frac{\sin\theta}{r}\right)(-\sin\theta) + \left(\frac{\cos\theta}{r}\right)(\cos\theta) \\
&= \frac{1}{r}(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \\
&= \frac{1}{r}
\end{aligned} \tag{11.10}
$$

(2018.5.19)

参考文献

[1] 矢野　忠，ラプラス演算子の極座標表示，研究と実践（愛数協），No. 25 (1988.3) 16-29

[2] 矢野　忠,『数学散歩』(国土社，2005)109-118, (『物理数学散歩』(国土社, 2011）38-47 にも再収録）

[3] 江沢　洋,『微分積分の基礎と応用』(サイエンス社，2000) 179, 243-246

[4] 矢野　忠, ラプラス演算子の極座標表示再考，数学・物理通信，7 巻 9 号 (2017.12) 10-20

[5] 矢野　忠, 直交座標系から極座標系へ，数学・物理通信，8 巻 5 号 (2018.6) 7-15

不思議な数式 2

山崎和夫 [1]

Strange Number Orders 2

Kazuo YAMAZAKI[2]

1　規則的で不思議な数式の群れ (1)

$$\begin{aligned}1 \times 8 + 1 &= 9\\ 12 \times 8 + 2 &= 98\\ 123 \times 8 + 3 &= 987\\ 1234 \times 8 + 4 &= 9876\\ 12345 \times 8 + 5 &= 98765\\ 123456 \times 8 + 6 &= 987654\\ 1234567 \times 8 + 7 &= 9876543\\ 12345678 \times 8 + 8 &= 98765432\\ 123456789 \times 8 + 9 &= 987654321\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}1234567890 \times 8 + 90 &= 9876543210\\ 12345678901 \times 8 + 900 + 1 &= 98765432109\\ 123456789012 \times 8 + 9000 + 2 &= 987654321098\\ 1234567890123 \times 8 + 90000 + 3 &= 9876543210987\\ 12345678901234 \times 8 + 900000 + 4 &= 98765432109876\\ 123456789012345 \times 8 + 9000000 + 5 &= 987654321098765\\ 1234567890123456 \times 8 + 90000000 + 6 &= 9876543210987654\\ 12345678901234567 \times 8 + 900000000 + 7 &= 98765432109876543\\ 123456789012345678 \times 8 + 9000000000 + 8 &= 987654321098765432\\ 1234567890123456789 \times 8 + 90000000000 + 9 &= 9876543210987654321\end{aligned} \tag{2}$$

まず最初の (1) の 9 個の数式は前回に手をつけ始めた 9 桁までの数字の並び方に関するものであったが，このように大きな数が外見上全く違った形をしたものが，数値的に一致する不思議さが私の老いた知的好奇心を刺激したのが話の始まりである．

これからのその拡張と類推からえられた結果は，推論の本質はすでに前回用いたものと同工異曲であることをまずお断りしておく．したがって少し手を抜いて書く部分もあるかもしれない．

式をご覧になってすぐわかるように，これらの数列はいずれも 1 つ上の数式の 1 桁上の数列になっている．そこで既述の 9 桁の次の 10 桁目には少し拡張の仕方に多様性がある．それは 10 番目に 0 を用いるかどうかである．1 から 9 までの数字に限って規則的な数字の並べ方は単純であるが，9 の次に 0 を使う今回採用してお見せするものが一番規則的で見事に私には思えたからである．

[1] 京都大学名誉教授
[2] kazuo-yamazaki@y2.dion.ne.jp

そこで 10 桁から 19 桁までの数式への延長であるが，10 桁目の数式は実は 9 桁目の数式を単純に 10 倍しただけの式で，左辺では 2ヶ所で 9 のつぎに 0 を，右辺では 1 のつぎに 0 をつけるという既述の 9 桁までの式の規則の延長を用いている．それから先の 9 個の式では前回の 9 個の式と全く同じであるのに気づかれるであろう．もちろん前回と同じ数学的帰納法でも証明できるが，それは読者にお任せしよう．

さらに，ここで用いたような数字の並びでは，8 倍しても上の 10 桁の数には繰り上げで影響することが全くないことや，左右両辺で上の 10 桁は全く同じであることに気づかれるであろう．

下の桁の計算はこれも前回と全く同じであることにお気づきであろう．ただ今回の式には左辺に $90, 900, 9000, \cdots$ が加わっているのが気になるかもしれない．90 の加わったのは上に述べたとおりであり，以後は前の式を 10 倍してという次の式の成り立ちから自然に加わったものである．このような言葉による説明の煩わしい方は，$1234567890, 9876543210$ という同じ数をいとわず書いて数学的帰納法でやってみてください．前回と同じに．以上．

