

数学・物理通信

8卷6号 2018年9月

編集 新関章三・矢野 忠

2018年9月11日

目次 (Contents)

1. Bessel 関数と一次元格子振動 (3)	世戸憲治	2
2. Bessel 関数と一次元格子振動 (4)	世戸憲治	9
3. 四元数と Euler の恒等式	矢野 忠	21
4. 「超弦理論と Dirac のハサミ」への補足 2	伊藤仁之	29
5. 編集後記	新関章三	30
1. Bessel Function and One-Dimensional Lattice Oscillation (3)	Kenji SETO	2
2. Bessel Function and One-Dimensional Lattice Oscillation (4)	Kenji SETO	9
3. The Quarternions and Euler Identity	Tadashi YANO	21
4. Supplement 2 to 'Superstring Theory and Dirac's Scissors'	Hitoshi ITO	29
5. Editorial Comments	Shozo NIIZEKI	30

Bessel 関数と一次元格子振動 (3)

世戸 憲治*

Bessel Function and One-Dimensional Lattice Oscillation (3)

Kenji SETO*

1 はじめに

「Bessel 関数と一次元格子振動 (1), (2)」(「数学・物理通信」, 6 巻 6 号 (2016.6), 6 巻 7 号 (2016.9)) では, 半無限の一次元格子振動を解くために Bessel 関数を利用した解析方法を採用した. ただし, ここでは, Bessel 関数が出てくる必然性を示さずに, たんに, Bessel 関数の微分公式と格子振動の微分方程式が一致するという理由のみで, Bessel 関数を, いわば, ad hoc に導入してしまった. 今回はこの反省の立場にたつて, 何故 Bessel 関数かというその必然性から議論することを目的とする. ただし, ここではその前段階として, 全無限の 1 次元格子振動を扱う.

2 方程式の導入とその解法

2.1 方程式の導入

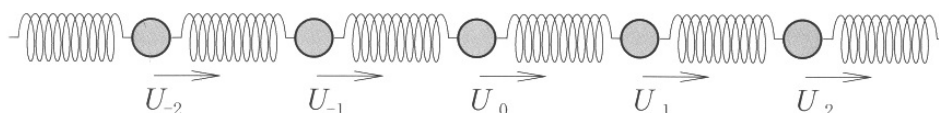


図 1 1 次元格子モデル

図 1 に示すように, 質量 m の錘と, ばね定数 k のばねを 1 次元的に交互に繋いだ系を考える. これら錘には番号が付けられており, 一番左にあるものを $-N$ 番, 以後, 右にいくにしたがい $-(N-1)$, $-(N-2)$, \dots , -1 , 0 , 1 , 2 , \dots , N 番とする. したがって, 錘の個数は全体で $2N+1$ 個とするが, あとで $N \rightarrow \infty$ として全無限の系を考えることにする. 振動しているときの時刻 t における n 番目の錘の変位を $U_n(t)$ とし, この錘の運動方程式を考える. この錘には, ばねによって, 右から $k(U_{n+1} - U_n)$ の力を受け, 左から $k(U_n - U_{n-1})$ の力をうけるので, その運動方程式は,

$$m \frac{d^2 U_n}{dt^2} = -k(-U_{n+1} + 2U_n - U_{n-1}), \quad n = -N, -(N-1), \dots, N-1, N \quad (2.1)$$

となる. ただし, この式で, $n = -N$ としたときは, $U_{-(N+1)}$ という項が, また, $n = N$ としたときは, U_{N+1}

* 北海学園大学名誉教授

E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

という項が入ってくるが、これらはばねの左端、右端を意味し、そこは固定端となっていて、常に、

$$U_{-(N+1)}(t) = 0, \quad U_{N+1}(t) = 0 \quad (2.2)$$

となるものとする。この2式が境界条件である。また、初期条件として、初期変位と初速度

$$U_n(0), \quad \left. \frac{dU_n(t)}{dt} \right|_{t=0}, \quad n = -N, -(N-1), \dots, N \quad (2.3)$$

は、適当に与えられるものとする。

この(2.1)の方程式を行列形式で書くために、変位ベクトル $U(t)$ と係数行列 P を

$$U(t) = \begin{pmatrix} U_{-N}(t) \\ U_{-(N-1)}(t) \\ \vdots \\ U_{N-1}(t) \\ U_N(t) \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

と定義する。これを用いて、方程式(2.1)は、

$$m \frac{d^2}{dt^2} U(t) = -k P U(t) \quad (2.5)$$

と書き替えられる。

2.2 方程式の解法

ここで、行列 P を対角化するため、この行列の固有値方程式、

$$P V = \lambda V, \quad V = (V_{-N}, V_{-(N-1)}, \dots, V_N)^t \quad (2.6)$$

を考える。ここに、 λ は固有値、 V は固有ベクトルである。これは成分で表すと、

$$-V_{n-1} + 2V_n - V_{n+1} = \lambda V_n, \quad (n = -N, -(N-1), \dots, N) \quad (2.7)$$

となる。ここで、この式と(2.2)式を整合させるため、条件式

$$V_{-(N+1)} = V_{N+1} = 0 \quad (2.8)$$

を設定する。この(2.7)式で $V_n = e^{in\theta}$ とおくと、固有値 λ が

$$\lambda = 2(1 - \cos \theta) = 4 \sin^2(\theta/2) \quad (2.9)$$

と θ の関数で表される。 θ の符号を変えたものも同じ λ を与えるので、一般には

$$V_n = \alpha e^{in\theta} + \beta e^{-in\theta} \quad (2.10)$$

とおける。これに(2.8)の条件式を課すと、

$$\alpha e^{-i(N+1)\theta} + \beta e^{i(N+1)\theta} = 0, \quad \alpha e^{i(N+1)\theta} + \beta e^{-i(N+1)\theta} = 0 \quad (2.11)$$

となるが, α, β が同時にはゼロにならない状態で, これら 2 式が両立するには,

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} = 0, \quad \text{すなわち} \quad \alpha = \pm\beta \quad (2.12)$$

でなければならない. $\alpha = \beta$ のとき, (2.11) 式は

$$\cos((N+1)\theta) = 0 \quad (2.13)$$

となるので, これから θ は

$$\theta^{(\ell+)} = \frac{(\ell + \frac{1}{2})\pi}{N+1}, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, N \quad (2.14)$$

と決まる. また, $\alpha = -\beta$ のとき, (2.11) は,

$$\sin((N+1)\theta) = 0 \quad (2.15)$$

となるので, これから, θ が

$$\theta^{(\ell-)} = \frac{\ell\pi}{N+1}, \quad \ell = 1, 2, \dots, N \quad (2.16)$$

と決まる. このとき, $\ell = 0$ という解もあり得るが, これでは, 以下で求める固有値も固有関数もゼロとなるので除くことにする.

このときの固有値は, $\alpha = \beta, \alpha = -\beta$ に応じて, (2.9) 式から,

$$\lambda^{(\ell+)} = 4 \sin^2 \left(\frac{(\ell + \frac{1}{2})\pi}{2(N+1)} \right), \quad \lambda^{(\ell-)} = 4 \sin^2 \left(\frac{\ell\pi}{2(N+1)} \right) \quad (2.17)$$

となり, また, 固有ベクトル $V^{(\ell\pm)}$ の第 n 成分 $V_n^{(\ell\pm)}$ は, (2.10) 式より,

$$V_n^{(\ell+)} = 2\alpha \cos \left(\frac{n(\ell + \frac{1}{2})\pi}{N+1} \right), \quad V_n^{(\ell-)} = 2\alpha \sin \left(\frac{n\ell\pi}{N+1} \right) \quad (2.18)$$

となる. ここで, (2.10) 式より直接求めたときは, この第 2 式の $V_n^{(\ell-)}$ には虚数の i が付くが, ここでは元の α を改めて $-i\alpha$ とおき直すことで, この式には虚数が付かないようにした.

このベクトルを規格化するため,

$$\sum_{n=-N}^N [V_n^{(\ell+)}]^2 = 1, \quad \sum_{n=-N}^N [V_n^{(\ell-)}]^2 = 1 \quad (2.19)$$

という条件式を課して, α の値を決めることにする. この第 1 式に (2.18) の第 1 式を代入して,

$$\sum_{n=-N}^N [V_n^{(\ell+)}]^2 = (2\alpha)^2 \left[1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos^2 \left(\frac{n(\ell + \frac{1}{2})\pi}{N+1} \right) \right] \quad (2.20)$$

となる. ここで, 岩波「数学公式 II」P.19 にある公式

$$\sum_{n=1}^N \cos^2(nx) = \frac{N}{2} + \frac{\cos((N+1)x) \sin(Nx)}{2 \sin x}, \quad \sum_{n=1}^N \sin^2(nx) = \frac{N}{2} - \frac{\cos((N+1)x) \sin(Nx)}{2 \sin x} \quad (2.21)$$

の第 1 式を使うと, (2.20) 式は $(2\alpha)^2(N+1)$ となるので, これが 1 となるためには,

$$(2\alpha)^2 = \frac{1}{N+1} \quad (2.22)$$

であればよい。同様に、(2.19) の第 2 式に、(2.18) の第 2 式を代入すると、

$$\sum_{n=-N}^N [V_n^{(\ell-)}]^2 = 2(2\alpha)^2 \sum_{n=1}^N \sin^2\left(\frac{n\ell\pi}{N+1}\right) = 2(2\alpha)^2 \sum_{n=1}^{N+1} \sin^2\left(\frac{n\ell\pi}{N+1}\right) \quad (2.23)$$

となって、(2.21) の第 2 式で N を $N+1$ に置き換えたものを利用すると、この式の値も $(2\alpha)^2(N+1)$ となるので、これが 1 となるには、前と同じく α の値は (2.22) 式で決まる。

