

数学・物理通信

8 卷 7 号 2018 年 9 月

編集 新関章三・矢野 忠

2018 年 9 月 12 日

目次 (Contents)

1. Bessel 関数と一次元格子振動 (5)

世戸憲治 2

2. 危ないベッセル関数の公式

中西 襄 14

3. 小さな疑問

矢野 忠 22

4. 伊藤氏の論説「超弦理論と Dirac のハサミ」へのコメント

中西 襄 26

5. 編集後記

矢野 忠 28

1. Bessel Function and One-Dimensional Lattice Oscillation (5)

Kenji SETO 2

2. Risky Formula for the Bessel Function

Noboru NAKANISHI 14

3. A Little Question

Tadashi YANO 22

4. Comment on Ito's Paper "Superstring Theory and Dirac's Scissors"

Noboru NAKANISHI 26

5. Editorial Comments

Tadashi YANO 28

Bessel 関数と一次元格子振動 (5)

世戸 憲治 *

Bessel Function and One-Dimensional Lattice Oscillation (5)

Kenji SETO*

1 はじめに

前回の「Bessel 関数と 1 次元格子振動 (4)」(「数学・物理通信」, 8 巻 6 号) では, 錘とばねを半無限の形に繋いだ 1 次元格子について, 各錘の初期変位, 初速度を与えた場合の振動問題を扱った. 今回は, この半無限格子の一端を強制的に振動させた場合の解析を行う.

2 方程式の導入とその解法

2.1 方程式の導入

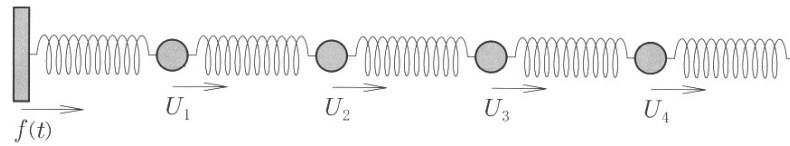


図 1 1 次元格子モデル, 強制振動

図 1 に示すように, 質量 m の錘と, ばね定数 k のばねを 1 次元的に交互に繋いだ系を考える. 前回と異なることは, この左端にある錘は, ばねをとおして強制的に振動する振動板に繋がっている. 錘の個数は初め N 個としておくが, この N はあとで無限大とするので, 半無限の振動系を考えることになる. これら錘には左から右に向かって $1, 2, \dots, N$ と番号を付けておく. 振動しているときの時刻 t における n 番目の錘の変位を $U_n(t)$ とする. この錘の運動方程式を考えるが, $n = 2, 3, \dots, N$ に対して, n 番目の錘には, ばねによって, 右から $k(U_{n+1} - U_n)$ の力を受け, 左から $k(U_n - U_{n-1})$ の力をうけるので, その運動方程式は,

$$m \frac{d^2}{dt^2} U_n = -k(-U_{n-1} + 2U_n - U_{n+1}), \quad n = 2, 3, \dots, N \quad (2.1)$$

となる. ただし, ここで, $n = N$ としたときは U_{N+1} という項が入ってくるが, これはばねの右端を意味し, この端は固定されているものとして, 常に, $U_{N+1}(t) = 0$ とする.

1 番目の錘の運動方程式は, 右から $k(U_2 - U_1)$ の力を受け, また, 時刻 t における振動板の強制的変位を

* 北海学園大学名誉教授

E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

$f(t)$ とすると、左から $k(U_1 - f(t))$ の力を受けるので、

$$m \frac{d^2}{dt^2} U_1 = -k(2U_1 - U_2) + kf(t) \quad (2.2)$$

となる。これら (2.1) (2.2) の方程式をまとめて書くと、

$$m \frac{d^2}{dt^2} U_n = -k(-U_{n-1} + 2U_n - U_{n+1}) + kf(t)\delta_{n,1}, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2.3)$$

となる。ただし、境界条件として、

$$U_0(t) = 0, \quad U_{N+1}(t) = 0 \quad (2.4)$$

とする。また、初期条件として、初期変位と初速度はすべての n についてゼロ

$$U_n(0) = 0, \quad \left. \frac{dU_n}{dt} \right|_{t=0} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2.5)$$

とする。

この (2.3) の方程式を行列形式で書くために、変位ベクトル $U(t)$ と係数行列 P 、および、ベクトル C を

$$U(t) = \begin{pmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ \vdots \\ U_{N-1}(t) \\ U_N(t) \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

と定義する。これを用いて、方程式 (2.3) は、

$$m \frac{d^2}{dt^2} U(t) = -kPU(t) + kf(t)C \quad (2.7)$$

と書き直される。

2.2 方程式の解法

ここで、行列 P を対角化するため、この行列の固有値方程式、

$$PV = \lambda V, \quad V = (V_1, V_2, \dots, V_N)^t \quad (2.8)$$

を考える。やり方は前回と同じであるが、この論文の独立性のためくり返すことにする。

ここに、 λ は固有値、 V は固有ベクトルである。これは成分で表すと、

$$-V_{n-1} + 2V_n - V_{n+1} = \lambda V_n, \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (2.9)$$

となる。ただし、(2.4) 式と整合させるために、

$$V_0 = V_{N+1} = 0 \quad (2.10)$$

とおくことにする。この (2.9) 式で $V_n = e^{in\theta}$ とおくと、固有値 λ が

$$\lambda = 2(1 - \cos \theta) = 4 \sin^2(\theta/2) \quad (2.11)$$

と θ の関数で表される。 θ の符号を変えたものと同じ λ を与えるので、一般には

$$V_n = \alpha e^{in\theta} + \beta e^{-in\theta} \quad (2.12)$$

とおける。これに (2.10) の条件式を課すと、

$$\alpha + \beta = 0, \quad \alpha e^{i(N+1)\theta} + \beta e^{-i(N+1)\theta} = 0 \quad (2.13)$$

となるので、 α, β が同時にゼロとならないためには、

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{i(N+1)\theta} & e^{-i(N+1)\theta} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{すなわち} \quad \sin((N+1)\theta) = 0 \quad (2.14)$$

でなければならない。これから、 θ が

$$\theta^{(\ell)} = \frac{\ell\pi}{N+1}, \quad \ell = 1, 2, \dots, N \quad (2.15)$$

と決まり、固有値は、

$$\lambda^{(\ell)} = 4 \sin^2 \left(\frac{\ell\pi}{2(N+1)} \right) \quad (2.16)$$

固有ベクトル $V^{(\ell)}$ の成分 $V_n^{(\ell)}$ は、

$$V_n^{(\ell)} = 2\alpha \sin \left(\frac{n\ell\pi}{N+1} \right) \quad (2.17)$$

となる。ただし、(2.12) 式から直接求めたときは、この式に虚数の i がつくが、ここでは、元の α を改めて $-i\alpha$ とおき直し、この式に虚数が付かないようにした。また、方程式 (2.14) を解いたとき、 $\theta = 0$ 、 ($\ell = 0$) という解もあり得るが、これでは、固有値も固有関数もゼロとなるので除くことにする。

このベクトルを規格化するため、

$$\sum_{n=1}^N [V_n^{(\ell)}]^2 = 1 \quad (2.18)$$

を要請して α の値を決めてみよう。これには、岩波「数学公式 II」 P.19 にある三角関数の和公式

$$\sum_{n=1}^N \sin^2(nx) = \frac{N}{2} - \frac{\cos((N+1)x) \sin(Nx)}{2 \sin x} \quad (2.19)$$

を使う。(2.18) 式に (2.17) 式を代入して、

$$1 = \sum_{n=1}^N [V_n^{(\ell)}]^2 = (2\alpha)^2 \sum_{n=1}^N \sin^2 \left(\frac{n\ell\pi}{N+1} \right) = (2\alpha)^2 \sum_{n=1}^{N+1} \sin^2 \left(\frac{n\ell\pi}{N+1} \right) \quad (2.20)$$

となるが、和公式 (2.19) で N を $N+1$ と置き換えたものを使うと、 α が

$$(2\alpha)^2 = \frac{2}{N+1} \quad (2.21)$$

と決まる。当然のことながら、異なる固有値に属する固有ベクトルは直交するので、

$$\sum_{n=1}^N V_n^{(\ell)} V_n^{(\ell')} = \delta_{\ell, \ell'} \quad (2.22)$$

である．この固有ベクトル $V^{(\ell)}$ を ℓ について横に並べたものを，行列

$$A = \begin{pmatrix} V_1^{(1)} & V_1^{(2)} & \cdots & V_1^{(N)} \\ V_2^{(1)} & V_2^{(2)} & \cdots & V_2^{(N)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ V_N^{(1)} & V_N^{(2)} & \cdots & V_N^{(N)} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

と定義しておく．固有ベクトルの直交性，および，完全性から $A^\dagger A = A A^\dagger = 1$ (単位行列) となる．この行列によって係数行列 P は対角化され，

$$A^\dagger P A = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \lambda^{(2)} & 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & 0 & \lambda^{(3)} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda^{(N)} \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

となる．

ここで，方程式 (2.7) の左側から $A^\dagger$ を掛け，変数 $U(t)$ を

$$A^\dagger U(t) = W(t), \quad W = (W^{(1)}, W^{(2)}, \dots, W^{(N)})^t \quad (2.25)$$

と $W(t)$ におき直すと，成分表示で，

$$m \frac{d^2}{dt^2} W^{(\ell)}(t) = -k \lambda^{(\ell)} W^{(\ell)}(t) + k f(t) V_1^{(\ell)}, \quad \ell = 1, 2, \dots, N \quad (2.26)$$

という分離された非同次の方程式となる．ここで，強制変位である $f(t)$ は Fourier sine 変換で与えられるものとし，

$$f(t) = \int_0^\infty g(\omega) \sin(\omega t) d\omega \quad (2.27)$$

とする．この逆変換は，

$$g(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(t') \sin(\omega t') dt' \quad (2.28)$$

