数学・物理通信

8巻8号　　2018年10月

編集　新関章三・矢野　忠

2018年10月5日

目次 (Contents)

フィーバー数列の周期による分類とその一般化

武藤　徹[*1]

Classification of Fieber Sequences in Terms of Period and Its Generalization

Tohru MUTO [*2]

1　フィボナッチ数列

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_{i+2} := f_i + f_{i+1}$$

で定義される数列 f_i をフィボナッチ数列といいます．その数値のいくつかを書き出してみると

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \cdots$$

となります．その定義域を負の整数に拡張すると，

$$\cdots, 13, -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \cdots \tag{1.1}$$

となります．

2　10 を法とするフィボナッチ剰余数列

$$r_0 = 0, r_1 = 1, r_{i+2} := r_i + r_{i+1} \pmod{10}$$

で定義される数列 r_i を 10 を法とするフィボナッチ剰余数列といいます．これは

$$\begin{aligned}&0, 1, 1, 2, 3, *5, 8, 3, 1, 4, *5, 9, 4, 3, 7, *0, 7, 7, 4, 1,\\&5, 6, 1, 7, 8, *5, 3, 8, 1, 9, *0, 9, 9, 8, 7, *5, 2, 7, 9, 6,\\&5, 1, 6, 7, 3, *0, 3, 3, 6, 9, *5, 4, 9, 3, 2, *5, 7, 2, 9, 1,\\&0, 1, 1, \cdots\end{aligned}$$

となります[*3]．基本周期 60 の，循環数列です．

したがって，$r_0 = 0, r_1 = 1, r_2 = 1, \cdots, r_{59} = 1, r_{60} = 0, r_{61} = 1, r_{62} = 1, \cdots$ です．

ここで，注意すべきことは数列の番号が 1 からではなく，0 から始まっていることです．すなわち，最初の周期 60 の最後の番号は $r_{59} = 1$ です．したがって，つぎの周期の最初の数列は $r_{60} = 0$ です．

*1 数学思想史家

*2 mutoh.ab@wine.ocn.ne.jp

*3 便宜的に数列 5 個ごとに区切りを示すために $*$ を入れた．以下同様の処理をする．

そこで，

$$\begin{aligned}
r_n &= r_{n-1} + r_{n-2} \\
&= r_2 r_{n-1} + r_1 r_{n-2} \\
&= r_2(r_{n-2} + r_{n-3}) + r_1 r_{n-2} \\
&= (r_2 + r_1) r_{n-2} + r_2 r_{n-3} \\
&= r_3 r_{n-2} + r_2 r_{n-3} \\
&= r_4 r_{n-3} + r_3 r_{n-4} \\
&= \cdots \\
&= r_{61} r_{n-60} + r_{60} r_{n-61} \\
&= r_{n-60} \quad (r_{60} = 0, r_{61} = 1)
\end{aligned}$$

以上で，基本周期が 60 であることが証明されました．

3 フィーバー数列

ここで紹介する数表は，2018 年 4 月の「東京民研」[*4]の「算数・数学部会」において，数教協[*5]の岩村繁夫さんが，「17 番目の不思議」と題して紹介された表に，私が，周期がわかるように，32 項まで計算して加筆したものです．

岩村さんによると，数教協の機関誌『数学教室』（1994 年 9 月号）に，埼玉の大橋永治さんの実践記録があり，それには，1991 年の数教協全国大会（有馬）における大津市立堅田中学校の佐野清信さんのプリントによると書かれていたといいます．

フィーバー数列 F_i は，a, b を 0 以上で，9 以下の整数として，

$$F_1 = a, F_2 = b, F_{i+2} := F_i + F_{i+1} \pmod{10}$$

によって定義されます．

この数列は，

$$\begin{aligned}
&a, b, a+b, a+2b, 2a+3b, *3a+5b, 5a+8b, 8a+3b, 3a+b, a+4b, \\
&4a+5b, 5a+9b, 9a+4b, 4a+3b, 3a+7b, *7a+0b, 0a+7b, \cdots
\end{aligned}$$