当然のことながら、異なる固有値に属する固有ベクトルは直交するので、

$$\sum_{n=-N}^N V_n^{(\ell+)} V_n^{(\ell'+)} = \delta_{\ell,\ell'}, \quad \sum_{n=-N}^N V_n^{(\ell+)} V_n^{(\ell'-)} = 0, \quad \sum_{n=-N}^N V_n^{(\ell-)} V_n^{(\ell'-)} = \delta_{\ell,\ell'} \quad (2.24)$$

である。この固有ベクトル $V^{(\ell\pm)}$ を $\ell\pm$ について横に並べたものを、行列

$$A = \begin{pmatrix} V_{-N}^{(N-)} & V_{-N}^{(N-1-)} & \cdots & V_{-N}^{(1-)}, & V_{-N}^{(0+)} & V_{-N}^{(1+)} & \cdots & V_{-N}^{(N+)} \\ V_{-(N-1)}^{(N-)} & V_{-(N-1)}^{(N-1-)} & \cdots & V_{-(N-1)}^{(1-)}, & V_{-(N-1)}^{(0+)} & V_{-(N-1)}^{(1+)} & \cdots & V_{-(N-1)}^{(N+)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ V_N^{(N-)} & V_N^{(N-1-)} & \cdots & V_N^{(1-)}, & V_N^{(0+)} & V_N^{(1+)} & \cdots & V_N^{(N+)} \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

と定義しておく。固有ベクトルの直交性、および、完全性から、 $A^\dagger A = A A^\dagger = 1$ (単位行列) となる。この行列によって係数行列 P は対角化され、

$$A^\dagger P A = \begin{pmatrix} \lambda^{(N-)} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \lambda^{(N-1-)} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \lambda^{(0+)} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda^{(1+)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda^{(N+)} \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

となる。

この対角化を利用すると方程式 (2.5) は分離された形になるので簡単に解くことができる。すなわち、方程式 (2.5) の左側から A^\dagger を掛け、変数 $U(t)$ を

$$A^\dagger U(t) = W(t), \quad W(t) = (W^{(N-)}(t), W^{((N-1)-)}(t), \dots, W^{(0+)}(t), \dots, W^{(N+)}(t))^t \quad (2.27)$$

と $W(t)$ におき直すと、成分表示で、

$$m \frac{d^2 W^{(\ell\pm)}(t)}{dt^2} = -k \lambda^{(\ell\pm)} W^{(\ell\pm)}(t) \quad (2.28)$$

という方程式を得る。これは簡単に解け、 A, B を任意定数として

$$W^{(\ell\pm)}(t) = A \sin\left(\omega_0 \sqrt{\lambda^{(\ell\pm)}} t\right) + B \cos\left(\omega_0 \sqrt{\lambda^{(\ell\pm)}} t\right) \quad (2.29)$$

と解ける。ここに、 ω_0 は、ばねと錘で決まる角振動数で、

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \quad (2.30)$$

と定義した。また、このときの定数 A, B は初期値 $W^{(\ell\pm)}(0), \dot{W}^{(\ell\pm)}(0)$ で決まり、

$$A = \frac{\dot{W}^{(\ell\pm)}(0)}{\omega_0 \sqrt{\lambda^{(\ell\pm)}}}, \quad B = W^{(\ell\pm)}(0) \quad (2.31)$$

となるので、このときの解は、

$$\begin{aligned} W^{(\ell\pm)}(t) &= \frac{\dot{W}^{(\ell\pm)}(0)}{\omega_0 \sqrt{\lambda^{(\ell\pm)}}} \sin\left(\omega_0 \sqrt{\lambda^{(\ell\pm)}} t\right) + W^{(\ell\pm)}(0) \cos\left(\omega_0 \sqrt{\lambda^{(\ell\pm)}} t\right) \\ &= \dot{W}^{(\ell\pm)}(0) \int_0^t \cos\left(\omega_0 \sqrt{\lambda^{(\ell\pm)}} t'\right) dt' + W^{(\ell\pm)}(0) \cos\left(\omega_0 \sqrt{\lambda^{(\ell\pm)}} t\right) \end{aligned} \quad (2.32)$$

と書かれる。これで $W(t)$ の解は求まったが、これを元の $U(t)$ の解に戻さなければならない。初めに、(2.27) 式を用いて $W^{(\ell\pm)}(0), \dot{W}^{(\ell\pm)}(0)$ を $U_r(0), \dot{U}_r(0)$ で表すと、

$$W^{(\ell\pm)}(0) = \sum_{r=-N}^N V_r^{(\ell\pm)} U_r(0), \quad \dot{W}^{(\ell\pm)}(0) = \sum_{r=-N}^N V_r^{(\ell\pm)} \dot{U}_r(0) \quad (2.33)$$

となる。つぎに、(2.27) 式から $U = \Lambda W$ となるので、 $W(t)$ から $U(t)$ に戻した形にすると、

$$U_n(t) = \sum_{\ell=1}^N V_n^{(\ell-)} W^{(\ell-)}(t) + \sum_{\ell=0}^N V_n^{(\ell+)} W^{(\ell+)}(t) \quad (2.34)$$

となるので、これに、(2.32) (2.33) 式を代入すると、

$$\begin{aligned} U_n(t) &= \sum_{\ell=1}^N \sum_{r=-N}^N V_n^{(\ell-)} V_r^{(\ell-)} \left[\dot{U}_r(0) \int_0^t \cos\left(\omega_0 \sqrt{\lambda^{(\ell-)}} t'\right) dt' + U_r(0) \cos\left(\omega_0 \sqrt{\lambda^{(\ell-)}} t\right) \right] \\ &\quad + \sum_{\ell=0}^N \sum_{r=-N}^N V_n^{(\ell+)} V_r^{(\ell+)} \left[\dot{U}_r(0) \int_0^t \cos\left(\omega_0 \sqrt{\lambda^{(\ell+)}} t'\right) dt' + U_r(0) \cos\left(\omega_0 \sqrt{\lambda^{(\ell+)}} t\right) \right] \end{aligned} \quad (2.35)$$

となる。さらに、(2.17) (2.18) (2.22) 式を用いて、 $\lambda^{(\ell\pm)}, V_n^{(\ell\pm)}, \alpha$ の具体的な形を代入すると、

$$\begin{aligned} U_n(t) &= \frac{1}{N+1} \sum_{\ell=1}^N \sum_{r=-N}^N \sin\left(\frac{n\ell\pi}{N+1}\right) \sin\left(\frac{r\ell\pi}{N+1}\right) \\ &\quad \times \left[\dot{U}_r(0) \int_0^t \cos\left(2\omega_0 t' \sin\left(\frac{\ell\pi}{2(N+1)}\right)\right) dt' + U_r(0) \cos\left(2\omega_0 t \sin\left(\frac{\ell\pi}{2(N+1)}\right)\right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{N+1} \sum_{\ell=0}^N \sum_{r=-N}^N \cos\left(\frac{n(\ell+\frac{1}{2})\pi}{N+1}\right) \cos\left(\frac{r(\ell+\frac{1}{2})\pi}{N+1}\right) \\ &\quad \times \left[\dot{U}_r(0) \int_0^t \cos\left(2\omega_0 t' \sin\left(\frac{(\ell+\frac{1}{2})\pi}{2(N+1)}\right)\right) dt' + U_r(0) \cos\left(2\omega_0 t \sin\left(\frac{(\ell+\frac{1}{2})\pi}{2(N+1)}\right)\right) \right] \end{aligned} \quad (2.36)$$

と求められる。これで一応の解は求められたが、これを基に計算するにはかなり複雑すぎる。

2.3 $N \rightarrow \infty$ の場合

ここで、(2.36) 式の $N \rightarrow \infty$ の極限を取った場合を考えてみよう。このときは、 ℓ の和を積分に置き換えることにし、

$$\frac{\ell\pi}{2(N+1)} \rightarrow x, \quad \frac{(\ell+\frac{1}{2})\pi}{2(N+1)} \rightarrow x, \quad \frac{\pi}{2(N+1)} \rightarrow dx \quad (2.37)$$

と連続変数にしてしまう。この操作で (2.36) 式は

$$U_n(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi/2} dx \cos(2(n-r)x) \left[\dot{U}_r(0) \int_0^t \cos(2\omega_0 t' \sin x) dt' + U_r(0) \cos(2\omega_0 t \sin x) \right] \quad (2.38)$$

と、かなりの程度、簡単化される。さらに、岩波「数学公式 III」P.178 にある Bessel 関数の公式*1

$$J_{2n}(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(2nx) \cos(z \sin x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.39)$$

を用いると、この式の x 積分が実行され、Bessel 関数を用いた形で、

$$U_n(t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left[\dot{U}_r(0) \int_0^t J_{2(n-r)}(2\omega_0 t') dt' + U_r(0) J_{2(n-r)}(2\omega_0 t) \right] \quad (2.40)$$

と求められたことになる。これがばねと錘の系を全無限にしたときの解である。

2.4 エネルギー保存則のチェック

ここでは、簡単な応用例として、0 番の錘だけを初めに a だけずらしておいた場合を考える。そのときのばねのエネルギー E_0 は、0 番のおもりの両側のばねが a だけ伸び縮みしているの、ばね定数 k を用いて、

$$E_0 = ka^2 \quad (2.41)$$

である。その後、押さえている手を離すと、時刻 t での各点の変位は (2.40) 式から

$$U_n(t) = aJ_{2n}(2\omega_0 t) \quad (2.42)$$

となる。このときのばねの歪みエネルギーと錘の運動エネルギーの和を $E(t)$ とすると

$$E(t) = \frac{1}{2}k \sum_{n=-\infty}^{\infty} [U_{n+1}(t) - U_n(t)]^2 + \frac{1}{2}m \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\dot{U}_n(t)]^2 \quad (2.43)$$

となる。この式を時間 t で微分し、(2.1) 式を用いると、 $dE(t)/dt = 0$ が示されるので、確かにエネルギー保存則が成立することが示される。

ここでは、この式に (2.42) 式を直接代入することで、エネルギー保存則が満たされることを確かめてみよう。Bessel 関数の微分公式

$$\frac{d}{dz} J_\nu(z) = \frac{1}{2} [J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)] \quad (2.44)$$

を用いて計算すると、ただし、Bessel 関数の変数はすべて同じなので、これを省略して、

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}ka^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} [(J_{2(n+1)} - J_{2n})^2 + (J_{2n-1} - J_{2n+1})^2] \\ &= ka^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} [J_{2n}^2 + J_{2n-1}^2 - J_{2n}J_{2n+2} - J_{2n-1}J_{2n-1+2}] = ka^2 \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} [J_\ell^2 - J_\ell J_{\ell+2}] \end{aligned} \quad (2.45)$$

となる。ここで、 ω_0 の定義 (2.30) 式を用いた。この式は、さらに、岩波「数学公式 III」P.212, P.213 の公式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(z) = 1, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^\ell J_n(z) J_{m+n}(z) = 0, \quad \ell = 0, 1, \dots, m-1, \quad m \text{ は正整数} \quad (2.46)$$

*1 この公式集では積分範囲が 0 から π となっているが、これを 0 から $\pi/2$ として 2 倍しても同じことになる。

を使うと,

$$E(t) = ka^2 \quad (2.47)$$

となって, 確かに, エネルギー保存則を満たしている.