である．先に，この非同次方程式 (2.26) の特解を求める．そのためには， $W^{(\ell)}$ も Fourier sine 変換で書けるものとし，

$$W^{(\ell)}(t) = \int_0^\infty h^{(\ell)}(\omega) \sin(\omega t) d\omega \quad (2.29)$$

とおき，これと (2.27) 式の $f(t)$ を，方程式 (2.26) に代入すると，

$$(\omega^{(\ell)2} - \omega^2) \int_0^\infty h^{(\ell)}(\omega) \sin(\omega t) d\omega = \omega_0^2 V_1^{(\ell)} \int_0^\infty g(\omega) \sin(\omega t) d\omega \quad (2.30)$$

となる．ここで，ばねと錘で決まる角振動数 ω_0 と，この振動系の第 ℓ モードにおける角振動数 $\omega^{(\ell)}$ を

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}, \quad \omega^{(\ell)} = \omega_0 \sqrt{\lambda^{(\ell)}} = 2\omega_0 \sin\left(\frac{\ell\pi}{2(N+1)}\right) \quad (2.31)$$

と定義した．この方程式 (2.30) が成立するためには，

$$h^{(\ell)}(\omega) = \frac{\omega_0^2 V_1^{(\ell)}}{\omega^{(\ell)2} - \omega^2} g(\omega) \quad (2.32)$$

であればよい。これから、非同次方程式 (2.26) の特解が

$$W^{(\ell)}(t) = \omega_0^2 V_1^{(\ell)} \int_0^\infty \frac{g(\omega)}{\omega^{(\ell)2} - \omega^2} \sin(\omega t) d\omega \quad (2.33)$$

と求められる。ここで、 $\omega = \omega^{(\ell)}$ となるとき、すなわち、強制振動の振動数と第 ℓ モードの振動数が等しいときは、共振状態を表すことになる。 ω の積分としては、この点で主値をとるものとする。

さらに、方程式 (2.26) の一般解は、これに、同次部分の解を加えて、

$$W^{(\ell)}(t) = A \sin(\omega^{(\ell)} t) + B \cos(\omega^{(\ell)} t) + \omega_0^2 V_1^{(\ell)} \int_0^\infty \frac{g(\omega)}{\omega^{(\ell)2} - \omega^2} \sin(\omega t) d\omega \quad (2.34)$$

と求められる。ここで、 A, B は任意定数であり、これらは初期値 $W^{(\ell)}(0), \dot{W}^{(\ell)}(0)$ で与えられる量である。いまの場合、(2.5) 式で示したように、 $U_n(0), \dot{U}_n(0)$ はすべてゼロとしているので、これらの線形結合である $W^{(\ell)}(0), \dot{W}^{(\ell)}(0)$ もすべてゼロである。この条件から A, B を求めると、

$$A = -\frac{\omega_0^2 V_1^{(\ell)}}{\omega^{(\ell)}} \int_0^\infty \frac{\omega g(\omega)}{\omega^{(\ell)2} - \omega^2} d\omega, \quad B = 0 \quad (2.35)$$

と決まるので、このときの解は、

$$W^{(\ell)}(t) = -\frac{\omega_0^2 V_1^{(\ell)}}{\omega^{(\ell)}} \left[\int_0^\infty \frac{\omega g(\omega)}{\omega^{(\ell)2} - \omega^2} d\omega \right] \sin(\omega^{(\ell)} t) + \omega_0^2 V_1^{(\ell)} \int_0^\infty \frac{g(\omega) \sin(\omega t)}{\omega^{(\ell)2} - \omega^2} d\omega \quad (2.36)$$

と書かれる。この式に、強制変位 $f(t)$ の逆変換である (2.28) 式の $g(\omega)$ を代入するが、式が長くなるので部分的に計算していく。初めにこの第 2 項の ω 積分は、

$$\int_0^\infty \frac{g(\omega) \sin(\omega t)}{\omega^{(\ell)2} - \omega^2} d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \frac{\sin(\omega t) \sin(\omega t')}{\omega^{(\ell)2} - \omega^2} d\omega \right] f(t') dt' \quad (2.37)$$

となるが、ここで、三角関数の積の部分は積和公式を使い、さらに、岩波「数学公式 I」P.255 にある積分公式

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{b^2 - x^2} dx = \frac{\pi}{2b} \sin(ab), \quad a, b > 0, \quad \text{分母がゼロのところは主値をとる} \quad (2.38)$$

を使うと、

$$(2.37) = \frac{1}{2\omega^{(\ell)}} \int_0^\infty \left[\sin(\omega^{(\ell)} |t - t'|) - \sin(\omega^{(\ell)} (t + t')) \right] f(t') dt' \quad (2.39)$$

となる。第 1 項目の ω 積分は、

$$\int_0^\infty \frac{\omega g(\omega)}{\omega^{(\ell)2} - \omega^2} d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \frac{\omega \sin(\omega t')}{\omega^{(\ell)2} - \omega^2} d\omega \right] f(t') dt' = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(t') \partial_{t'} \left[\int_0^\infty \frac{\cos(\omega t')}{\omega^{(\ell)2} - \omega^2} d\omega \right] dt' \quad (2.40)$$

となって、ここで、公式 (2.38) を用いると、

$$= -\frac{1}{\omega^{(\ell)}} \int_0^\infty f(t') \partial_{t'} \sin(\omega^{(\ell)} t') dt' = -\int_0^\infty \cos(\omega^{(\ell)} t') f(t') dt' \quad (2.41)$$

となる。これらの結果を (2.36) 式に代入すると、

$$W^{(\ell)}(t) = \frac{\omega_0^2 V_1^{(\ell)}}{2\omega^{(\ell)}} \int_0^\infty \left[2 \sin(\omega^{(\ell)} t) \cos(\omega^{(\ell)} t') + \sin(\omega^{(\ell)} |t - t'|) - \sin(\omega^{(\ell)} (t + t')) \right] f(t') dt' \quad (2.42)$$

となるが、この sine の中の括弧をはずして計算していくと、

$$W^{(\ell)}(t) = \frac{\omega_0^2 V_1^{(\ell)}}{\omega^{(\ell)}} \int_0^t \sin(\omega^{(\ell)} (t - t')) f(t') dt' \quad (2.43)$$

と意外なほど簡単な結果となる．ここで、 $t' > t$ のところはゼロとなるので、 t' の積分範囲が 0 から t までとなることに注意する．これで $W^{(\ell)}(t)$ が求められたので、これから (2.25) 式の逆変換 $U(t) = \Delta W(t)$ を用いて、 $U(t)$ に戻すと、

$$U_n(t) = \sum_{\ell=1}^N V_n^{(\ell)} W^{(\ell)}(t) = \omega_0^2 \sum_{\ell=1}^N \frac{V_1^{(\ell)} V_n^{(\ell)}}{\omega^{(\ell)}} \int_0^t \sin(\omega^{(\ell)}(t-t')) f(t') dt' \quad (2.44)$$

となる．これで $U(t)$ が求められたが、以下の都合のため、sine 関数の部分を積分形にして、

$$U_n(t) = \omega_0^2 \sum_{\ell=1}^N V_1^{(\ell)} V_n^{(\ell)} \int_0^t \left[\int_{t'}^t \cos(\omega^{(\ell)}(t-t'')) dt'' \right] f(t') dt' \quad (2.45)$$

と書くことができる．最後に、 $\omega^{(\ell)}$ の定義 (2.31)、また、 $V_n^{(\ell)}$ の定義 (2.17) (2.21) を用いて書き直すと、

$$U_n(t) = \frac{2\omega_0^2}{N+1} \sum_{\ell=1}^N \sin\left(\frac{\ell\pi}{N+1}\right) \sin\left(\frac{n\ell\pi}{N+1}\right) \int_0^t \left[\int_{t'}^t \cos\left(2\omega_0 \sin\left(\frac{\ell\pi}{2(N+1)}\right)(t-t'')\right) dt'' \right] f(t') dt' \quad (2.46)$$

となる．

2.3 $N \rightarrow \infty$ の場合

ここで、(2.46) 式の $N \rightarrow \infty$ の極限を取った場合を考える．このときは、 ℓ の和を積分に置き換えることにし、

$$\frac{\ell\pi}{2(N+1)} \rightarrow x, \quad \frac{\pi}{2(N+1)} \rightarrow dx \quad (2.47)$$

と連続変数にしてしまう．この操作で (2.46) 式は

$$U_n(t) = \frac{4\omega_0^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} dx \sin(2x) \sin(2nx) \int_0^t \left[\int_{t'}^t \cos(2\omega_0(t-t'') \sin x) dt'' \right] f(t') dt' \quad (2.48)$$

となる．ここで、三角関数の積になっているところは積和公式を使い、さらに、岩波「数学公式 Ⅲ」P.178 にある Bessel 関数の積分表示^{*1}

$$J_{2n}(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(2nx) \cos(z \sin x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.49)$$

を用いると、この $U_n(t)$ は、Bessel 関数を用いた形で、

$$U_n(t) = \omega_0^2 \int_0^t \left[\int_{t'}^t \left(J_{2n-2}(2\omega_0(t-t'')) - J_{2n+2}(2\omega_0(t-t'')) \right) dt'' \right] f(t') dt' \quad (2.50)$$

となる．さらに、岩波「数学公式 Ⅲ」P.189 の Bessel 関数の不定積分

$$\int J_\nu(z) dz = 2 \sum_{r=0}^{\infty} J_{\nu+2r+1}(z) \quad (2.51)$$

を用いると、この t'' 積分が実行されて、

$$U_n(t) = \omega_0 \int_0^t \left[J_{2n-1}(2\omega_0(t-t')) + J_{2n+1}(2\omega_0(t-t')) \right] f(t') dt' \quad (2.52)$$