2 規則的で不思議な数式の群れ (2)

$$
\begin{aligned}
1 \times 9 + 1 &= 10 \\
12 \times 9 + 2 &= 110 \\
123 \times 9 + 3 &= 1110 \\
1234 \times 9 + 4 &= 11110 \\
12345 \times 9 + 5 &= 111110 \\
123456 \times 9 + 6 &= 1111110 \\
1234567 \times 9 + 7 &= 11111110 \\
12345678 \times 9 + 8 &= 111111110 \\
123456789 \times 9 + 9 &= 1111111110
\end{aligned} \tag{3}
$$

$$
\begin{aligned}
1234567890 \times 9 + 100 &= 11111111110 \\
12345678901 \times 9 + 1000 + 1 &= 111111111110 \\
123456789012 \times 9 + 10000 + 2 &= 1111111111110 \\
1234567890123 \times 9 + 100000 + 3 &= 11111111111110 \\
12345678901234 \times 9 + 1000000 + 4 &= 111111111111110 \\
123456789012345 \times 9 + 10000000 + 5 &= 1111111111111110 \\
1234567890123456 \times 9 + 100000000 + 6 &= 11111111111111110 \\
12345678901234567 \times 9 + 1000000000 + 7 &= 111111111111111110 \\
123456789012345678 \times 9 + 10000000000 + 8 &= 1111111111111111110 \\
1234567890123456789 \times 9 + 100000000000 + 9 &= 11111111111111111110
\end{aligned} \tag{4}
$$

$$
\begin{aligned}
12345678901234567890 \times 9 + 100 + 1000000000000 &= 111111111111111111110 \\
123456789012345678901 \times 9 + 1000 + 10000000000000 &= 1111111111111111111110
\end{aligned} \tag{5}
$$

$$\cdots$$

今度は掛ける数を 8 でなく 9 にした場合で，結果の右辺には $111 \cdots 1110$ がならぶものである．ここでは言葉

でなく数学的帰納法で証明してお見せしよう．n を 1 から 9 までの自然数として

$$
\begin{aligned}
X(1) &= 1 \\
X(2) &= 12 \\
&\cdots \\
X(n) &= 123\cdots n \\
X(n+1) &= 10X(n) + (n+1) \qquad \text{(E1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y(1) &= 10 \\
Y(2) &= 110 \\
&\cdots \\
Y(n) &= 111\cdots 110 \\
Y(n+1) &= 10Y(n) + 10 \qquad \text{(E2)}
\end{aligned}
$$

とおくと，証明すべき式は

$$9X(n) + n = Y(n) \qquad \text{(E3)}$$

である．

まず $n = 1$ の場合には式 (E3) は $1 \times 9 + 1 = 10$ で成り立っている．つづいて (E3) 式で $n = k$ のとき，数学的帰納法の仮定より

$$9X(k) + k = Y(k) \qquad \text{(E4)}$$

が成り立つとして，$n = k + 1$ のとき

$$9X(k+1) + (k+1) = Y(k+1) \qquad \text{(E5)}$$

が成り立つことを，(E1),(E2) を用いて証明すればよい．

$$
\begin{aligned}
\text{(E5) の左辺} &= 9X(k+1) + (k+1) \\
&= 9[10X(k) + (k+1)] + (k+1) \\
&= 90X(k) + 10(k+1) \qquad \text{(E6)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(E5) の右辺} &= Y(k+1) \\
&= 10Y(k) + 10 \\
&= 10[9X(k) + k] + 10 \\
&= 90X(k) + 10(k+1) \qquad \text{(E7)}
\end{aligned}
$$

これで式 (E5) の左右両辺が等しいことが証明されたので，数学的帰納法によって証明すべき式は証明された．

2 巡目の 10 桁の式は 9 桁目の式を 10 倍して +10 するという今までの規則で得られるものでそこに現れる 100 は実は $9 \times 10 + 10 = 100$ として加わったものである．11 桁目以下も全て両辺を 10 倍して +10 するという規則をそのまま通用して得られる．

編集後記

8巻4号につづいて，8巻5号を発行する．

3月から6月にかけて考えさせられたのは「原稿の修正」についてである．二人の方から投稿を頂いたのだが, あまりにもしばしば原稿の修正が入り, これではなかなか原稿が確定しない.

一人の方の原稿は申し訳がないが, 掲載するとしても掲載時期を数か月遅らせるという措置をとった. 投稿段階では十分に熟考されたものかもしれないが, こんなに原稿がしばしば変更されるのではどうしたらいいか, 編集者としてはわからなくなる.

私が自分の原稿についてとっているのは自分の机の引き出しか, ファイルキャビネットの中で原稿を少し寝かせておくという手段である.

したがって, 場合によっては永久にその原稿を他人にお目にかけられない場合もある．これは普通に原稿を書く人の心得の一つではないだろうか.

日本語の表現の古めかしさとか硬さが気になる．言葉をできれば, 漢字ではなく, ひらかなで書くようにして, また古めかしい言葉づかいをさける．こういうことを年齢が高い人に申し上げるのは気が引けるが, その論文を読むのは現代の若者である.

この「数学・物理通信」もこの8巻5号で通巻70号を数えることになった．50号のときには数人の投稿者からご寄稿をいただいたが，つぎの記念号は100号までとっておくことにする．100号まで，あと30号なので，まだ数年かかるであろう．それまで私の寿命がもつかは神のみぞ知る．できるかぎり長生きをして100号を無事に迎えたいと思っている.

皆様のご協力を今後ともお願いする.

（矢野　忠）