つぎに, 0 番の錘だけに, 初速度 v_0 を与えた場合を考える. このときの初めのエネルギーは

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (2.48)$$

である. 時刻 t における各錘の変位は (2.40) 式より,

$$U_n(t) = v_0 \int_0^t J_{2n}(2\omega_0 t') dt' \quad (2.49)$$

となり, この時刻における全エネルギーは, 前と同じく (2.43) 式で与えられる. そこでこの式をエネルギー式に代入し, ばねの歪みエネルギーの部分を, (2.44) の微分公式を逆に使って,

$$\begin{aligned} U_{n+1}(t) - U_n(t) &= v_0 \int_0^t [J_{2n+2}(2\omega_0 t') - J_{2n}(2\omega_0 t')] dt' \\ &= -v_0 \int_0^t [J_{2n+1-1}(2\omega_0 t') - J_{2n+1+1}(2\omega_0 t')] dt' = -\frac{v_0}{\omega_0} \int_0^t \frac{d}{dt'} J_{2n+1}(2\omega_0 t') dt' = -\frac{v_0}{\omega_0} J_{2n+1}(2\omega_0 t) \end{aligned} \quad (2.50)$$

と計算していく. 結果として,

$$E(t) = \frac{1}{2}mv_0^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} [J_{2n+1}^2(2\omega_0 t) + J_{2n}^2(2\omega_0 t)] = \frac{1}{2}mv_0^2 \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} J_{\ell}^2(2\omega_0 t) = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (2.51)$$

となって, この場合も, 当然ながら, エネルギー保存則を満たしている.

3 おわりに

今回のものは, 初め, ばねと錘を半無限に接続したものを解析するつもりであった. しかし, これは思うように事が運ばず, 全無限にしたほうが扱いやすいことに気づき, 全無限にしてしまったものが今回のものである. 次回は, 半無限の場合に挑戦してみようと思う.

今回のものでいうと Bessel 関数がでてくるところからは, 公式集のおかげでスラスラとできてしまった. こんなにもたくさんの Bessel 関数に関する公式を作ってくれた先達に感謝である.

[謝辞]

今回も, 京都大学名誉教授の中西襄先生に原稿段階で読んでいただき, 大変有意義なアドバイスをいただきました. ここに, 謹んで感謝申し上げます.

Bessel 関数と一次元格子振動 (4)

世戸 憲治*

Bessel Function and One-Dimensional Lattice Oscillation (4)

Kenji SETO*

1 はじめに

前回の「Bessel 関数と 1 次元格子振動 (3)」(「数学・物理通信」, 8 巻 6 号) では, ばねと錘を全無限の形になげた 1 次元格子振動の問題を扱った. 今回は, これを半無限の格子振動に対して, 解析することにする. 半無限のときは, その境界を, 固定端とするか, 自由端とするかで解析方法が変わってくるので, これらの場合を節を改めて議論することにする.

2 半無限 1 次元格子, 固定端の場合

2.1 方程式の導入

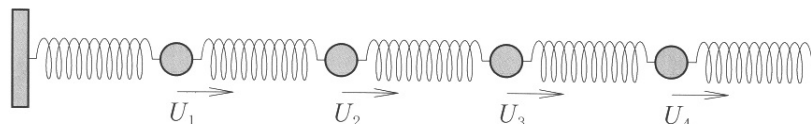


図 1 1 次元格子モデル, 固定端の場合

図 1 に示すように, 質量 m の錘と, ばね定数 k のばねを 1 次元的に交互に繋いだ系を考える. 錘の個数は初め N 個としておくが, この N はあとで無限大とするので, 半無限の振動系を考えることになる. これら錘には左から右に向かって $1, 2, \dots, N$ と番号を付けておく. 振動しているときの時刻 t における n 番目の錘の変位を $U_n(t)$ として, この錘の運動方程式を考える. この錘には, ばねによって, 右から $k(U_{n+1} - U_n)$ の力を受け, 左から $k(U_n - U_{n-1})$ の力をうけるので, その運動方程式は,

$$m \frac{d^2}{dt^2} U_n = -k(-U_{n-1} + 2U_n - U_{n+1}), \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2.1)$$

となる. ただし, ここで, $n = 1$ としたときは, U_0 という項が, また, $n = N$ としたときは U_{N+1} という項が入ってくるが, これらはばねの左端と右端を意味し, これらの端は固定されているものとして, 常に,

$$U_0(t) = 0, \quad U_{N+1}(t) = 0 \quad (2.2)$$

* 北海学園大学名誉教授

E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

とする。これら 2 式が境界条件である。また、初期条件として、初期変位と初速度

$$U_n(0), \quad \left. \frac{dU_n}{dt} \right|_{t=0}, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2.3)$$

は、適当に与えられるものとする。

この (2.1) の方程式を行列形式で書くために、変位ベクトル $U(t)$ と係数行列 P を

$$U(t) = \begin{pmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ \vdots \\ U_{N-1}(t) \\ U_N(t) \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

と定義する。これを用いて、方程式 (2.1) は、

$$m \frac{d^2}{dt^2} U(t) = -k P U(t) \quad (2.5)$$

と書き直される。

2.2 方程式の解法

ここで、行列 P を対角化するため、この行列の固有値方程式、

$$P V = \lambda V, \quad V = (V_1, V_2, \dots, V_N)^t \quad (2.6)$$

を考える。ここに、 λ は固有値、 V は固有ベクトルである。これは成分で表すと、

$$-V_{n-1} + 2V_n - V_{n+1} = \lambda V_n, \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (2.7)$$

となる。ただし、(2.2) 式と整合させるために、

$$V_0 = V_{N+1} = 0 \quad (2.8)$$

とおくことにする。この (2.7) 式で $V_n = e^{in\theta}$ とおくと、固有値 λ が

$$\lambda = 2(1 - \cos \theta) = 4 \sin^2(\theta/2) \quad (2.9)$$

と θ の関数で表される。 θ の符号を変えたものも同じ λ を与えるので、一般には

$$V_n = \alpha e^{in\theta} + \beta e^{-in\theta} \quad (2.10)$$

とおける。これに (2.8) の条件式を課すと、

$$\alpha + \beta = 0, \quad \alpha e^{i(N+1)\theta} + \beta e^{-i(N+1)\theta} = 0 \quad (2.11)$$

となるので、 α, β が同時にゼロとならないためには、

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{i(N+1)\theta} & e^{-i(N+1)\theta} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{すなわち} \quad \sin((N+1)\theta) = 0 \quad (2.12)$$

でなければならない。これから、 θ が

$$\theta^{(\ell)} = \frac{\ell\pi}{N+1}, \quad \ell = 1, 2, \dots, N \quad (2.13)$$

と決まり、固有値は、

$$\lambda^{(\ell)} = 4 \sin^2 \left(\frac{\ell\pi}{2(N+1)} \right) \quad (2.14)$$

固有ベクトル $V^{(\ell)}$ の成分 $V_n^{(\ell)}$ は、

$$V_n^{(\ell)} = 2\alpha \sin \left(\frac{n\ell\pi}{N+1} \right) \quad (2.15)$$

となる。ただし、ここでは、元の α を改めて $-i\alpha$ とおき直し、この式には虚数が付かないようにした。また、方程式 (2.12) を解いたとき、 $\theta = 0$, ($\ell = 0$) という解もあり得るが、これでは、固有値も固有関数もゼロとなるので除くことにする。

このベクトルを規格化するため、

$$\sum_{n=1}^N [V_n^{(\ell)}]^2 = 1 \quad (2.16)$$

を要請して α の値を決めてみよう。これには、岩波「数学公式 II」P.19 にある公式

$$\sum_{n=1}^N \sin^2(nx) = \frac{N}{2} - \frac{\cos((N+1)x) \sin(Nx)}{2 \sin x} \quad (2.17)$$

を使う。(2.16) 式に (2.15) 式を代入して、

$$1 = \sum_{n=1}^N [V_n^{(\ell)}]^2 = (2\alpha)^2 \sum_{n=1}^N \sin^2 \left(\frac{n\ell\pi}{N+1} \right) = (2\alpha)^2 \sum_{n=1}^{N+1} \sin^2 \left(\frac{n\ell\pi}{N+1} \right) \quad (2.18)$$

となるが、和公式 (2.17) で N を $N+1$ と置き換えたものを使うと、 α が

$$(2\alpha)^2 = \frac{2}{N+1} \quad (2.19)$$

と決まる。当然のことながら、異なる固有値に属する固有ベクトルは直交するので、

$$\sum_{n=1}^N V_n^{(\ell)} V_n^{(\ell')} = \delta_{\ell, \ell'} \quad (2.20)$$

である。この固有ベクトル $V^{(\ell)}$ を ℓ について横に並べたものを、行列

$$A = \begin{pmatrix} V_1^{(1)} & V_1^{(2)} & \dots & V_1^{(N)} \\ V_2^{(1)} & V_2^{(2)} & \dots & V_2^{(N)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ V_N^{(1)} & V_N^{(2)} & \dots & V_N^{(N)} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