^{*1} この公式集では積分範囲が 0 から π となっているが、これを 0 から $\pi/2$ として 2 倍しても同じことになる．

と求められる。このとき、一旦は入ってくる無限和がこの2項を残して、消えてしまうことに注意する。このように、結果は、Bessel 関数 $J_{2n\pm1}$ と強制変位 f との《畳み込み積分 convolution》の形となる。これは、時刻 t での変位は、それよりも過去の強制変位の情報に基づいて決められるという当然の結果である。

この結果の式が、方程式 (2.3) を満たしているかを確認してみよう。これから、

$$\frac{d}{dt}U_n(t) = \omega_0^2 \int_0^t (J_{2n-2} - J_{2n+2})f(t')dt' \quad (2.53)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}U_n(t) = \omega_0^2 f(t)\delta_{n,1} + \omega_0^3 \int_0^t (J_{2n-3} - J_{2n-1} - J_{2n+1} + J_{2n+3})f(t')dt' \quad (2.54)$$

ここで、 $J_n(0) = 1$, for $n = 0$, $= 0$, for $n \neq 0$ を用いた。また、Bessel 関数の変数 $2\omega_0(t - t')$ は、式が長くなるので、すべて省略した。また、

$$-U_{n-1}(t) + 2U_n(t) - U_{n+1}(t) = -\omega_0 \int_0^t (J_{2n-3} - J_{2n-1} - J_{2n+1} + J_{2n+3})f(t')dt' \quad (2.55)$$

となるので、これらを $N \rightarrow \infty$ とした (2.3) 式に代入すると確かに満たされている。

2.4 エネルギー式

ここでのモデルは、強制変位を与えているので、当然ながら一般には、エネルギーは保存されない。

[例 1]

ここで、最も簡単な例として、強制変位 $f(t)$ が

$$f(t) = f_0\theta(t) \quad (2.56)$$

と与えられた場合を考える。ここに、 θ は単位階段関数である。つまり、 $f(t)$ は $t = 0$ の瞬間に一定値 f_0 に跳ね上がるというモデルである。この $f(t)$ を (2.52) 式に代入して積分を実行すると、不定積分の公式 (2.51) を用いて、

$$U_n(t) = f_0 \sum_{r=0}^{\infty} \left[J_{2(n+r)}(2\omega_0 t) + J_{2(n+r+1)}(2\omega_0 t) \right] \quad (2.57)$$

となる。この式は、岩波「数学公式 III」P.211 の Bessel 関数に関する和公式

$$J_0(z) + 2 \sum_{r=1}^{\infty} J_{2r}(z) = 1 \quad (2.58)$$

を用い、さらに、和に関する式、

$$\sum_{r=1}^{\infty} J_{2r}(z) - \sum_{r=1}^{n-1} J_{2r}(z) = \sum_{r=n}^{\infty} J_{2r}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} J_{2(n+r)}(z) \quad (2.59)$$

を用いると、無限和を有限和の形にすることができ、

$$U_n(t) = f_0 \left[1 - 2 \sum_{r=1}^{n-1} J_{2r}(2\omega_0 t) - J_0(2\omega_0 t) - J_{2n}(2\omega_0 t) \right] \quad (2.60)$$

となる。特に、 $n = 1$ の場合は、

$$U_1(t) = f_0 \left[1 - J_0(2\omega_0 t) - J_2(2\omega_0 t) \right] \quad (2.61)$$

となるので、 t が大きくなるにしたがい、 $U_1(t)$ は f_0 に近づく。

時刻 t におけるばねと錘が持つエネルギーを $E(t)$ とすると、

$$E(t) = \frac{1}{2}k(U_1 - f(t))^2 + \frac{1}{2}k \sum_{n=1}^{\infty} (U_{n+1} - U_n)^2 + \frac{1}{2}m \sum_{n=1}^{\infty} \dot{U}_n^2 \quad (2.62)$$

と与えられる。これに (2.60) 式を代入して計算するが、部分的に求めていくと、以下、Bessel 関数の変数部分は省略して、

$$U_{n+1} - U_n = -f_0(J_{2n} + J_{2(n+1)}) \quad (2.63)$$

$$\dot{U}_n = \omega_0 f_0(J_{2n-1} + J_{2n+1}) \quad (2.64)$$

となる。これから、(2.62) 式右辺 2 項目と 3 項目の和は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}k \sum_{n=1}^{\infty} (U_{n+1} - U_n)^2 + \frac{1}{2}m \sum_{n=1}^{\infty} \dot{U}_n^2 &= \frac{1}{2}kf_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} [(J_{2n} + J_{2n+2})^2 + (J_{2n-1} + J_{2n+1})^2] \\ &= \frac{1}{2}kf_0^2 \sum_{r=1}^{\infty} (J_r + J_{r+2})^2 = \frac{1}{2}kf_0^2 \left[2 \sum_{r=1}^{\infty} J_r^2 - J_1^2 - J_2^2 + 2 \sum_{r=1}^{\infty} J_r J_{r+2} \right] \end{aligned} \quad (2.65)$$

となる。以下は、岩波「数学公式 Ⅲ」P.212, P.213 Bessel 関数の和公式

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} J_r^2(z) = 1, \quad \sum_{r=-\infty}^{\infty} J_r(z) J_{r+m}(z) = 0, \quad m \text{ は正整数} \quad (2.66)$$

を使うと、

$$J_0^2 + 2 \sum_{r=1}^{\infty} J_r^2 = 1, \quad -J_1^2 + 2J_0J_2 + 2 \sum_{r=1}^{\infty} J_r J_{r+2} = 0 \quad (2.67)$$

となるので、(2.65) 式は

$$(2.65) = \frac{1}{2}kf_0^2 [1 - (J_0 + J_2)^2] \quad (2.68)$$

となる。一方、エネルギー式 (2.62) の 1 項目は、 U_1 が (2.61) で与えられることと、 $t > 0$ で $f(t) = f_0$ となるので、

$$(2.62) \text{ の 1 項目} = \frac{1}{2}kf_0^2 (J_0 + J_2)^2 \quad (2.69)$$

となる。これら 2 つの結果、(2.68) (2.69) を足し合わせると、エネルギー $E(t)$ は

$$E(t) = \frac{1}{2}kf_0^2 \quad (2.70)$$

となる。この値は、振動板が初めに瞬間的に動いたときに、系に与えられるエネルギーで、その後は振動板は動いていないので、この値がそのまま保たれるということである。

[例 2]

もう一つの例を挙げる。強制振動の変位 $f(t)$ が Bessel 関数で、

$$f(t) = f_0 J_\nu(2\omega_0 t) \quad (2.71)$$

と与えられる場合を考える。岩波「数学公式 Ⅲ」P.206 にある Bessel 関数同士の畳み込みに関する公式

$$\int_0^x J_\mu(x-t) J_\nu(t) dt = 2 \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r J_{\mu+\nu+2r+1}(x) \quad (2.72)$$

を使うと (2.52) 式の積分ができて、変位 $U_n(t)$ は意外にも簡単な形、

$$U_n(t) = f_0 J_{2n+\nu}(2\omega_0 t) \quad (2.73)$$

となる^{*2}。これをエネルギー式 (2.62) に代入したものを、 $E(t, \nu)$ と書くことにして、

$$E(t, \nu) = \frac{1}{2} k f_0^2 \sum_{r=0}^{\infty} (J_{\nu+r} - J_{\nu+r+2})^2 \quad (2.74)$$

となるが、これは、時刻 t までに、振動板がばねと錘の系に対しなした仕事量 $W(t)$ に等しいはずである。この仕事は、時刻 t' において、振動板が一番左のばねを押す力は、 $k[f(t') - U_1(t')]$ であり、これに微小時間 dt' の間に振動板が動く長さ $\dot{f}(t')dt'$ を掛けて足し合わせたもの、すなわち、

$$W(t) = \int_0^t k[f(t') - U_1(t')] \dot{f}(t') dt' \quad (2.75)$$

として得られる。これに、(2.71) 式の $f(t)$ 、(2.73) 式の $U_1(t)$ を代入したものを $W(t, \nu)$ とすると、

$$W(t, \nu) = k f_0^2 \omega_0 \int_0^t [J_{\nu}(2\omega_0 t') - J_{\nu+2}(2\omega_0 t')] [J_{\nu-1}(2\omega_0 t') - J_{\nu+1}(2\omega_0 t')] dt' \quad (2.76)$$

となる。一方、(2.74) 式の $E(t, \nu)$ を時間で微分すると、Bessel 関数の変数を省略して、

$$\frac{d}{dt} E(t, \nu) = k f_0^2 \omega_0 [J_{\nu} - J_{\nu+2}] [J_{\nu-1} - J_{\nu+1}] \quad (2.77)$$

となる。この結果から、(2.76) の $W(t, \nu)$ は

$$W(t, \nu) = \int_0^t \frac{d}{dt'} E(t', \nu) dt' = E(t, \nu) - E(0, \nu) \quad (2.78)$$

となる。(2.74) 式から $\nu > 0$ であれば、 $E(0, \nu) = 0$ なので、 $E(t, \nu) = W(t, \nu)$ で確かに、総エネルギーは振動板がなした仕事に等しい。

ところで、(2.74) 式の和は、一般の ν について求めることは困難であるが、 ν が整数の場合は (2.67) 式を用いて和をとることができる。例えば、 $\nu = 0$ の場合は、

$$E(t, 0) = \frac{1}{2} k f_0^2 [1 - 2J_1^2(2\omega_0 t)] \quad (2.79)$$

となり、 $\nu = 1$ の場合は、

$$E(t, 1) = \frac{1}{2} k f_0^2 [1 - (J_0(2\omega_0 t) - J_2(2\omega_0 t))^2 - 2J_1^2(2\omega_0 t)] \quad (2.80)$$