となります[*6]．

a の係数は

$$\begin{aligned}
&1, 0, 1, 1, 2, *3, 5, 8, 3, 1, *4, 5, 9, 4, 3, \\
&7, 0, 7, 7, 4, \cdots
\end{aligned}$$

で，b の係数は，

$$\begin{aligned}
&0, 1, 1, 2, 3, *5, 8, 3, 1, 4, *5, 9, 4, 3, 7, \\
&0, 7, 7, 4, \cdots
\end{aligned}$$

です．これは，10 を法とするフィボナッチ剰余数列 r_i で，

$$r_0 = 0, r_1 = 1, r_{i+2} := r_i + r_{i+1} \pmod{10}$$

[*4] 東京の民主教育をすすめる教育研究会議

[*5] 数学教育協議会

[*6] 実際の値は，これらの数を 10 で割った剰余になります．例えば，$a = 2, b = 5$ であれば，$3a + 5b = 31 := 1 \pmod{10}$ です．

で定義されました．

$$r_{-1}=1, r_0=0, r_1=1, r_2=1, r_3=2, r_4=3, \cdots, r_{15}=0, r_{16}=7, \cdots$$

一般に，

$$F_i := r_{i-2}a + r_{i-1}b \pmod{10} \tag{3.1}$$

が成り立ちます．

したがって，フィーバー数列の第 17 項は，

$$F_{17} := r_{15}a + r_{16}b = 7b \pmod{10}$$

となり，b が一定なので，「17 番目の数」が一定となるのです．

同じように，第 32 項，第 47 項，第 62 項も，一定です．

なお，フィボナッチ剰余数列 r_i の基本周期は 60 ですから，フィーバーの数列 F_i は，

$$F_i := r_{i-2}a + r_{i-1}b \pmod{10}$$

によって，周期 60 を持つことがわかります．面白いことに，フィーバーの数列 F_i には，周期 60 のものが 60 個，周期 20 のものが 20 個，周期 12 のものが 12 個，周期 4 のものが 4 個，周期 3 のものが 3 個，周期 1 のものが 1 個あります．総計 100 個です．

いうまでもなく，60, 20, 12, 4, 3, 1 は，フィボナッチ剰余数列 r_i の基本周期 60 の約数です．

4　フィボナッチ剰余数列の一般化

ところで，モード 2 の場合は，フィボッチ剰余数列 r_i は，

$$r_0=0, r_1=1, r_{i+2} := r_i + r_{i+1} \pmod{2}$$

で定義されます．このとき

$$r_{-1}=1, r_0=0, r_1=1, r_2=1, r_3=0, r_4=1, r_5=1, \cdots$$

ですから，

$$\begin{aligned} r_n &= r_2 r_{n-1} + r_1 r_{n-2} \\ &= r_2(r_{n-2} + r_{n-3}) + r_1 r_{n-2} \\ &= (r_2 + r_1) r_{n-2} + r_2 r_{n-3} \\ &= r_3 r_{n-2} + r_2 r_{n-3} \\ &= r_{n-3} \end{aligned}$$

基本周期は 3 です．

モード 3 の場合は，フィボナッチ剰余数列 r_i は，

$$r_0=0, r_1=1, r_{i+2} := r_i + r_{i+1} \pmod{3}$$

で定義されます．このとき

$$r_{-1}=1, r_0=0, r_1=1, r_2=1, r_3=2, r_4=0, r_5=2, r_6=2, r_7=1, r_8=0, r_9=1, \cdots$$

表１

周期	1	６０	２０	６０	２０	3	２０	６０	２０	６０
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
6	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
7	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
8	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2
9	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
１０	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
１１	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
１２	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
１３	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1
１４	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
１５	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
１６	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
１７	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
１８	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
１９	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
２０	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
２１	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
２２	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
２３	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4
２４	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
２５	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
２６	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2
２７	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
２８	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
２９	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2
３０	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
３１	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1
３２	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