と定義しておく。固有ベクトルの直交性、および、完全性から $A^\dagger A = A A^\dagger = 1$ (単位行列) となる。この行列によって係数行列 P は対角化され、

$$A^\dagger P A = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \lambda^{(2)} & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & 0 & \lambda^{(3)} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda^{(N)} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

となる。

ここで、方程式 (2.5) の左側から A^\dagger を掛け、変数 $U(t)$ を

$$A^\dagger U(t) = W(t), \quad W = (W^{(1)}, W^{(2)}, \dots, W^{(N)})^t \quad (2.23)$$

と $W(t)$ におき直すと、成分表示で、

$$m \frac{d^2}{dt^2} W^{(\ell)}(t) = -k \lambda^{(\ell)} W^{(\ell)}(t), \quad \ell = 1, 2, \dots, N \quad (2.24)$$

という分離された方程式となる。この一般解は、 A, B を任意定数として、

$$W^{(\ell)}(t) = A \sin(\omega_0 \sqrt{\lambda^{(\ell)}} t) + B \cos(\omega_0 \sqrt{\lambda^{(\ell)}} t) \quad (2.25)$$

と求められる。ここで、 ω_0 はばねと錘で決まる角振動数で、

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \quad (2.26)$$

と定義する。さらに、この定数 A, B は初期値 $W^{(\ell)}(0), \dot{W}^{(\ell)}(0)$ で表され、

$$A = \frac{\dot{W}^{(\ell)}(0)}{\omega_0 \sqrt{\lambda^{(\ell)}}}, \quad B = W^{(\ell)}(0) \quad (2.27)$$

となるので、このときの解は、

$$\begin{aligned} W^{(\ell)}(t) &= \frac{\dot{W}^{(\ell)}(0)}{\omega_0 \sqrt{\lambda^{(\ell)}}} \sin(\omega_0 \sqrt{\lambda^{(\ell)}} t) + W^{(\ell)}(0) \cos(\omega_0 \sqrt{\lambda^{(\ell)}} t) \\ &= \dot{W}^{(\ell)}(0) \int_0^t \cos(\omega_0 \sqrt{\lambda^{(\ell)}} t') dt' + W^{(\ell)}(0) \cos(\omega_0 \sqrt{\lambda^{(\ell)}} t) \end{aligned} \quad (2.28)$$

と書かれる。これで W の解は求まったが、これを元の U の解に戻さなければならない。初めに、(2.23) 式を用いて $W^{(\ell)}(0), \dot{W}^{(\ell)}(0)$ を $U_r(0), \dot{U}_r(0)$ で表すと、

$$W^{(\ell)}(0) = \sum_{r=1}^N V_r^{(\ell)} U_r(0), \quad \dot{W}^{(\ell)}(0) = \sum_{r=1}^N V_r^{(\ell)} \dot{U}_r(0) \quad (2.29)$$

となる。つぎに、(2.23) 式から $U = AW$ となるので、 W から U に戻した形にすると、

$$U_n(t) = \sum_{\ell=1}^N \sum_{r=1}^N V_n^{(\ell)} V_r^{(\ell)} \left[\dot{U}_r(0) \int_0^t \cos(\omega_0 \sqrt{\lambda^{(\ell)}} t') dt' + U_r(0) \cos(\omega_0 \sqrt{\lambda^{(\ell)}} t) \right] \quad (2.30)$$

と求められる。最後に、(2.14) (2.15) (2.19) 式を使って、 $\lambda^{(\ell)}, V_n^{(\ell)}, \alpha$ の具体的な形を入れると、

$$\begin{aligned} U_n(t) &= \frac{2}{N+1} \sum_{\ell=1}^N \sum_{r=1}^N \sin\left(\frac{n\ell\pi}{N+1}\right) \sin\left(\frac{r\ell\pi}{N+1}\right) \\ &\quad \times \left[\dot{U}_r(0) \int_0^t \cos\left(2\omega_0 t' \sin\left(\frac{\ell\pi}{2(N+1)}\right)\right) dt' + U_r(0) \cos\left(2\omega_0 t \sin\left(\frac{\ell\pi}{2(N+1)}\right)\right) \right] \end{aligned} \quad (2.31)$$

となる。これで錘の個数 N が有限個の場合の解が求められたことになる。

2.3 $N \rightarrow \infty$ の場合

ここで、(2.31) 式の $N \rightarrow \infty$ の極限を取った場合を考える。このときは、 ℓ の和を積分に置き換えることにし、

$$\frac{\ell\pi}{2(N+1)} \rightarrow x, \quad \frac{\pi}{2(N+1)} \rightarrow dx \quad (2.32)$$

と連続変数にしてしまう。この操作で (2.31) 式は

$$U_n(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \int_0^{\pi/2} dx \sin(2nx) \sin(2rx) \left[\dot{U}_r(0) \int_0^t \cos(2\omega_0 t' \sin x) dt' + U_r(0) \cos(2\omega_0 t \sin x) \right] \quad (2.33)$$

となる。ここで、三角関数の積になっているところは積和公式を使い、さらに、岩波「数学公式 III」P.178 にある Bessel 関数の公式*1

$$J_{2n}(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(2nx) \cos(z \sin x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.34)$$

を用いると、(2.33) 式の $U_n(t)$ は、Bessel 関数を用いた形で、

$$U_n(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \left[\dot{U}_r(0) \int_0^t \left(J_{2(n-r)}(2\omega_0 t') - J_{2(n+r)}(2\omega_0 t') \right) dt' + U_r(0) \left(J_{2(n-r)}(2\omega_0 t) - J_{2(n+r)}(2\omega_0 t) \right) \right] \quad (2.35)$$

と求められたことになる。前回の「全無限格子」の場合、Bessel 関数は、 $J_{2(n-r)}$ の形でしか入らなかったが、今回は $J_{2(n+r)}$ の形のものも入ってくる。これは、「半無限格子」にした場合、反射波が反転した形で入ってくるためである。

2.4 エネルギー保存則のチェック

ここでは、簡単な応用例として、1 番目の錘だけに初速度 v_0 を与えた場合、すなわち、

$$U_n(0) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \dot{U}_1(0) = v_0, \quad \dot{U}_n(0) = 0, \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.36)$$

とした場合を考える。このときの解は、(2.35) 式より、

$$U_n(t) = v_0 \int_0^t [J_{2(n-1)}(2\omega_0 t') - J_{2(n+1)}(2\omega_0 t')] dt' \quad (2.37)$$

となる。この初めにおける 1 番の錘が持つ運動エネルギーは、

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad (2.38)$$

であるが、これが時刻 t における全エネルギーに等しいかを確かめてみよう。このときのばねのエネルギー、および、錘の運動エネルギーの和 $E(t)$ は、

$$E(t) = \frac{1}{2} k \sum_{n=1}^{\infty} (U_n - U_{n-1})^2 + \frac{1}{2} m \sum_{n=1}^{\infty} \dot{U}_n^2 \quad (2.39)$$

*1 この公式集では積分範囲が 0 から π となっているが、これを 0 から $\pi/2$ として 2 倍しても同じことになる。

である．この計算はやり方次第では，泥沼に陥るので詳しく説明する．まず， $U_n - U_{n-1}$ の部分を，Bessel 関数の微分公式

$$\frac{d}{dz} J_\nu(z) = \frac{1}{2} [J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)] \quad (2.40)$$

を逆に利用して，

$$\begin{aligned} U_n - U_{n-1} &= v_0 \int_0^t [J_{2n-2}(2\omega_0 t') - J_{2n+2}(2\omega_0 t') - J_{2n-4}(2\omega_0 t') + J_{2n}(2\omega_0 t')] dt' \\ &= v_0 \int_0^t \left[- [J_{2n-3-1}(2\omega_0 t') - J_{2n-3+1}(2\omega_0 t')] + [J_{2n+1-1}(2\omega_0 t') - J_{2n+1+1}(2\omega_0 t')] \right] dt' \\ &= \frac{v_0}{\omega_0} \int_0^t \left[- \frac{d}{dt'} J_{2n-3}(2\omega_0 t') + \frac{d}{dt'} J_{2n+1}(2\omega_0 t') \right] dt' = - \frac{v_0}{\omega_0} [J_{2n-3}(2\omega_0 t) - J_{2n+1}(2\omega_0 t)] \end{aligned} \quad (2.41)$$

となるので，(2.39) の $E(t)$ は，以下 Bessel 関数の変数を省略して，

$$E(t) = \frac{1}{2} m v_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[(J_{2n-3} - J_{2n+1})^2 + (J_{2n-2} - J_{2n+2})^2 \right] \quad (2.42)$$

となる．以下，これをつぎのように変形して，

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} m v_0^2 \left[(J_1 + J_3)^2 + (J_0 - J_4)^2 + \sum_{r=1}^{\infty} (J_r - J_{r+4})^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} m v_0^2 \left[J_0^2 + 2 \sum_{r=1}^{\infty} J_r^2 - J_2^2 + 2J_1 J_3 - 2J_0 J_4 - 2 \sum_{r=1}^{\infty} J_r J_{r+4} \right] \end{aligned} \quad (2.43)$$

となる．ここで，岩波「数学公式 III」P.212, P.213 の公式

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} J_r^2(z) = 1, \quad \sum_{r=-\infty}^{\infty} r^\ell J_r(z) J_{r+m}(z) = 0, \quad \ell = 0, 1, \dots, m-1, \quad m \text{ は正整数} \quad (2.44)$$

を使う．この第 1 式は， r が負，ゼロ，正の各場合に分け， $J_{-r} = (-1)^r J_r$ を使うと，

$$J_0^2 + 2 \sum_{r=1}^{\infty} J_r^2 = 1 \quad (2.45)$$

となるので，(2.43) 式の大括弧中初めの 1 項目，2 項目の和が 1 となる．あとの残りの部分がゼロになると良いのだが，これは，(2.44) 第 2 式で $\ell = 0$ ， $m = 4$ とし， r の和を，負，ゼロ，正の各場合に分けると，

$$J_2^2 - 2J_1 J_3 + 2J_0 J_4 + 2 \sum_{r=1}^{\infty} J_r J_{r+4} = 0 \quad (2.46)$$