となる。 $\nu = 0$ の場合、 $E(0, 0) = \frac{1}{2} k f_0^2$ となるが、これは、(2.71) から、 $f(0) = f_0$ となる、つまり、 $t = 0$ の瞬間にゼロから f_0 に飛び上がるため、そのとき $\frac{1}{2} k f_0^2$ のエネルギーを獲得してしまうためである。その後、時刻 t までに獲得するエネルギーが $W(t, 0)$ で、時刻 t におけるエネルギーは、 $E(t, 0) = E(0, 0) + W(t, 0)$ となる。 $\nu = 1$ の場合は $E(0, 1) = 0$ となるので、 $E(t, 1) = W(t, 1)$ である。

^{*2} この解は、「Bessel 関数と 1 次元格子振動」(「数学・物理通信」, 6 巻 6 号) で得たものである。ただし、前回の ω_0 は今回の $2\omega_0$ に相当する。

3 おわりに

前回は、半無限格子の各錘に初期位置と初速度を与えた場合を解析した。それに対し、今回はばねの左端を強制的に動かした場合の格子振動を扱ってみた。今回の論文で最も重要な結果は (2.52) 式である。ここで、もう一度引用すると

$$U_n(t) = \omega_0 \int_0^t \left[J_{2n-1}(2\omega_0(t-t')) + J_{2n+1}(2\omega_0(t-t')) \right] f(t') dt' \quad (3.1)$$

という式である。しかし、これを初めに求めたときは、 t' の積分範囲が 0 から ∞ になってしまった。これは間違いであることにすぐに気が付いた。なぜなら、現時刻 t の振動を決めるのに、未来の $f(t')$ のことまで必要とするのはおかしいと思ったからである。つまり、これは因果律に反することである。しかし、どこで間違えたかまったくわからないままに 2, 3 日が過ぎてしまった。あるとき、温泉に浸かりながら考えていたらその理由が見えてきた。間違いのものは、(2.38) 式を使って (2.39) 式を求めるところにあった。(2.39) 式の $(t-t')$ には絶対値が付いているが、初めはこれを忘れていたのである。(2.38) 式の左辺は a について偶関数であるが、右辺は a に付いて奇関数になっている。したがって、これはもともと $a > 0$ のときしか成立しない式であった。考えてみると当たり前のことであるが、数式には慣れたはずの私も、ときには、ドジなことをするものと、反省させられたしだいである。

今回書いたものを原稿の段階で、中西襄先生に見てもらったところ、先生から以下の 2 点について注意があった。その一つは、ここで得た結論式 (3.1) は微分演算子法を使うと前回の結果から容易に求められるということを見せていただいた。この微分演算子法に関しては、先生が最近書かれた本「微分方程式」(丸善出版、平成 28 年 10 月) に詳しく述べられているので、そちらを参照していただきたいのだが、要点だけを述べる。まず、方程式 (2.3) において、非同次の項をデルタ関数としたときの関数 U_n を $\hat{U}_n$ と書くことにして、

$$\frac{d^2}{dt^2} \hat{U}_n = -\omega_0^2 (-\hat{U}_{n-1} + 2\hat{U}_n - \hat{U}_{n+1}) + \delta(t)\delta_{n,1} \quad (3.2)$$

となる。ここで、(2.31) 式の ω_0 を用いた。また、この $\hat{U}_n$ は時間の次元を持つことに注意する。この解 $\hat{U}_n$ が求められると、元の解 U_n は、この $\hat{U}_n$ と関数 $\omega_0^2 f(t)$ との畳み込み、先生の本では《合成積》

$$U_n(t) = \omega_0^2 \int_0^t \hat{U}_n(t-t') f(t') dt' \quad (3.3)$$

として与えられる。そこで、この方程式 (3.2) を演算子法を用いて解くわけだが、この式のように最高階微分の係数が 1 の 2 階線形微分方程式で、デルタ関数非同次項を持つ解、すなわち、基本解は、 $t < 0$ において恒等的にゼロで、 $t = 0$ における初期値が、1 階微分 = 1、0 階微分 = 0 とした同次方程式の解と等価になることが知られている。したがって、これは前回の論文の解である (2.35) 式、すなわち、

$$U_n(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \left[\dot{U}_r(0) \int_0^t \left(J_{2(n-r)}(2\omega_0 t') - J_{2(n+r)}(2\omega_0 t') \right) dt' + U_r(0) \left(J_{2(n-r)}(2\omega_0 t) - J_{2(n+r)}(2\omega_0 t) \right) \right] \quad (3.4)$$

において、

$$\dot{U}_1(0) = 1, \quad \dot{U}_r(0) = 0, \quad (r = 2, 3, \dots), \quad U_r(0) = 0, \quad (r = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.5)$$

とおいたときの解が $\hat{U}_n(t)$ となるので、

$$\hat{U}_n(t) = \int_0^t \left(J_{2(n-1)}(2\omega_0 t') - J_{2(n+1)}(2\omega_0 t') \right) dt' \quad (3.6)$$

となる．この積分は積分公式 (2.51) によって容易に実行され

$$\hat{U}_n(t) = \frac{1}{\omega_0} [J_{2n-1}(2\omega_0 t) + J_{2n+1}(2\omega_0 t)] \quad (3.7)$$

となるので，これを (3.3) 式の合成積に代入したものが (3.1) 式となる．という訳で，確かに微分演算子と前回の結果を用いると，いとも簡単に解が求まってしまう．

もう一つ，先生から受けた注意点は， $U_0(t)$ がどうなるかということである．この論文では (2.4) 式のように，初め $U_0(t) = 0$ とおき，係数行列 P の固有値方程式を解く段階では，これに合わせて，固有ベクトルの第ゼロ成分を $V_0 = 0$ とした．しかし，実際には，最後の結論式である (3.1) 式を求めるまで， $U_0(t)$ の値は，一度も用いていないので， $U_0(t)$ がゼロあっても，そうでなくてもかまわないと言えばそれまでである．この (3.1) 式で $n = 0$ とすると，

$$U_0(t) = \omega_0 \int_0^t [J_{-1}(2\omega_0(t-t')) + J_1(2\omega_0(t-t'))] f(t') dt' \quad (3.8)$$

となって， $J_{-1}(z) = -J_1(z)$ なので， $U_0(t) = 0$ となる．しかしながら，前節の [例 2] で示したように，(2.71) 式で $f(t)$ を与えたときの解 (2.73) 式では， $n = 0$ としたとき， $U_0(t) = f(t)$ となっている．これは明らかに矛盾である．また，図 1 から考えても，方程式 (2.3) で考えても，初めから $U_0(t) = f(t)$ としたほうが，自然であるし，理解しやすいことは確かである．この点に関し先生からいただいたコメントはつぎのようなものである．まず，ここでは，Bessel 関数の変数はゼロまたは正の部分でしか使わないので，この Bessel 関数に階段関数の $\theta(x)$ を掛けた $J_\nu(x)\theta(x)$ の形で考える．Bessel 関数の級数展開の式

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(\nu + m + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2m} \quad (3.9)$$

と，先に紹介した先生の本にある Y 超関数の式

$$Y_\nu(x) = \frac{x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} \theta(x), \quad \text{特に } n \text{ を非負整数として } \nu = -n \text{ のときは, } Y_{-n}(x) = \delta^{(n)}(x) \quad (3.10)$$

を合わせて書くことにすると，

$$J_\nu(x)\theta(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{x^m}{2^{\nu+2m}} Y_{\nu+m+1}(x) \quad (3.11)$$

と書ける．この式で $\nu = -1$ としたときは， $Y_0(x) = \delta(x)$ なので，通常ならば消えるはずの $m = 0$ の項が残る，

$$J_{-1}(x)\theta(x) = 2\delta(x) - J_1(x)\theta(x) \quad (3.12)$$

と，補正項が付いた形となる．(3.8) 式の Bessel 関数にもこの階段関数 $\theta(x)$ を付けた形で考えると，

$$\begin{aligned} U_0(t) &= \omega_0 \int_0^\infty [J_{-1}(2\omega_0(t-t'))\theta(2\omega_0(t-t')) + J_1(2\omega_0(t-t'))\theta(2\omega_0(t-t'))] f(t') dt' \\ &= \omega_0 \int_0^\infty 2\delta(2\omega_0(t-t')) f(t') dt' = f(t) \end{aligned} \quad (3.13)$$

となって，辻褄の合う結果がでてくる．これで謎が解けたわけであるが，ここでの計算には超関数が重要な役割をはたしている．

なお，デルタ関数の補正項が付いた (3.12) 式は一見奇異な感じを与える．しかし，この式で x の符号を変えて $-x$ とすると， $J_{-1}(x)$ ， $J_1(x)$ が奇関数， $\delta(x)$ が偶関数であることから，

$$J_{-1}(x)\theta(-x) = -2\delta(x) - J_1(x)\theta(-x) \quad (3.14)$$

となって，これと元の (3.12) 式との和をとると，デルタ関数の部分が消えて， $J_{-1}(x) = -J_1(x)$ が得られる．

[謝辞]

「おわりに」のところで書いたように，いつものことながら今回も，京都大学名誉教授の中西襄先生に原稿段階で読んでいただき，大変有意義なアドバイスを二つもいただきました．ここに，謹んで感謝申し上げます．

危ないベッセル関数の公式

—世戸論文に関連して—

Risky Formula for the Bessel Function

— In Connection with Seto's Paper —

中西 襄^{*1}

Noboru NAKANISHI ^{*2}

1 世戸論文に関連して

世戸憲治氏は論文「Bessel 関数と 1 次元格子振動 (5)」(「数学・物理通信」8 巻 7 号の前論文)において、^{*3}等質量の錘を同じばねで交互に 1 列に接続した半無限の振動子を考え、一端に強制振動を加えた場合の振動を論じた。錘の質量を m , ばね定数を k , $k/m = \omega_0^2$ ($\equiv \omega^2$ と略す), 第 n 番目の錘の変位を $U_n(t)$, 強制振動変位を $f(t)$ とするとき, $t \geq 0$ に対して無限連立線形微分方程式

$$\frac{d^2 U_n(t)}{dt^2} = \omega^2 [U_{n-1}(t) - 2U_n(t) + U_{n+1}(t) + f(t)\delta_{n1}], \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.1)$$