表２

周期	６０	６０	１２	６０	６０	６０	６０	１２	６０	６０
１	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
２	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
３	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
４	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
５	3	5	7	9	1	3	5	7	9	1
６	5	8	1	4	7	0	3	6	9	2
７	8	3	8	3	8	3	8	3	8	3
８	3	1	9	7	5	3	1	9	7	5
９	1	4	7	0	3	6	9	2	5	8
１０	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
１１	5	9	3	7	1	5	9	3	7	1
１２	9	4	9	4	9	4	9	4	9	4
１３	4	3	2	1	0	9	8	7	6	5
１４	3	7	1	5	9	3	7	1	5	9
１５	7	0	3	6	9	2	5	8	1	4
１６	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
１７	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
１８	7	4	1	8	5	2	9	6	3	0
１９	4	1	8	5	2	9	6	3	0	7
２０	1	5	9	3	7	1	5	9	3	7
２１	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
２２	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1
２３	1	7	3	9	5	1	7	3	9	5
２４	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
２５	8	5	2	9	6	3	0	7	4	1
２６	5	3	1	9	7	5	3	1	9	7
２７	3	8	3	8	3	8	3	8	3	8
２８	8	1	4	7	0	3	6	9	2	5
２９	1	9	7	5	3	1	9	7	5	3
３０	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
３１	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1
３２	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

表 3

周期	２０	６０	２０	６０	4	６０	２０	６０	２０	１２
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
4	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
5	6	8	0	2	4	6	8	0	2	4
6	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
7	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1
8	6	4	2	0	8	6	4	2	0	8
9	2	5	8	1	4	7	0	3	6	9
１０	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
１１	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
１２	8	3	8	3	8	3	8	3	8	3
１３	8	7	6	5	4	3	2	1	0	9
１４	6	0	4	8	2	6	0	4	8	2
１５	4	7	0	3	6	9	2	5	8	1
１６	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
１７	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
１８	4	1	8	5	2	9	6	3	0	7
１９	8	5	2	9	6	3	0	7	4	1
２０	2	6	0	4	8	2	6	0	4	8
２１	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
２２	2	7	2	7	2	7	2	7	2	7
２３	2	8	4	0	6	2	8	4	0	6
２４	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
２５	6	3	0	7	4	1	8	5	2	9
２６	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2
２７	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1
２８	6	9	2	5	8	1	4	7	0	3
２９	2	0	8	6	4	2	0	8	6	4
３０	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
３１	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1
３２	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8

表４

周期	６０	１２	６０	６０	６０	６０	１２	６０	６０	６０
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
4	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
5	9	1	3	5	7	9	1	3	5	7
6	5	8	1	4	7	0	3	6	9	2
7	4	9	4	9	4	9	4	9	4	9
8	9	7	5	3	1	9	7	5	3	1
9	3	6	9	2	5	8	1	4	7	0
１０	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
１１	5	9	3	7	1	5	9	3	7	1
１２	7	2	7	2	7	2	7	2	7	2
１３	2	1	0	9	8	7	6	5	4	3
１４	9	3	7	1	5	9	3	7	1	5
１５	1	4	7	0	3	6	9	2	5	8
１６	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
１７	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
１８	1	8	5	2	9	6	3	0	7	4
１９	2	9	6	3	0	7	4	1	8	5
２０	3	7	1	5	9	3	7	1	5	9
２１	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
２２	8	3	8	3	8	3	8	3	8	3
２３	3	9	5	1	7	3	9	5	1	7
２４	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
２５	4	1	8	5	2	9	6	3	0	7
２６	5	3	1	9	7	5	3	1	9	7
２７	9	4	9	4	9	4	9	4	9	4
２８	4	7	0	3	6	9	2	5	8	1
２９	3	1	9	7	5	3	1	9	7	5
３０	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
３１	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1
３２	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7