となる．この結果から

$$E(t) = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad (2.47)$$

となって，確かに，エネルギー保存則が満たされる．同様にして，1 番の錘だけを初めにずらして置いたときの変位とエネルギーについても議論できるが，この場合のエネルギー保存則の計算は項数が増えるので大変面倒なことになる．ここではこの場合を扱わないことにする．

3 半無限 1 次元格子, 自由端の場合

3.1 方程式の導入

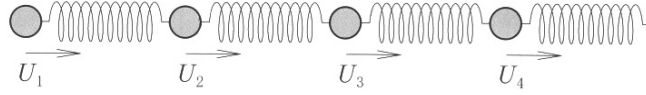


図 2 1 次元格子モデル, 自由端の場合

図 2 に示すように, 質量 m の N 個の錘と, ばね定数 k の $N - 1$ 個のばねを 1 次元的に繋いだ系を考える. このとき, 錘には, 左から番号を付け, $1, 2, 3, \dots, N$ とする. 錘 1 の左, および, 錘 N の右には, ばねは接続されていない, その意味で, この両端は自由端になっている. 時刻 t での n 番の錘の変位を $U_n(t)$ としたとき, その錘の運動方程式は, (2.1) 式と同じく,

$$m \frac{d^2}{dt^2} U_n = -k(-U_{n-1} + 2U_n - U_{n+1}), \quad n = 2, 3, \dots, N-1 \quad (3.1)$$

となる. ただし, 今回の場合, $n = 1, N$ に対しては, 左, および, 右のばねが存在しないので, そのときは,

$$m \frac{d^2}{dt^2} U_1 = -k(U_1 - U_2), \quad \frac{d^2}{dt^2} U_N = -k(-U_{N-1} + U_N) \quad (3.2)$$

となる. この式と (3.1) 式とを融合させるために, 仮想的な変位 U_0, U_{N+1} を考えて

$$U_0 = U_1, \quad U_{N+1} = U_N \quad (3.3)$$

としておくと, (3.1) (3.2) 式をまとめたものとして,

$$m \frac{d^2}{dt^2} U_n = -k(-U_{n-1} + 2U_n - U_{n+1}), \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.4)$$

と表すことができる.

この (3.4) の方程式を行列形式で書くために, 変位ベクトル $U(t)$ と係数行列 P を

$$U(t) = \begin{pmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ \vdots \\ U_{N-1}(t) \\ U_N(t) \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

と定義する. これを用いて, 方程式 (3.4) は,

$$m \frac{d^2}{dt^2} U(t) = -k P U(t) \quad (3.6)$$

と書き直される. 前と異なるところは, 行列 P の $P_{1,1}$ 成分と, $P_{N,N}$ 成分が 2 から 1 に変わっている.

3.2 方程式の解法

この行列 P を対角化するため、この行列の固有値方程式

$$PV = \lambda V, \quad V = (V_1, V_2, \dots, V_N)^t \quad (3.7)$$

を考える。ここに、 λ は固有値、 V は固有ベクトルである。これを成分で表すと、

$$-V_{n-1} + 2V_n - V_{n+1} = \lambda V_n, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (3.8)$$

となる。ただし、(3.3) 式と整合性をとるため、

$$V_0 = V_1, \quad V_{N+1} = V_N \quad (3.9)$$

とする。この (3.8) 式で $V_n = e^{in\theta}$ とおくと、

$$\lambda = 2(1 - \cos(\theta)) = 4 \sin^2(\theta/2) \quad (3.10)$$

となる。 θ の符号を変えたものも同じ λ を与えるので、より一般には、

$$V_n = \alpha e^{in\theta} + \beta e^{-in\theta} \quad (3.11)$$

とおける。この式に (3.9) の条件式を当てはめると、

$$\alpha + \beta = \alpha e^{i\theta} + \beta e^{-i\theta}, \quad \alpha e^{i(N+1)\theta} + \beta e^{-i(N+1)\theta} = \alpha e^{iN\theta} + \beta e^{-iN\theta} \quad (3.12)$$

となる。これから、 α, β が両方ともゼロにならないためには、

$$\begin{vmatrix} 1 - e^{i\theta} & 1 - e^{-i\theta} \\ e^{i(N+1)\theta} - e^{iN\theta} & e^{-i(N+1)\theta} - e^{-iN\theta} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{すなわち,} \quad \sin(N\theta)(1 - \cos(\theta)) = 0 \quad (3.13)$$

となる。これから、 θ の値が、

$$\theta^{(\ell)} = \frac{\ell\pi}{N}, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.14)$$

と決まる。このときの固有値 λ は、(3.10) 式より

$$\lambda^{(\ell)} = 4 \sin^2\left(\frac{\ell\pi}{2N}\right) \quad (3.15)$$

となり、また、このときの固有ベクトルを求めるには、(3.12) の第 1 式から $\beta = e^{i\theta}\alpha$ となり、これを (3.11) 式に代入するが、ここで、改めて、 α を $e^{-i\theta/2}\alpha$ とおき直してしまう。結果として、固有ベクトル $V^{(\ell)}$ の第 n 成分 $V_n^{(\ell)}$ は、

$$V_n^{(\ell)} = 2\alpha \cos\left(\frac{(n - \frac{1}{2})\ell\pi}{N}\right) \quad (3.16)$$

となる。 α を置き換えたのは、この式が実数のみで書けるようにしたためである。ここで、注目すべきことは、 $\ell = 0$ の場合があり得ることである。このときは、固有値 $\lambda^{(0)} = 0$ となるが、固有ベクトルの方はゼロではなく、 $V_n^{(0)} = 2\alpha$ と n に依存しない定数となる。これは両端を自由端としているので、すべての錘が振動することなく、そのまま平行移動するモードを表している。

この固有ベクトルを規格化するために,

$$\sum_{n=1}^N [V_n^{(\ell)}]^2 = 1 \quad (3.17)$$

を要請して, α を決めてみよう. 以下, α は ℓ の値にも依存するので, これを $\alpha^{(\ell)}$ と書くことにする. $\ell = 0$ の場合は, $V_n^{(0)} = 2\alpha^{(0)}$ であるから, すぐに和が求まり,

$$(2\alpha^{(0)})^2 = \frac{1}{N} \quad (3.18)$$

である. $\ell = 1, 2, \dots$ に対しては, (3.16) の cosine を和公式を使って分解してから, 和公式 (2.17) の他に,

$$\sum_{n=1}^N \cos^2(nx) = \frac{N}{2} + \frac{\cos((N+1)x) \sin(Nx)}{2 \sin x}, \quad \sum_{n=1}^N \sin(nx) = \frac{\sin((N+1)x/2) \sin(Nx/2)}{\sin(x/2)} \quad (3.19)$$

を用いると求められ,

$$(2\alpha^{(\ell)})^2 = \frac{2}{N}, \quad \text{for } \ell = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.20)$$

となる.

この規格化された固有ベクトル $V^{(\ell)}$ を, ℓ について, 横に並べたものを, 行列

$$A = \begin{pmatrix} V_1^{(0)} & V_1^{(1)} & \cdots & V_1^{(N-1)} \\ V_2^{(0)} & V_2^{(1)} & \cdots & V_2^{(N-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ V_N^{(0)} & V_N^{(1)} & \cdots & V_N^{(N-1)} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

と定義しておく. 固有ベクトルの直交性, および, 完全性から $A^\dagger A = A A^\dagger = 1$ (単位行列) となる. この行列によって係数行列 P は対角化され,

$$A^\dagger P A = \begin{pmatrix} \lambda^{(0)} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \lambda^{(1)} & 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & 0 & \lambda^{(2)} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda^{(N-1)} \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

となる.

ここで, 方程式 (3.6) を解くために, この式の左から A^\dagger を掛け, 変数 $U(t)$ を

$$A^\dagger U(t) = W(t), \quad W = (W^{(0)}, W^{(1)}, \dots, W^{(N-1)})^t \quad (3.23)$$

と $W(t)$ に変えてしまう. これで, 方程式は,

$$m \frac{d^2}{dt^2} W^{(\ell)}(t) = -k \lambda^{(\ell)} W^{(\ell)}(t), \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.24)$$

となる. この式で特に, $\ell = 0$ の場合は, $\lambda^{(0)} = 0$ なので, この解は, A, B を任意定数として,

$$W^{(0)}(t) = At + B \quad (3.25)$$

あるいは、 A, B を初期値、 $W^{(0)}(0), \dot{W}^{(0)}(0)$ で表して、

$$W^{(0)}(t) = \dot{W}^{(0)}(0)t + W^{(0)}(0) \quad (3.26)$$

となる。 $\ell \geq 1$ に対しては、前節の (2.25) 式から (2.28) 式までがそのまま成立するので、引用すると、

$$W^{(\ell)}(t) = \dot{W}^{(\ell)}(0) \int_0^t \cos(\omega_0 \sqrt{\lambda^{(\ell)}} t') dt' + W^{(\ell)}(0) \cos(\omega_0 \sqrt{\lambda^{(\ell)}} t) \quad (3.27)$$

となる。この式は $\ell = 0$ で、 $\lambda^{(0)} = 0$ の場合もそのままの形で成立している。後は、この $W(t)$ の式を変換式 (3.23) の逆を使って $U(t)$ の式に戻すだけである。これも、前節の (2.30) 式と形式的には同じで、ただし、 ℓ の和は 0 から $N-1$ に変わり、

$$U_n(t) = \sum_{\ell=0}^{N-1} \sum_{r=1}^N V_n^{(\ell)} V_r^{(\ell)} \left[\dot{U}_r(0) \int_0^t \cos(\omega_0 \sqrt{\lambda^{(\ell)}} t') dt' + U_r(0) \cos(\omega_0 \sqrt{\lambda^{(\ell)}} t) \right] \quad (3.28)$$