が成立する。ただし $U_0(t) \equiv 0$ で, それは $U_1(t)$ に対する微分方程式が他のものと同様の形になるように便宜的に挿入されたものである。解は, 同次の場合の微分方程式の解から容易に構成することができ,

$$U_n(t) = \omega \int_0^t dt' [J_{2n-1}(2\omega(t-t')) + J_{2n+1}(2\omega(t-t'))] f(t') \quad (1.2)$$

で与えられることが示される。ただし, $J_\nu(x)$ は第 1 種ベッセル関数である。

ここでもちろん $n = 1, 2, \dots$ である。しかしこれを $n = 0$ の場合へ拡張して適用したらどうなるだろうか。ベッセル関数の公式

$$J_{-1}(x) = -J_1(x) \quad (1.3)$$

を使うと $U_0(t) = 0$ になるように思える。が, ちょっと待った! 微分方程式 (1.1) は物理的にはわかり易いかも知れないが, 数学的に見れば人工的である, せっかく $U_0(t)$ というものを導入するのならば, それを恒等的に 0 とおかないで, $f(t)$ と同定し, (1.1) の右辺の最後の項を取り去るのが自然だろう。すなわち (1.1) を

$$\frac{d^2 U_n(t)}{dt^2} = \omega^2 [U_{n-1}(t) - 2U_n(t) + U_{n+1}(t)], \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.4)$$

に置き換え, $U_0(t)$ を与えられた任意関数とするのである。だがこうすると, 公式 (1.3) により (1.2) の右辺は $n = 0$ で 0 で, 左辺と一致しないように見える。だが, じつはそうではないのだ!

(1.3) を導く議論は, じつはちょっとずるいことをやっていたのだ。証明の途中で $x^{-1}/\Gamma(0)$ のような項を捨てているのである。これは $x = 0$ では不定形 ∞/∞ になっているので, 無条件に捨ててしまうのは危険だ。このところは, 超関数論を用いてきちんと論じなければならないのである。

^{*1} 京都大学名誉教授

^{*2} nbr-nak@trio.plala.or.jp

^{*3} 本節の概略は世戸論文の末尾に付け加えられた。

上の議論では明示しなかったが、すべての関数は $t < 0$ では恒等的に 0 であると想定している。つまり、 $U_n(t) \equiv U_n(t)\theta(t)$ である。ここに $\theta(x)$ はヘヴィサイドの段差関数である ($x > 0$ のとき $\theta(x) = 1$, $x < 0$ のとき $\theta(x) = 0$)。次節以下で詳しく説明するように、超関数論的に正しく考察すると、恒等式

$$J_{-1}(x)\theta(x) = 2\delta(x) - J_1(x)\theta(x) \quad (1.5)$$

が成立する。この式を使うと、(1.2) は $n = 0$ でも（トリヴィアルに）成立していることがわかる!! じっさい、

$$\begin{aligned} U_0(t)\theta(t) &\stackrel{?}{=} \omega \int_{-\infty}^{\infty} dt' [J_{-1}(2\omega(t-t')) + J_1(2\omega(t-t'))] \theta(t-t') U_0(t')\theta(t') \\ &= \omega \int_{-\infty}^{\infty} dt' 2\delta(2\omega(t-t')) U_0(t')\theta(t') \\ &= U_0(t)\theta(t) \end{aligned} \quad (1.6)$$

である。これは気持ちのいい結果といえるだろう。

なお、(1.5) は (1.3) とコンシステントである。じっさい、(1.5) で x の符号を変え、 $J_{\pm 1}(x)$ が奇関数だということを使うと、

$$J_{-1}(x)\theta(-x) = -2\delta(x) - J_1(x)\theta(-x) \quad (1.7)$$

となる。(1.5) と (1.7) を加えると (1.3) になる。

2 問題の一般の設定

前節の話は、一般の整数次の第 1 種ベッセル関数に関する公式

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (2.1)$$

が、大変きわどい公式だという話に拡張される。この公式自身が間違っているというわけではないが、これに普通のたちの良い関数 $f(x)$ を乗じて 0 から a まで積分した式

$$\int_0^a dx J_{-n}(x) f(x) = (-1)^n \int_0^a dx J_n(x) f(x) \quad (2.2)$$

はもはや成立しないということである。

なぜこんなヘンテコなことが生じるのかは、公式 (2.1) の証明を見直してみるとわかる。第 1 種ベッセル関数の冪展開による定義式は

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(\nu + m + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2m} \quad (2.3)$$

である。とくに非負整数次ベッセル関数は、

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! (n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m} \quad (2.4)$$

である。 ν が負の整数 $-n$ の場合は、通常の推論では、ガンマ関数は 0 および負整数において極をもつので、 $1/\Gamma(-n+m+1)$ が $m < n$ のとき 0 になると考える。そうすると、和は $m = n$ から始まって、

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! (m-n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2m} \quad (2.5)$$

となる． $m - n = k$ と書き換えると，

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{(n+k)! k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \quad (2.6)$$

である．これと (2.4) を比較すれば (2.1) が得られる．

この証明で問題となる点は，捨てた項には x の負幂がかかっていることである．これを $x = 0$ から積分すると，(2.2) の左辺のような積分は一般に発散する．したがって初等解析学の立場では，左辺は無意味になる．それを知らずに公式 (2.1) を使ったのが悪いということになるわけだ．しかし公式 (2.1) にそんな注意書きがしてある公式集は見たことがないであろう．

無限大もうまくコントロールすれば，有用な公式が得られる．超関数論の立場から公式 (2.1) を見直すと，次のような公式に置き換えるのが合理的である：

$$J_{-n}(x)\theta(x) = \sum_{m=0}^{[(n-1)/2]} \frac{2^{n-2m}(n-m-1)!}{(n-2m-1)!} \delta^{(n-2m-1)}(x) + (-1)^n J_n(x)\theta(x) \quad (2.7)$$

ただし， $\delta^{(k)}(x)$ はデルタ関数の k 階微分を表す．公式 (2.7) の証明は 4 節に与える．

(2.7) で x を $-x$ に置き換えると， $J_{\pm n}(-x) = (-1)^n J_{\pm n}(x)$ ， $\delta^{(k)}(-x) = (-1)^k \delta^{(k)}(x)$ であるから，

$$J_{-n}(x)\theta(-x) = - \sum_{m=0}^{[(n-1)/2]} \frac{2^{n-2m}(n-m-1)!}{(n-2m-1)!} \delta^{(n-2m-1)}(x) + (-1)^n J_n(x)\theta(-x) \quad (2.8)$$

となる．(2.7) と (2.8) とを加えると，(2.1) が再生される．

3 Y 超関数

Y 超関数は超関数論の創始者シュヴァルツによって導入された複素パラメータをもつ超関数である．大変便利な超関数なので，機会があるごとに宣伝しているのだが，残念ながらなかなか普及しないようだ．以下，その概要を紹介しておこう（拙著「微分方程式 物理的発想の解析学」（丸善出版，サイエンスパレット，2016）の 49-51 ページ参照）．

Y 超関数は

$$Y_{\nu}(x) \equiv \frac{x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} \theta(x) \quad (3.1)$$

によって定義される． $Y_1(x) = \theta(x)$ である．数学ではヘヴィサイドの段差関数は $Y(x)$ と書くので，その拡張という意味で文字 Y が使われたものと思われる． $\Gamma(\nu)$ はもちろんオイラーのガンマ関数

$$\Gamma(\nu) \equiv \int_0^{\infty} dx x^{\nu-1} e^{-x} \quad (3.2)$$

である．よく知られているように， $\nu = n$ が正の整数ならば $\Gamma(n) = (n-1)!$ である． $\Gamma(\nu)$ は ν の解析関数で $\nu = -n$ (n は 0 または正の整数) のとき $\Gamma(\nu)$ は単純極をもつが，それ以外の有限なところでは正則である．

$\Gamma(-n)$ が無限大なので， $Y_{-n}(x)$ は 0 になってしまうように見えるが， $x^{-n-1}\theta(x)$ が $x = 0$ において極の半ペラのような特異性をもつために，超関数としてそれは

$$Y_{-n}(x) = \delta^{(n)}(x) \quad (3.3)$$

に他ならないのである．それはどういう意味かというと，無限遠で急減少で無限回微分可能な関数 $\varphi(x)$ に対し，

$$Y_{\nu}[\varphi] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx Y_{\nu}(x)\varphi(x) \quad (3.4)$$

が ν の整関数になるということである。 $\varphi(x)$ が何らかのラプラス変換の式で書けるものとすれば,

$$\varphi(x) = e^{-sx} \quad (s > 0) \quad (3.5)$$

の場合について証明すれば十分である。まず, (3.1) から, 変数変換 $sx = y$ により

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx Y_\nu(x) e^{-sx} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dx x^{\nu-1} e^{-sx} = \frac{s^{-\nu}}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dy y^{\nu-1} e^{-y} = s^{-\nu} \quad (3.6)$$

である ((3.2) を用いた)。他方, (3.3) から,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx Y_{-n}(x) e^{-sx} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta^{(n)}(x) e^{-sx} = s^n \quad (3.7)$$

であるから, たしかに (3.6) を $\nu = -n$ まで解析接続したものと一致している。

このように, Y 超関数はデルタ関数の微分の階数 (の符号を変えたもの) を複素数に解析的に拡張したものと解釈することができる。それゆえ, 非整数階微分の理論では大活躍するのである。

4 公式 (2.7) の証明

まず, 次のレンマを証明しておこう。

[レンマ]

$$\begin{aligned} x^m \delta^{(n)}(x) &= 0 && \text{for } n < m, \\ &= (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!} \delta^{(n-m)}(x) && \text{for } n \geq m \end{aligned} \quad (4.1)$$

[証明]

第 1 式の証明. $m - n = r > 0$ なので,

$$x^{n+r} \delta^{(n)}(x) = 0 \quad (4.2)$$

を, $r > 0$ を固定し n に関する数学的帰納法で証明すればよい. $n = 0$ のときは明らか. n のとき成立すると仮定し, それを微分すると,

$$(n+r)x^{n+r-1} \delta^{(n)}(x) + x^{n+r} \delta^{(n+1)}(x) = 0 \quad (4.3)$$

となる. 第 1 項を移項し, 両辺に x を乗ずると, (4.2) を用いて

$$x^{n+r+1} \delta^{(n+1)}(x) = -(n+r)x^{n+r} \delta^{(n)}(x) = 0 \quad (4.4)$$

を得る. これは (4.2) の n を $n+1$ に置き換えた式に他ならない。

第 2 式の証明. まず, $n = m$ の場合の式

$$x^m \delta^{(m)}(x) = (-1)^m m! \delta(x) \quad (4.5)$$

を m に関する数学的帰納法で証明する. $m = 0$ のときは自明. (4.1) の第 1 式から

$$x^{m+1} \delta^{(m)}(x) = 0 \quad (4.6)$$

であるから, これを微分すれば

$$(m+1)x^m \delta^{(m)}(x) + x^{m+1} \delta^{(m+1)}(x) = 0 \quad (4.7)$$

を得る。ゆえに

$$\begin{aligned}
x^{m+1}\delta^{(m+1)}(x) &= -(m+1)x^m\delta^{(m)}(x) \\
&= -(m+1)(-1)^m m! \delta(x) \\
&= (-1)^{m+1}(m+1)! \delta(x)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

なる。この結果は (4.5) の m を $m+1$ に置き換えたものである。したがって (4.5) は正しい。以下、(4.5) を出発点として、 n に関する数学的帰納法を用いる。(4.1) 第 2 式を用いて、

$$\begin{aligned}
x^m\delta^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx}[x^m\delta^{(n)}(x)] - mx^{m-1}\delta^{(n)}(x) \\
&= (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!} \delta^{(n-m+1)}(x) - m(-1)^{m-1} \frac{n!}{(n-m+1)!} \delta^{(n-m+1)}(x) \\
&= (-1)^m (n-m+1+m) \frac{n!}{(n-m+1)!} \delta^{(n-m+1)}(x) \\
&= (-1)^m \frac{(n+1)!}{(n+1-m)!} \delta^{(n+1-m)}(x)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

である。すなわち (4.1) 第 2 式の n を $n+1$ に置き換えた式が得られた。□

[注意] $n > m$ のとき、 $x^m\delta^{(n)}(x) = (-1)^m m! \delta^{(n-m)}(x)$ とはならないことに注意。

さて、(2.7) の証明に向かう。(2.3) と Y 超関数の定義により、

$$J_\nu(x)\theta(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 2^{-\nu-2m}}{m!} Y_{\nu+2m}(x) \tag{4.10}$$

となる。したがって、(3.3) により、

$$[J_{-n}(x) - (-1)^n J_n(x)]\theta(x) = \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m 2^{n-2m} x^m \delta^{(n-m-1)}(x) \tag{4.11}$$

となる。レンマの式 (4.1) を用いると、

$$\begin{aligned}
[J_{-n}(x) - (-1)^n J_n(x)]\theta(x) &= \sum_{m=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^m 2^{n-2m} \cdot (-1)^m \frac{(n-m-1)!}{(n-2m-1)!} \delta^{(n-2m-1)}(x) \\
&= \sum_{m=0}^{[(n-1)/2]} \frac{2^{n-2m} (n-m-1)!}{(n-2m-1)!} \delta^{(n-2m-1)}(x)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

となって、(2.7) が得られる。

とくに

$$\begin{aligned}
J_{-1}(x)\theta(x) &= 2\delta(x) - J_1(x)\theta(x), \\
J_{-2}(x)\theta(x) &= 4\delta'(x) + J_2(x)\theta(x), \\
J_{-3}(x)\theta(x) &= 8\delta''(x) + 2\delta(x) - J_3(x)\theta(x)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

である。

5 複素次元不変デルタ関数

筆者が、 $x=0$ の所では (2.1) にお釣りの項がつくことに気づいたのは、今から 40 年あまり前、不変デルタ関数の複素次元への拡張を考えたときである (N. Nakanishi, Commun. Math. Phys. **48**, 97-118 (1976)). その頃

は、量子色力学のくりこみ可能性を証明するのに、ゲージ不変性を壊さないファインマン積分の有限化の方法として、複素次元へ解析接続する「次元くりこみ法」が流行していた時期であった。

不変デルタ関数とは、場の量子論で重要なローレンツ不変な超関数のことである。現実の時空の次元数はもちろん 4 なので、まず 4 次元不変デルタ関数について説明しよう。時空 x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) はミンコフスキーのベクトルで、 $x^2 \equiv x^\mu x_\mu \equiv (x^0)^2 - \mathbf{x}^2$ はローレンツ不変量 ($x^2 > 0$ のとき時間的、 $x^2 = 0$ のとき光錐的、 $x^2 < 0$ のとき空間的) である。4 次元不変デルタ関数とは、クライン・ゴールドン方程式

$$(\square + m^2)\Phi(x) = 0 \quad (5.1)$$

のローレンツ不変な解のことである。ここに $\square \equiv (\partial/\partial x^0)^2 - \Delta$ は 4 次元ダランベルシアン (Δ は 3 次元ラプラシアン)、 m は質量を表す非負の実数である。

(5.1) の演算子は x^μ の符号を変えても不変なので、解は奇関数のものと偶関数のものがある。このうち奇関数のものは、正準量子化された自由スカラー場の交換関係に現れるもので、 $\Delta(x; m^2)$ と書く。これはコーシー問題

$$\begin{aligned} (\square + m^2)\Delta(x; m^2) &= 0, \\ \Delta(x; m^2)|_{x^0=0} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x^0}\Delta(x; m^2)|_{x^0=0} &= -\delta(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (5.2)$$

の解として定義することができる。

コーシー問題 (5.2) の解は、4 次元フーリエ表示を使うと、

$$\Delta(x; m^2) = \frac{1}{(2\pi)^3 i} \int d^4 p \, \epsilon(p_0) \delta(p^2 - m^2) e^{-ipx} \quad (5.3)$$

と書ける。ここに、 p_μ は 4 次元運動量、 $\epsilon(t) \equiv \theta(t) - \theta(-t)$ は符号関数、積分領域は 4 次元運動量空間全体である。(5.3) は、表示式から明らかに (5.1) を満たし、ローレンツ不変で、奇関数である。

$\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2} \equiv \omega_{\mathbf{p}}$ と書くと、 $p^2 - m^2 = (p_0 - \omega_{\mathbf{p}})(p_0 + \omega_{\mathbf{p}})$ と因数分解できるので、 p_0 の積分では $p_0 = \omega_{\mathbf{p}}$ と $p_0 = -\omega_{\mathbf{p}}$ のときのみ寄与がある。ただし、 p_0 の符号関数がかかっているのも、後者の寄与には負号が付く。つまり、

$$\epsilon(p_0) \delta(p^2 - m^2) = \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} [\delta(p_0 - \omega_{\mathbf{p}}) - \delta(p_0 + \omega_{\mathbf{p}})] \quad (5.4)$$

となる。これを (5.3) に代入して p_0 積分を遂行すると、

$$\Delta(x; m^2) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} \, e^{ipx} \frac{\sin(\omega_{\mathbf{p}} x^0)}{\omega_{\mathbf{p}}} \quad (5.5)$$

を得る。この式を見れば、 $\Delta(x; m^2)$ が (5.2) の 2 つの初期条件を満足していることは明らかである ($\int d\mathbf{p} \, e^{ipx} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{x})$ を使う.)。

2 つの 3 次元ベクトル $\mathbf{p}$ と $\mathbf{x}$ のなす角を θ とすれば、 $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = |\mathbf{p}|r \cos \theta$ である (ただし $r \equiv |\mathbf{x}|$)。 (5.5) の積分を極座標に変換して角変数の積分を遂行すれば、

$$\Delta(x; m^2) = -\frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty d|\mathbf{p}| \frac{|\mathbf{p}| \sin(|\mathbf{p}|r) \sin(\omega_{\mathbf{p}} x^0)}{\omega_{\mathbf{p}}} \quad (5.6)$$

となる。ただし $\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{m^2 + |\mathbf{p}|^2}$ 。 (5.6) を

$$\Delta(x; m^2) = \frac{1}{2\pi^2 r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\infty d|\mathbf{p}| \frac{\cos(|\mathbf{p}|r) \sin(\omega_{\mathbf{p}} x^0)}{\omega_{\mathbf{p}}} \quad (5.7)$$

と書き直すと、積分公式^{*4}

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dz \frac{\sin(b\sqrt{a^2+z^2})}{\sqrt{a^2+z^2}} \cos(yz) &= \frac{\pi}{2} J_0(a\sqrt{b^2-y^2}) \quad \text{for } 0 < y < b, \\ &= 0 \quad \text{for } b < y < \infty \end{aligned} \quad (5.8)$$

により、積分が遂行できる。その結果、

$$\Delta(x; m^2) = \frac{\epsilon(x^0)}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial r} \left[J_0(m\sqrt{(x^0)^2 - r^2}) \theta((x^0)^2 - r^2) \right] \quad (5.9)$$

を得る。微分を遂行し、 $J'_0(z) = -J_1(z)$ と $J_0(0) = 1$ を用いれば、

$$\Delta(x; m^2) = -\frac{\epsilon(x^0)}{2\pi} \left[\delta(x^2) - \frac{m}{2\sqrt{x^2}} J_1(m\sqrt{x^2}) \theta(x^2) \right] \quad (5.10)$$