と求められる。最後に、(3.15) (3.16) (3.18) (3.20) の各式を用いて、 $\lambda^{(\ell)}, V_n^{(\ell)}, \alpha^{(\ell)}$ の各具体的形を代入すると、

$$U_n(t) = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \left[\dot{U}_r(0)t + U_r(0) \right] + \frac{2}{N} \sum_{\ell=1}^{N-1} \sum_{r=1}^N \cos\left(\frac{(n-\frac{1}{2})\ell\pi}{N}\right) \cos\left(\frac{(r-\frac{1}{2})\ell\pi}{N}\right) \\ \times \left[\dot{U}_r(0) \int_0^t \cos\left(2\omega_0 t' \sin\left(\frac{\ell\pi}{2N}\right)\right) dt' + U_r(0) \cos\left(2\omega_0 t \sin\left(\frac{\ell\pi}{2N}\right)\right) \right] \quad (3.29)$$

と求められたことになる。

3.3 $N \rightarrow \infty$ の極限

ここで、(3.29) 式の $N \rightarrow \infty$ の極限をとってみる。このとき、この式第 1 項目の和に関しては、ノンゼロの初期変位、初速度として与えられるものが有限個のときは、 $N \rightarrow \infty$ でゼロとなるので、考慮しなくてもよいことになる。残りの部分については ℓ の和を積分に変えることを考え、

$$\frac{\ell\pi}{2N} \rightarrow x, \quad \frac{\pi}{2N} \rightarrow dx \quad (3.30)$$

と連続変数にしてしまう。この操作で、この式は、

$$U_n(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \int_0^{\pi/2} dx \cos((2n-1)x) \cos((2r-1)x) \\ \times \left[\dot{U}_r(0) \int_0^t \cos(2\omega_0 t' \sin x) dt' + U_r(0) \cos(2\omega_0 t \sin x) \right] \quad (3.31)$$

となるので、あとは、cosine の積のところに積和公式を使って、Bessel 関数の積分表示式 (2.34) を使うと、この x 積分が実行され、

$$U_n(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \left[\dot{U}_r(0) \int_0^t \left(J_{2(n-r)}(2\omega_0 t') + J_{2(n+r-1)}(2\omega_0 t') \right) dt' + U_r(0) \left(J_{2(n-r)}(2\omega_0 t) + J_{2(n+r-1)}(2\omega_0 t) \right) \right] \quad (3.32)$$

と求められたことになる。

3.4 エネルギー保存則のチェック

ここでは、簡単な例として、初めに、1番の錘だけを、 a だけずらして置いた場合を考える。このときのばねのエネルギー E は、ばね定数 k を用いて

$$E = \frac{1}{2}ka^2 \quad (3.33)$$

である。時刻 t における各錘の変位 $U_n(t)$ は (3.32) 式より、

$$U_n(t) = a \left[J_{2(n-1)}(2\omega_0 t) + J_{2n}(2\omega_0 t) \right] \quad (3.34)$$

となる。これを用いて、時刻 t における錘とばねの全エネルギー

$$E(t) = \frac{1}{2}k \sum_{n=1}^{\infty} (U_{n+1} - U_n)^2 + \frac{1}{2}m \sum_{n=1}^{\infty} \dot{U}_n^2 \quad (3.35)$$

を求めたときに、その値が (3.33) 式の初めのエネルギーに等しいかを確認してみる。部分的に計算してみると、以下、Bessel 関数の変数は省略して、

$$U_{n+1} - U_n = a(J_{2n+2} - J_{2n-2}), \quad \dot{U}_n = a\omega_0(J_{2n-3} - J_{2n+1}) \quad (3.36)$$

となるので、これを (3.35) 式に代入して、

$$E(t) = \frac{1}{2}ka^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[(J_{2n+2} - J_{2n-2})^2 + (J_{2n-3} - J_{2n+1})^2 \right] = \frac{1}{2}ka^2 \left[(J_1 + J_3)^2 + (J_0 - J_4)^2 + \sum_{r=1}^{\infty} (J_r - J_{r+4})^2 \right] \quad (3.37)$$

となる。この式の大括弧の中は (2.43) 式の大括弧の中と同じであり、この値は 1 となることがすでに証明されているので、

$$E(t) = \frac{1}{2}ka^2 \quad (3.38)$$

となってエネルギー保存則が満たされている。

4 おわりに

前回の「全無限格子振動」に続いて、今回は「半無限格子振動」を解析してみた。

今回も、原稿段階で中西襄先生に見ていただいたところ、ここで求めた半無限格子振動と前回の全無限格子振動の間に成立する関係についてコメントを受けた。ここで、前回の結果である (2.40) 式を引用すると、

$$U_n(t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left[\dot{U}_r(0) \int_0^t J_{2(n-r)}(2\omega_0 t') dt' + U_r(0) J_{2(n-r)}(2\omega_0 t) \right] \quad (4.1)$$

となっている。この式で、 r に関する和の部分に $r=0$ と r が正の部分、負の部分に分けてから、初期条件を、 r の正負に関して反対称となる条件

$$U_0(0) = 0, \quad U_{-r}(0) = -U_r(0), \quad \dot{U}_0(0) = 0, \quad \dot{U}_{-r}(0) = -\dot{U}_r(0), \quad (r = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.2)$$

を課す。このとき、この式は、系の左端を固定端としたときの解 (2.35) 式になる。この解は、反射波が位相反転して正の方に伝播することを意味している。

同様に、系の左端を自由端としたときは、この (4.1) 式を r が正の部分とゼロまたは負の部分に分離してから、ゼロまたは負の部分で、和変数 r を $1-r$ と置き換えると、

$$U_n(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \left[\dot{U}_r(0) \int_0^t J_{2(n-r)}(2\omega_0 t') dt' + U_r(0) J_{2(n-r)}(2\omega_0 t) \right] \\ + \sum_{r=1}^{\infty} \left[\dot{U}_{1-r}(0) \int_0^t J_{2(n+r-1)}(2\omega_0 t') dt' + U_{1-r}(0) J_{2(n+r-1)}(2\omega_0 t) \right] \quad (4.3)$$

となる。ここで初期条件について、

$$U_{1-r}(0) = U_r(0), \quad \dot{U}_{1-r}(0) = \dot{U}_r(0), \quad (r = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.4)$$

すなわち、 $r = \frac{1}{2}$ に関し対称条件を課すと、この (4.3) 式は、系の左端を自由端としたときの解 (3.32) 式になる。これは、反射波が位相反転を起こさないで、そのままの形で反射することを意味する。

[謝辞]

「おわりに」のところで書いたように、今回も、京都大学名誉教授の中西襄先生に原稿段階で読んでいただき、大変有意義なアドバイスをいただきました。ここに、謹んで感謝いたします。

四元数と Euler の恒等式

矢野 忠^{*1}

The Quaternions and Euler Identity

Tadashi YANO ^{*2}

1 はじめに

『四元数の発見』の中で4次の Cauchy-Lagrange の恒等式の四元数を用いた導出を述べた [1]. 雑誌「数学教室」(国土社)に「多角数の定理の誕生」という記事があり, この記事のなかに同じ恒等式がもっと簡便に導出されているのを見つけた [2]. それをすこし敷衍してここで紹介したい.

もっとも私が4次の Cauchy-Lagrange の恒等式とよんだ恒等式は [2] では Euler の恒等式とよばれている. 名前は違うが, 同じ恒等式である. このエッセイでは Euler の恒等式とよぶ.

2 節では後で必要になる, 四元数の性質を復習し, 四元数の元の乗積表と (a, b, c, d) と (x, y, z, w) の直積表などを与える. 3 節では Euler の恒等式の証明を与える. 4 節はまとめである. 5, 6 節は付録で四元数の積 AX の共役について述べる. 7 節も付録で Euler の恒等式の別証明である.

2 四元数の性質

Euler の恒等式を四元数を用いて証明したいのだが, その前に四元数のいくつかの性質の復習を行っておこう. いま A を四元数とすれば,

$$A = a + bi + cj + dk \quad (2.1)$$

と表すことができる. ここで a, b, c, d はすべて実数とする. また四元数の元 $1, i, j, k$ の積は

$$1i = i1, 1j = j1, 1k = k1 \quad (2.2)$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad (2.3)$$

$$ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j \quad (2.4)$$

を満たす.

上の掛け算の規則を乗積表 1 に示す. 約束ごととして最も左の 1 列の各元と最上段の 1 行の各元を掛け算した結果だけを書いてある. たとえば, $ij = k$ であるが, 左辺の ij を略して k だけ書いてある. 以下, このような表が出てくれば, 同じ約束ごとをつかう.

$$A = a + bi + cj + dk, \quad (2.5)$$

$$X = x + yi + zj + wk \quad (2.6)$$

^{*1} 元愛媛大学工学部

^{*2} yanotad@earth.ocn.ne.jp

表 1 乗積表 1

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

とおくとき,

$$\begin{aligned} AX &= (a + bi + cj + dk)(x + yi + zj + wk) \\ &= P + Qi + Rj + Sk \end{aligned} \quad (2.7)$$

ここで P, Q, R, S は

$$P = ax - by - cz - dw \quad (2.8)$$

$$Q = bx + ay - dz + cw \quad (2.9)$$

$$R = cx + dy + az - bw \quad (2.10)$$

$$S = dx - cy + bz + aw \quad (2.11)$$

であるが, これをどうやって導くか. もちろん, AX の式の掛け算を分配法則を用いて丹念に計算し, そのときに $1, i, j, k$ の二つの積の乗積表 1 を用いればよい. そうやって『四元数の発見』では Euler の恒等式を導いた. それで別に支障はない.

しかし, 成田さんはちょっとちがった方法を用いる [2]. わかりやすいように乗積表 1 をいくつかに分解する. 以下の図で $+$ の符号を黒い丸印で $-$ の符号を中抜き丸印で表せば, 元 1 の符号は 図 1 を, 元 i の符号は 図 2 を, 元 j の符号は 図 3 を, 元 k の符号は 図 4 をそれぞれ参照すればよい.

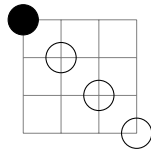


図 1 元 1 の正と負の符号の位置

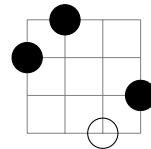


図 2 元 i の正と負の符号の位置

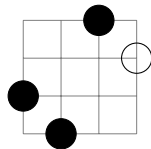


図 3 元 j の正と負の符号の位置

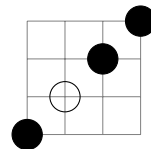


図 4 元 k の正と負の符号の位置

この 4 つの元 $1, i, j, k$ の位置とその符号がわかると (a, b, c, d) と (x, y, z, w) の直積表 2 を用いて四元数 $A = a + bi + cj + dk$ と $X = x + yi + zj + wk$ の積を (2.7) のように書き下すことができる.

四元数の積 AX がわかったから, これの共役 \overline{AX} を求めることができる. これは AX で $i \rightarrow -i, j \rightarrow -j, k \rightarrow -k$ とおきかえればよい. したがって

$$\overline{AX} = P - Qi - Rj - Sk \quad (2.12)$$

となる.

ここで, 複素数の積 ab の複素共役 \overline{ab} のしたがう, $\overline{ab} = \bar{a}\bar{b}$ という性質が四元数でも同様に成り立つか調べてみよう.

$$\bar{A} = a - bi - cj - dk \quad (2.13)$$

$$\bar{X} = x - yi - zj - wk \quad (2.14)$$

であるから, 直積表 2 と乗積表 3 を用いて

$$\begin{aligned} \bar{A}\bar{X} &= (ax - by - cz - dw) + (bx + ay + dz - cw)(-i) \\ &\quad + (cx - dy + az + bw)(-j) + (dx + cy - bz + aw)(-k) \end{aligned} \quad (2.15)$$

これを (2.12) の \overline{AX} と比べれば,

$$\overline{AX} \neq \bar{A}\bar{X} \quad (2.16)$$

である*3.

したがって, 他の可能性を探さなくてはならない. ここでは付録 2 の考察から $\overline{AX} = \bar{X}\bar{A}$ が成り立つかどうかを確かめよう*4. このとき乗積表 3, 直積表 4 を用いれば

$$\begin{aligned} \bar{X}\bar{A} &= (ax - by - cz - dw) + (bx + ay - dz + cw)(-i) \\ &\quad + (cx + dy + az - bw)(-j) + (dx - cy + bz + aw)(-k) \\ &= P - Qi - Rj - Sk \end{aligned} \quad (2.17)$$

したがって, (2.12) と (2.17) とを比べて

$$\overline{AX} = \bar{X}\bar{A} \quad (2.18)$$

が成り立つことが示された.

表 2 直積表 2

	x	y	z	w
a	ax	ay	az	aw
b	bx	by	bz	bw
c	cx	cy	cz	cw
d	dx	dy	dz	dw

表 3 乗積表 3

	1	$-i$	$-j$	$-k$
1	1	$-i$	$-j$	$-k$
$-i$	$-i$	-1	k	$-j$
$-j$	$-j$	$-k$	-1	i
$-k$	$-k$	j	$-i$	-1

表 4 直積表 4

	a	b	c	d
x	ax	bx	cx	dx
y	ay	by	cy	dy
z	az	bz	cz	dz
w	aw	bw	cw	dw

*3 付録 1 を参照せよ.

*4 この推測については付録 2 を見よ.

この $\overline{AX} = \bar{X}\bar{A}$ を用いれば, $|AX|^2 = |A|^2|X|^2$ をすぐに証明できる. すなわち,

$$\begin{aligned} |AX|^2 &= (AX)(\overline{AX}) \\ &= AX\bar{X}\bar{A} \\ &= A|X|^2\bar{A} \\ &= |A|^2|X|^2 \end{aligned} \tag{2.19}$$

絶対値 $|AX|$ も $|A|, |X|$ もすべて正であるから, 複素数まで成り立ってきた絶対値の法則 (law of moduli) が四元数でも成り立つ*5. すなわち $|AX| = |A||X|$ である.

また $|AX|^2 = |A|^2|X|^2$ は

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + w^2) = P^2 + Q^2 + R^2 + S^2 \tag{2.20}$$

が成り立つといってもよい. ここで, P, Q, R, S は (2.8)-(2.11) で与えられる.

つぎに 3 節で Euler の恒等式を証明するときに用いる, 重要な四元数の性質をもう一つ証明しておこう. それは $|X| = |\bar{X}|$ である.

これを証明するためには $X\bar{X} = \bar{X}X$ を証明しておこう. そのためにまず乗積表 5 と 6 とをつくる. さらに

表 5 乗積表 5

	1	-i	-j	-k
1	1	-i	-j	-k
i	i	1	-k	j
j	j	k	1	-i
k	k	-j	i	1

表 6 乗積表 6

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
-i	-i	1	-k	j
-j	-j	k	1	-i
-k	-k	-j	i	1

う一つ (x, y, z, w) と (x, y, z, w) との直積表 7 をつくっておく. 乗積表 5 と直積表 7 とを用いて $X\bar{X}$ の積をつく

表 7 直積表 7

	x	y	z	w
x	x ²	xy	xz	xw
y	xy	y ²	yz	yw
z	xz	yz	z ²	zw
w	xw	yw	zw	w ²

れば

$$X\bar{X} = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \tag{2.21}$$

が得られ, また乗積表 6 と直積表 7 とを用いて $\bar{X}X$ の積をつくれれば,

$$\bar{X}X = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \tag{2.22}$$

が得られる. したがって, $X\bar{X} = \bar{X}X$ が得られて, X と \bar{X} とは交換可能である.

*5 絶対値の法則は組成法則ともいわれる.

この結果が得られたのは直積表 7 が対角線の要素に関して対称であることと、乗積表 5 と 6 とがそれぞれの表で対角線の要素に対して反対称となっているために、それぞれの項の正と負の項が打ち消されて、対角線上のところの項しか和に残らないためである。

複素数の絶対値の 2 乗の定義にならって、四元数の絶対値の 2 乗を

$$|X|^2 = X\bar{X} = \bar{X}X = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \quad (2.23)$$

で定義する。

$|X|$ が正であることに注意すれば、

$$|X| = \sqrt{X\bar{X}} = \sqrt{\bar{X}X} = |\bar{X}| \quad (2.24)$$

すなわち、 $|X| = |\bar{X}|$ が成り立つ。この関係は 3 節の Euler の恒等式の証明において用いられる。

この 2 節の最後にちょっとよけいかもしれないが、つぎのことも示しておこう。

まず $(\overline{AX}) = \bar{X}\bar{A}$ で $A = \bar{X}$ とおけば、

$$\overline{(\bar{X}X)} = \bar{X}\bar{\bar{X}} = \bar{X}X \quad (2.25)$$

である。これは $\bar{X}X$ の共役が、共役をとる前の $\bar{X}X$ と等しいことを示す。したがって、 $\bar{X}X$ は実数である。

\bar{X} と X とが交換可能であるから、 $X\bar{X}$ が実数であるといってもよい。これはもともと $|X|^2 = X\bar{X}$ であるから、(2.22) から自明でもある。

3 Euler の恒等式

Euler の恒等式は次のような恒等式である。

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + w^2) = (ax + by + cz + dw)^2 + (bx - ay + dz - cw)^2 + (cx - dy - az + bw)^2 + (dx + cy - bz - aw)^2 \quad (3.1)$$

成田によれば、1748 年に Euler によって発見された恒等式だという [2]。

これから Euler の恒等式を証明しよう。そのために (2.19) を利用することを考える。これから求められる恒等式 (2.20) は P, Q, R, S に (2.8)-(2.11) を用いれば

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + w^2) = (ax - by - cz - dw)^2 + (bx + ay - dz + cw)^2 + (cx + dy + az - bw)^2 + (dx - cy + bz + aw)^2 \quad (2.20')$$

とも表される。恒等式 (3.1) と (2.20') とを比べてみると、(2.20') で x, y, z, w を次のように置き換えれば (3.1) が求められる。

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x \\ y &\rightarrow -y \\ z &\rightarrow -z \\ w &\rightarrow -w \end{aligned} \quad (3.2)$$

では、このような置き換えをするにはどうしたらよいだろうか。それは $|AX|^2 = |A|^2|X|^2$ で X を \bar{X} で置き換えればよい [3]。

すなわち、 $|A\bar{X}|^2 = |A|^2|\bar{X}|^2$ を考えればよい。ここで、右辺では $|\bar{X}|^2 = |X|^2$ が成り立つから、

$$|A\bar{X}|^2 = |A|^2|X|^2 \quad (3.3)$$

が成り立つ。

$A = a + bi + cj + dk, \bar{X} = x - yi - zj - wk$ とおけば、直積表 2 と乗積表 5 とから

$$A\bar{X} = (ax + by + cz + dw) + (bx - ay + dz - cw)i + (cx - dy - az + bw)j + (dx + cy - bz - aw)k \quad (3.4)$$

が得られる。これから

$$|A\bar{X}|^2 = (ax + by + cz + dw)^2 + (bx - ay + dz - cw)^2 + (cx - dy - az + bw)^2 + (dx + cy - bz - aw)^2 \quad (3.5)$$

であり、また

$$|A|^2|X|^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + w^2) \quad (3.6)$$

であるから、(3.3)、(3.5) と (3.6) とから Euler の恒等式 (3.1) が得られる*⁶。

4 おわりに

このエッセイでは四元数のいくつかの性質の導出を行い、さらに Euler の恒等式の導出の簡略な方法を紹介した。これは [2] で示された方法であるが、それが成田のオリジナルであるのか、それともさらにさかのぼってどこかに出所があるのかは知らない。いずれにしても四元数の積を計算するのはだれにとっても面倒なので、簡略な計算法は歓迎されることであろう。