が得られる。ここまでは普通の場合の量子論の教科書に載っていることの復習である。

さて、以上の話を複素 D 次元に拡張したらどうなるかという話に進もう。 k 個の外変数ミンコフスキー・ベクトルを含むローレンツ不変な D 次元積分の一般論については本節冒頭に挙げた文献で詳しく論じた。最初 D を十分大きい実数とし、最後に D について複素平面に解析接続するものと想定して、計算を行う。 x^0 および外変数と関係のない $D - k - 1$ 次元の積分は、球対称と考えられるので、その角積分は球 S^{D-k-2} の表面積の公式を用いて遂行できる。残りは $k + 2$ 次元積分になるので、普通の多重積分のように取り扱えるのである^{*5}。

(5.3) を D 次元に拡張した式は、 x^μ と p_μ を D 次元ミンコフスキー・ベクトルとすると、

$$\Delta_D(x; m^2) = \frac{1}{(2\pi)^{D-1}i} \int d^D p \, \epsilon(p_0) \delta(p^2 - m^2) e^{-ipx} \quad (5.11)$$

である。これを上述の定義に従って計算すると、(5.6) に相当する式として^{*6}、

$$\Delta_D(x; m^2) = -\frac{1}{(2\pi)^{(D-1)/2} r^{(D-3)/2}} \int_0^\infty d|\mathbf{p}| \frac{|\mathbf{p}|^{(D-1)/2} J_{(D-3)/2}(|\mathbf{p}|r) \sin(\omega_{\mathbf{p}} x^0)}{\omega_{\mathbf{p}}} \quad (5.12)$$

が得られる。

積分変数を $|\mathbf{p}|$ から $\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{m^2 + |\mathbf{p}|^2}$ に変換 $\{(1/\omega_{\mathbf{p}})d|\mathbf{p}| = (1/|\mathbf{p}|)d\omega_{\mathbf{p}} \text{ になる} \}$ してから、積分公式^{*7}

$$\begin{aligned} \int_a^\infty dz (z^2 - a^2)^{\nu/2} J_\nu(b\sqrt{z^2 - a^2}) \sin(yz) \\ = \sqrt{\frac{\pi}{2}} a^{(2\nu+1)/2} b^\nu (y^2 - b^2)^{-(2\nu+1)/4} J_{-(2\nu+1)/2}(a\sqrt{y^2 - b^2}) \theta(y - b) \end{aligned} \quad (5.13)$$

for $a > 0, b > 0, y > 0, -1 < \Re \nu < 1/2$

を使うと^{*8}、

$$\Delta_D(x; m^2) = -\frac{\epsilon(x^0)m^{(D-2)/2}}{2^{D/2}\pi^{(D-2)/2}} (\sqrt{x^2})^{-(D-2)/2} J_{-(D-2)/2}(m\sqrt{x^2}) \theta(x^2) \quad (5.14)$$

という結果が得られる。

さて、ここからが本題である。(5.14) で $D = 4$ とおけば、

$$\Delta(x; m^2) = -\frac{\epsilon(x^0)m}{4\pi\sqrt{x^2}} J_{-1}(m\sqrt{x^2}) \theta(x^2) \quad (5.15)$$

^{*4} Bateman Manuscript Project, Tables of Integral Transforms, Vol. I, p.26, (30) 参照。

^{*5} 外変数としてゼロ・ベクトルを増した場合の定義と、はじめからそれがなかった場合の定義は一致する。

^{*6} $D = 4$ ならば、 $J_{1/2}(z) = \sqrt{2/(\pi z)} \sin z$ を使うと、(5.6) に帰着する。

^{*7} Bateman Manuscript Project, Tables of Integral Transforms, Vol. I, p.113, (50) 参照。

^{*8} $\nu = (D - 3)/2, a = m, b = r, y = x^0$ とおく。

となる．もしここで単純に公式 (1.3) を使ったら，(5.10) の第 1 項のデルタ関数が出てこない．そこで公式 (1.5) の出番となるわけだが， J_{-1} の中は $m\sqrt{x^2} \geq 0$ であって， x^2 のように負にもなりうる量ではない．正しい取り扱い，ベッセル関数幂展開 (2.3) を使って，(5.14) を Y 超関数で表せばよいのである．すなわち

$$\Delta_D(x; m^2) = -\frac{\epsilon(x^0)}{2\pi^{(D-2)/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!} m^{2k} Y_{k+2-(D/2)}(x^2) \quad (5.16)$$

において $D = 4$ とおけば， $k = 0$ の項から正しくデルタ関数が出て，(5.10) が再生される．

なお， $m = 0$ の場合，すなわち物理的には光子（電磁場 $A_\mu(x)$ ）に相当する場合，(5.16) は

$$\Delta_D(x; 0) = -\frac{\epsilon(x^0)}{2\pi^{(D-2)/2}} Y_{2-(D/2)}(x^2) \quad (5.17)$$

となる．このサポートが光円錐 $x^2 = 0$ 上のみになるのは，次元数が偶数のときだけである．

初等的なベッセル関数の公式でも，不用意に用いると間違いを犯すことになる．特異性が隠れているときには，超関数を用いて正しく定式化されなければならないのである．

[謝辞] この問題を再考する動機を与えてくれた北海学園大学名誉教授の世戸憲治氏に感謝する．

小さな疑問

矢野 忠^{*1}

A little Question

Tadashi YANO^{*2}

1 はじめに

「数学・物理通信」8巻5号に「直交座標系から極座標系へ」というエッセイを載せた [1]. このエッセイを読んだ Y さんから (7.7), すなわち

$$c_{11} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x} = 1 \quad (1.1)$$

について質問があった。「なぜ, $c_{11} = 3$ ではなくて, $c_{11} = 1$ であるのか」という^{*3}.

これについては「(7.9) が成り立つことからわかります」と短く返答をしておいたが, そんなことはすでに Y さんをご承知のことであろう. 要するに, (7.7), すなわち, このエッセイの (1.1) が成り立つ直観的な説明がほしいということであろう. これが, このエッセイを書く動機である.

2 節では (1.1) が成り立つ理由を偏微分のチェーン・ルールによって説明する. 3 節では具体的な計算によって (1.1) をたしかめる. 4 節はまとめである. 5 節は付録で (3.6)-(3.8) の具体的な導出である.

2 偏微分のチェーン・ルールによる説明

標準的な答えはつぎのようなものだろうか. いま,

$$x = F(r(x, y, z), \theta(x, y, z), \phi(x, y, z)) \quad (2.1)$$

$$y = G(r(x, y, z), \theta(x, y, z), \phi(x, y, z)) \quad (2.2)$$

$$z = H(r(x, y, z), \theta(x, y, z), \phi(x, y, z)) \quad (2.3)$$

とする. 実は

$$x = x(r(x, y, z), \theta(x, y, z), \phi(x, y, z)) \quad (2.4)$$

$$y = y(r(x, y, z), \theta(x, y, z), \phi(x, y, z)) \quad (2.5)$$

$$z = z(r(x, y, z), \theta(x, y, z), \phi(x, y, z)) \quad (2.6)$$

と表しても同じことだが, $x = x(r, \theta, \phi), \dots$ と表すとちょっと変に感じる人がいるかもしれないので, 関数記号として F, G, H を用いた. これらの式の中で (1.1) の説明に用いるのは

$$x = F(r, \theta, \phi) \quad (2.7)$$

だけである.

^{*1} 元愛媛大学工学部

^{*2} yanotad@earth.ocn.ne.jp

^{*3} 実はこの文書を Y さんにお送りする前に Y さん自身がこの疑問の答をみつけた. しかし, この疑問は一般性をもつと考えるのでここに載せることにした.

関数 F は変数 (r, θ, ϕ) の関数であり、また変数 (r, θ, ϕ) はまた変数 (x, y, z) の関数である。
すなわち、

$$r = r(x, y, z) \quad (2.8)$$

$$\theta = \theta(x, y, z) \quad (2.9)$$

$$\phi = \phi(x, y, z) \quad (2.10)$$

である。

このとき関数 F の x での偏微分を考えてみよう。このとき、上に述べたことを考慮する。すなわち、関数 F は (r, θ, ϕ) の関数であり、また (r, θ, ϕ) はまた (x, y, z) の関数である。

したがって、偏微分法のチェーン・ルールによって

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.11)$$

が成り立つ。ところで関数 F は $x = F$ であったから、 F を x とおきかえてもよい。そうすれば

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.12)$$

となるが、左辺の $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$ であるから、

$$c_{11} = \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x} = 1 \quad (2.13)$$

が成り立つ。

上の式でひよっとすると勘ちがいをしそうなのは

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial x}{\partial x} = 1 \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\partial x}{\partial x} = 1 \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial x}{\partial x} = 1 \end{aligned} \quad (2.14)$$

が成り立つのではないかという気がするものである。

一変数の微分で

$$\frac{dy}{dx} \frac{dx}{dy} = 1 \quad (2.15)$$

が成立するのは当然だが、合成関数の偏微分では (2.14) は成立しない。このことは当然ではあろうが、注意を要する*4。

3 計算でのたしかめ

Yさんはエッセイの全体を読まれているので、くりかえしになるし、直観的な説明ではないので、説得力がないとは思いますが、念のために $c_{11} = 1$ であることを実際の計算で確かめておこう。

$$x = F(r, \theta, \phi) = r \sin \theta \cos \phi \quad (3.1)$$

*4 [2] に一変数の微分の場合の $\frac{dy}{dx} \frac{dx}{dy} = 1$ に対応する多変数の場合の関係式は $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) = 1$ ではないと述べてある。これについては [3] を参照せよ。

である。そこで計算したい式は

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (3.2)$$

であった。ここで、

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r} &= \sin \theta \cos \phi \\ \frac{\partial F}{\partial \theta} &= r \cos \theta \cos \phi \\ \frac{\partial F}{\partial \phi} &= -r \sin \theta \sin \phi \end{aligned}$$

となる。

$(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial x})$ を求めるには

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (3.3)$$

$$\cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (3.4)$$

$$\tan \phi = \frac{y}{x} \quad (3.5)$$

が必要である。これはすでに [1] で計算されている*5。それによると

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \sin \theta \cos \phi \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\cos \theta \cos \phi}{r} \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\sin \phi}{r \sin \theta} \quad (3.8)$$

これらから $\frac{\partial F}{\partial x}$ が計算できる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= (\sin \theta \cos \phi)(\sin \theta \cos \phi) + (r \cos \theta \cos \phi)\left(\frac{\cos \theta \cos \phi}{r}\right) + (-r \sin \theta \sin \phi)\left(-\frac{\sin \phi}{r \sin \theta}\right) \\ &= \sin^2 \theta \cos^2 \phi + \cos^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \phi \\ &= \cos^2 \phi + \sin^2 \phi \\ &= 1 \end{aligned} \quad (3.9)$$

となる。このことはもちろん [1] で述べている。だから、Y さんにとって具体的な計算によって $\frac{\partial F}{\partial x} = 1$ を示したことは蛇足であろう。

4 おわりに

2 節で述べた、合成関数 F の偏微分のチェーン・ルールはどなたでも「そうだ、そうだ」とうなずかれるものであるが、それでもときどきはとまどいを起こす原因となる。もっと納得できる、直観的に明瞭な説明がほしいのは Y さんだけではなくろう。

*5 しかし、質問をいただいた Y さんのご指摘ではつぎの (3.6)-(3.8) は [1] の (1.3) から導いたほうが簡単である。このことは前のエッセイの重複にはなるが、付録に述べておこう。

5 付録 (3.6)-(3.8) の簡単な導出

まず [1] の (1.3) をここに引用しておく．それは

$$dr = \sin \theta \cos \phi dx + \sin \theta \sin \phi dy + \cos \theta dz \quad (5.1)$$

$$d\theta = \frac{1}{r}(\cos \theta \cos \phi dx + \cos \theta \sin \phi dy - \sin \theta dz) \quad (5.2)$$

$$d\phi = \frac{1}{r \sin \theta}(-\sin \phi dx + \cos \phi dy) \quad (5.3)$$

である．これからすぐに

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \sin \theta \cos \phi \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\cos \theta \cos \phi}{r} \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\sin \phi}{r \sin \theta} \quad (3.8)$$

が求められる。

参考文献

- [1] 矢野 忠, 直交座標系から極座標系へ, 数学・物理通信 8 巻 5 号 (2018.6) 7-15
- [2] 矢野 忠, なぜ $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = 1$ でないのか, 数学・物理通信 7 巻 7 号 (2017.9) 11-20
- [3] 松田信行, 宮本敏雄, 『微分と積分』 (講談社, 1984) 177-201

伊藤氏の論説「超弦理論と Dirac のハサミ」 へのコメント

Comment on Ito's Paper "Superstring Theory and Dirac's Scissors"

中西 襄^{*1}

Noboru NAKANISHI ^{*2}

1 はじめに

伊藤仁之氏は「数学・物理通信」7-3 に「超弦理論と Dirac のハサミ」という論説を書いた（補足は「数学・物理通信」8-2 および 8-6）。彼は、超弦理論は「ディラックのハサミ」に基づいて構成されたものであるという信念を抱いている、そしてディラックのハサミはスピノル性を実現したものではないから、超弦理論はダメであるというような推論がなされている。筆者の論説「超弦理論はなぜつぶれたのか」（「数学・物理通信」7-1）も枕に使われているので、関連があるのかとの誤解を招きかねない。じっさい、その後、「物理教育」に投稿される予定の「Dirac の紐・二重拘束モデル・超弦理論」の原稿が送られてきたのを見たら、拙論文が伊藤論文と同一枠で引用されていた。幸い校正段階だったので、拙論文の引用は削っていただいた。しかし論旨そのものの修正はなされなかった。

伊藤氏の信念が覆えるか否かは別として、とにかくディラックのハサミとそれが超弦理論と関連する可能性について、筆者の知るところを述べておきたい。

2 ディラックのハサミ

よく知られているように、ディラックはスピン $1/2$ の粒子に対する相対論的波動方程式を提起した人である。その波動関数はローレンツ代数の表現を与えるが、ローレンツ群の数学的な意味での表現にはなっていない。それは 360° 回転したとき元に戻らないからである（ 720° 回転すれば元に戻る）。物理ではこれを「2 価表現」と呼ぶ。巨視的な物体ではローレンツ群の 2 価表現はありえない。しかし、たんに 360° 回転では元に戻らないが 720° 回転すれば元に戻るようなオモチャならば、こしらえることができる。その最初の例がディラックのハサミである。詳しい説明は省略するが、要するにハサミの手で持つ側の 2 つの環それぞれに伸縮自在のひもを通し、その 2 本のひもの両端を固定したものである。これを、「ハサミの並進によって移れる状態は同じ状態と見なす」というルールのもとで考える。するとハサミを 360° 回転した状態は元の状態と同じではないが、 720° 回転すると元の状態に復する操作が可能になる。この意味で 2 価の状況を具現したものといえる、

伊藤氏の批判は、ハサミを 720° 回転したら並進で元の状態に戻るのは、じつは -720° 回転しているのと実質的に同じことやっているのに過ぎないから、ディラックのハサミはスピノール性を表すことに失敗しているという主張である。しかしこの批判は見当はずれであると思う。ディラックの操作は、ハサミを並進でしか動かさないというルールを確かに守っているのだから、それで十分なのである。その操作の分析は、それ自身として興味あることかもしれないが、ディラックの主張とは無関係である。

伊藤氏にさらに詳しく問い合わせたところでは、スピノールは 720° 回転で完全に元に戻るが、ディラックのハサミでは余計な並進の操作が必要になるから、スピノールの 2 価性の精確な表現にはなっていないということの

^{*1} 京都大学名誉教授

^{*2} nbr-nak@trio.plala.or.jp

ようである。しかし、数学では同値類の要素を同一視することはしばしば行われる。ハサミの並進によって移れる状況は同じ同値類に属するのである*³。

2 価性はスピノールの性質の一部分ではあるが、それが本質ではない。スピノールそのものが古典的に再現できるなどということは不可能だから、はじめから考慮外である。

3 超弦理論との関連性

ディラックのハサミが超弦理論の基礎になっていると主張する伊藤氏の推論は、まさに曲芸的である：

まずディラックのハサミはひもを用いているので、ひもはスピノール性を示すものだという認識が、20 世紀後半素粒子物理の専門家の間に広くいきわたっていたと想定する。超弦理論はひもを基本にした理論だから、ディラックのハサミのことを基礎に構成されたはずだ。Brian Greene *⁴が「ひもの運動は超対称性と呼ぶ性質を備えているので超ひも理論と言う」と述べているのは、「超弦理論はディラックのハサミを起源とする」という推測を裏付けるものである。したがって、ディラックのハサミがダメならば、超弦理論は基礎から壊れてしまうはずだ。

正確なフォローはできないが、彼の推論はざっとこんな具合である。

ディラックのハサミは前節に述べたごとく、たんに 2 価性のモデルであって、スピノール性を具現するものではない。「ディラックのハサミ」には、いろんなバージョンが知られているが*⁵、その中にはひもをまったく用いないものもある。ひもの使用は必須ではない。

他方、素粒子物理学における弦理論（ひも理論）は最初、ハドロンの散乱振幅をうまく説明した双対共鳴モデルをラグランジアンから導くために提案されたものである、ひもはボソン的で、スピノールとは無縁である。しかし量子色力学の成功によりに捨てられた。この廃棄されたボソン弦理論に超対称性を付け加えて、究極理論の候補と称してリサイクルしたのが、超弦理論（超ひも理論）である。超弦理論の構成において、ディラックのハサミが積極的に意識されたとか、何らかの影響を与えたとかというような話は、少なくとも筆者はまったく聞いたことがない。

*³ 卑近なたとえでいえば、1 万円札 1 枚も、5 千円札 2 枚も、千円札 10 枚も、物は異なるが、金額 1 万円という同値類に属する。1 万円の買い物をするには、この同値類の中のどれであってもよい。

*⁴ 彼は超弦理論のスポークスマン（たぶん 21 世紀になってからの）である。もちろん超弦理論の創始者の一人である Michael Green とは別人。

*⁵ マーティン・ガードナー著「[新版] 自然界における左と右」（坪井忠二ほか訳、紀伊国屋書店、1992）の 33 節「スピン」参照。次の 34 節「スーパー・ストリング」はよそ者が見た超弦理論で、なかなか面白い。なお、著者ガードナーは、「数学ゲーム」などの著書がある著名な数学者である。

編集後記

あまりいままで意識をしてこなかったのだが、中西 襄先生と世戸憲治さんの論文の継続的なご投稿のありがたさである。質の高い論文を私はまったく原稿料を払うことなしに、ご投稿いただいている。両氏の「数学・物理通信」へのご貢献の大きさを最近ようやくわかりはじめている。

この「数学・物理通信」への貢献としてもう一人忘れてはならないのが、名古屋大学の谷村省吾さんである。彼のサイトにすべてのバックナンバーを掲載してくださっている。メール配布ではその数が限られるが、インターネットなら、その制限がまったくない。

このサーキュラーは購読はすべて無料であるし、どこからも財政的な援助も受けていない。また読者が配布先のメールアドレスを私に通知して来られれば、無料で配布している。

ただ、すべての人に開かれたサーキュラーとはなかなかかなりにくいという、制約がどうしてもある。これはレフェリー制度みたいなものを全く導入していないために、編集者の見識の狭さが反映してしまう。それと事務処理等が遅れることである。

この点は今後考えなければならない点であろう。皆様のご協力を今後ともお願いする。

(矢野 忠)