5 付録 1 $\overline{AX} = \bar{A}\bar{X}$ は成り立つか

\overline{AX} の実部はもちろん、 $\bar{A}\bar{X}$ の実部に等しい。すなわち、 $\text{Re}(\overline{AX}) = \text{Re}(\bar{A}\bar{X})$ であるが、 \overline{AX} の虚部は $\bar{A}\bar{X}$ の虚部に等しくはない。すなわち、 $\text{Im}(\overline{AX}) \neq \text{Im}(\bar{A}\bar{X})$ である。

\overline{AX} の i の係数は (2.12) から $-Q = -(bx + ay - dz + cw)$ であるが、 $\bar{A}\bar{X}$ の i の係数は (2.15) から $-(bx + ay + dz - cw)$ である。これは第 3 項と第 4 項の符号が異なっている。また同様に (2.12) と (2.15) とから \overline{AX} の j の係数は $-R = -(cx + dy + az - bw)$ であるが、 $\bar{A}\bar{X}$ の j の係数は $-(cx - dy + az + bw)$ である。これは第 2 項と第 4 項の符号が異なっている。最後に \overline{AX} の k の係数は $-S = -(dx - cy + bz + aw)$ であるが、 $\bar{A}\bar{X}$ の k の係数は $-(dx + cy - bz + aw)$ である。これは第 2 項と第 3 項で符号が異なっている。

したがって、 $\overline{AX} = \bar{A}\bar{X}$ は成り立たない。

6 付録 2 \overline{AX} を推測する

AX からその共役をとった \overline{AX} を考える。そのときに AX に対する乗積表の部分がどう変わるか。それは乗積表 1 の第 1 行、第 1 列の部分を抜いた残りの部分で i, j, k を $-i, -j, -k$ に置き換えればよい。そうすると乗積表 8 となる。第 1 行と第 1 列はいま意味がないので、すべて * で置き換えた。

この乗積表 8 を乗積表 3 と比べる。まず乗積表 8 から部分的に取り出して、乗積表 9 で示した部分は乗積表 3 の対応した部分と同一である。

また、乗積表 8 から部分的に取り出して、乗積表 10 で示した部分は乗積表 3 の対応した部分を比べると、この部分はちょうど対角線の要素の線に対して反対称となっている。

したがって、 AX の共役 \overline{AX} は積の順序を変更した共役の積 $\bar{X}\bar{A}$ に等しいと推測される。

*⁶ 付録 3 に別の証明を与える。

表 8 乗積表 8

	*	*	*	*
*	1	$-i$	$-j$	$-k$
*	$-i$	-1	$-k$	j
*	$-j$	k	-1	$-i$
*	$-k$	$-j$	i	-1

表 9 乗積表 9

	*	*	*	*
*	1	$-i$	$-j$	$-k$
*	$-i$	**	**	**
*	$-j$	**	**	**
*	$-k$	**	**	**

表 10 乗積表 10

	*	*	*	*
*	**	**	**	**
*	**	-1	$-k$	j
*	**	k	-1	$-i$
*	**	$-j$	i	-1

7 付録 3 Euler の恒等式の別証明

ここで 3 節で述べた Euler 恒等式の別証明を与えておこう [4].

$$\begin{aligned}
 (a + bi + cj + dk)(x - yi - zj - wk) &= (ax + by + cz + dw) + (bx - ay + dz - cw)i \\
 &\quad + (cx - dy - az + bw)j + (dx + cy - bz - aw)k \\
 &= K + Li + Mj + Nk
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

同様に

$$\begin{aligned}
 (x + yi + zj + wk)(a - bi - cj - dk) &= (ax + by + cz + dw) - (bx - ay + dz - cw)i \\
 &\quad - (cx - dy - az + bw)j - (dx + cy - bz - aw)k \\
 &= K - Li - Mj - Nk
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

が成り立つ。ここで

$$K = ax + by + cz + dw \tag{7.3}$$

$$L = bx - ay + dz - cw \tag{7.4}$$

$$M = cx - dy - az + bw \tag{7.5}$$

$$N = dx + cy - bz - aw \tag{7.6}$$

である。(7.1) の両辺に (7.2) の両辺を右からかければ,

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + w^2) = K^2 + L^2 + M^2 + N^2 \tag{7.7}$$

が得られる。これは Euler の恒等式 (3.1) である。

どうしてこのような証明法を思いついたのであろうか。それは 2 次の Cauchy-Lagrange 恒等式 $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax - by)^2 + (bx + ay)^2$ の複素数を用いた証明法を思い出せばよい。

$$(a^2 + b^2) = (a + bi)(a - bi) \quad (7.8)$$

$$(x^2 + y^2) = (x + yi)(x - yi) \quad (7.9)$$

と因数分解できる。したがって、

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) &= (a + bi)(a - bi)(x + yi)(x - yi) \\ &= (a + bi)(x - yi)(x + yi)(a - bi) \\ &= [(ax + by) + (bx - ay)i][(ax + by) - (bx - ay)i] \\ &= (ax + by)^2 + (bx - ay)^2 \end{aligned} \quad (7.10)$$

複素数の場合はすべての数は交換可能であるから問題はないが、四元数を使うときには四元数が交換可能ではないことに注意をしなければいけない。

しかし、四元数においてもその絶対値の2乗は実数となるので項の中の他の部分と交換可能である。またある四元数とその共役四元数とは交換可能である。このことを考慮すれば、複素数のときに $(a + bi)(x - yi)$ と $(x + yi)(a - bi)$ の積を選んだことを四元数の場合に一般化すれば、 $(a + bi + cj + dk)(x - yi - zj - wk)$ と $(x + yi + zj + wk)(a - bi - cj - dk)$ の積を選ぶことが考えられよう。そしてこれは

$$\begin{aligned} & (a + bi + cj + dk) \overbrace{(x - yi - zj - wk)(x + yi + zj + wk)}^{\text{先に演算する}} (a - bi - cj - dk) \\ &= (a + bi + cj + dk)(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)(a - bi - cj - dk) \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + w^2) \end{aligned} \quad (7.11)$$

となることがすぐにわかり、Euler の恒等式 (3.1) の左辺が出てくる。また (7.11) の最左辺の前の2つの因子の積と後ろの2つの因子の積はそれぞれ

$$(a + bi + cj + dk)(x - yi - zj - wk) = K + Li + Mj + Nk \quad (7.1)$$

$$(x + yi + zj + wk)(a - bi - cj - dk) = K - Li - Mj - Nk \quad (7.2)$$

となる。こうして (7.7) が得られる。

最後に (2.19) で $c = d = x = w = 0$ とおけば、(7.10) が得られることをつけ加えておこう。

(2018. 8. 8)

参考文献

- [1] 矢野 忠, 『四元数の発見』(海鳴社, 2014) 7-11
- [2] 成田 収, 多角数の定理の誕生, 「数学教室」(2018.8) 52-55
- [3] 遠山 啓 編, 『現代数学教育事典』(明治図書, 1965) 90-91
- [4] W. W. ソーヤー (宮本敏雄, 田中勇 訳), 『数学へのプレリユード』(みすず書房, 1978) 70-72

「超弦理論と Dirac のハサミ」への補足 2

伊藤仁之*1

Supplement 2 to ‘Superstring Theory and Dirac’s Scissors’

Hitoshi ITO*2

概要

この小文は数学・物理通信 7 巻 3 号, 20 ページに掲載されたエッセイへの修正・補足です.

数学・物理通信 7 巻 3 号, 20 ページ 第 2 節 **Dirac のハサミ** の第一パラグラフを次の通り, 修正します.

ひもの一端をどこかに固定し, 他端にハサミを取り付ける. ひもを軸としてハサミを右回りに 2 回転する. これを斜め上方から見ており, 視線の方向を空間固定の回転軸とする. この 2 回転ねじれば, ひもをたるませて, ハサミをひもの中ほど左側に持って行き, ひもを持ち上げ, ハサミがひもの下を通るようにして, 並進運動で元の位置に戻すと, ほどける. これはスピノルの (巨視的!) 模型だ. というわけだが, これは怪しい. 実験幾何学の手法で謎を解いてみよう. Dirac がいう並進運動は回転運動に分解することができる. 2 回転状態から, 空間固定軸を基準にして, ひもの上で左 1 回転する. この回転を元に戻すとき, ひも軸が反転するように, ひもを持ち上げ, 右 1 回転する. この右回転は, ひも軸を基準にすると, 左回転になる. つまり, ひも軸を基準にすると, 右 2 回転は左 2 回転で元に戻るという当たり前のことをいってるに過ぎない.

参考文献: 「物理教育」 49 巻 (4) p.341; 訂正記事 65 巻 (4) p.236.

*1 近畿大学名誉教授

*2 htito@kcn.ne.jp

編集後記

ようやく厳しく暑い気候も去って、しのぎやすい落ち着いた季節になりつつあります。特に今年の夏は、西日本と東日本は何度か台風にさらされて大災害を蒙りました。その上さらに、北海道が未曾有の、道全体にわたる震度 7 の大地震に遭遇しました。これらの災厄により心ならずも落命された方々に対しご冥福をお祈り申し上げますと共に、遺された方々の健康や健全な毎日から復興の路を力強く歩まれんことをお祈り申し上げます。

前置きが長くなってしまった。今回の投稿原稿も物理系ばかりで、数学系の投稿論文が待ち遠しくなる。しかし、近い中に一編の投稿を予定しておりますのでご期待ください。もっとも、物理の論文とはいっても問題解決の手法は数学なので、実際はまるで数学の論文かと思間違ふほどである。

今後とも幅広い見地から、斬新な論理の展開や従来行われている証明法の革新等が見いだされることを期待したいと思います。

毎回同じような言葉ですが、「継続は力なり」を信じて、お互いに体調に留意しつつ努力を続けましょう。

新関章三 (2018.9.9)

・嵐去り夜鳴く虫の天下かな (羽前峰三)