表５

周期	２０	６０	２０	１２	２０	６０	２０	６０	４	６０
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
4	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
5	2	4	6	8	0	2	4	6	8	0
6	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
7	2	7	2	7	2	7	2	7	2	7
8	2	0	8	6	4	2	0	8	6	4
9	4	7	0	3	6	9	2	5	8	1
１０	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
１１	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
１２	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1
１３	6	5	4	3	2	1	0	9	8	7
１４	2	6	0	4	8	2	6	0	4	8
１５	8	1	4	7	0	3	6	9	2	5
１６	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
１７	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
１８	8	5	2	9	6	3	0	7	4	1
１９	6	3	0	7	4	1	8	5	2	9
２０	4	8	2	6	0	4	8	2	6	0
２１	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
２２	4	9	4	9	4	9	4	9	4	9
２３	4	0	6	2	8	4	0	6	2	8
２４	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
２５	2	9	6	3	0	7	4	1	8	5
２６	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2
２７	2	7	2	7	2	7	2	7	2	7
２８	2	5	8	1	4	7	0	3	6	9
２９	4	2	0	8	6	4	2	0	8	6
３０	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
３１	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1
３２	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6

表６

周期	３	６０	６０	６０	６０	３	６０	６０	６０	６０
１	０	１	２	３	４	５	６	７	８	９
２	５	５	５	５	５	５	５	５	５	５
３	５	６	７	８	９	０	１	２	３	４
４	０	１	２	３	４	５	６	７	８	９
５	５	７	９	１	３	５	７	９	１	３
６	５	８	１	４	７	０	３	６	９	２
７	０	５	０	５	．０	５	０	５	０	５
８	５	３	１	９	７	５	３	１	９	７
９	５	８	１	４	７	０	３	６	９	２
１０	０	１	２	３	４	５	６	７	８	９
１１	５	９	３	７	１	５	９	３	７	１
１２	５	０	５	０	５	０	５	０	５	０
１３	０	９	８	７	６	５	４	３	２	１
１４	５	９	３	７	１	５	９	３	７	１
１５	５	８	１	４	７	０	３	６	９	２
１６	０	７	４	１	８	５	２	９	６	３
１７	５	５	５	５	５	５	５	５	５	５
１８	５	２	９	６	３	０	７	４	１	８
１９	０	７	４	１	８	５	２	９	６	３
２０	５	９	３	７	１	５	９	３	７	１
２１	５	６	７	８	９	０	１	２	３	４
２２	０	５	０	５	０	５	０	５	０	５
２３	５	１	７	３	９	５	１	７	３	９
２４	５	６	７	８	９	０	１	２	３	４
２５	０	７	４	１	８	５	２	９	６	３
２６	５	３	１	９	７	５	３	１	９	７
２７	５	０	５	０	５	０	５	０	５	０
２８	０	３	６	９	２	５	８	１	４	７
２９	５	３	１	９	７	５	３	１	９	７
３０	５	６	７	８	９	０	１	２	３	４
３１	０	９	８	７	６	５	４	３	２	１
３２	５	５	５	５	５	５	５	５	５	５

表７

周期	２０	６０	４	６０	２０	６０	２０	１２	２０	６０
１	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
２	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
３	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
４	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
５	8	0	2	4	6	8	0	2	4	6
６	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
７	8	3	8	3	8	3	8	3	8	3
８	8	6	4	2	0	8	6	4	2	0
９	6	9	2	5	8	1	4	7	0	3
１０	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
１１	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
１２	4	9	4	9	4	9	4	9	4	9
１３	4	3	2	1	0	9	8	7	6	5
１４	8	2	6	0	4	8	2	6	0	4
１５	2	5	8	1	4	7	0	3	6	9
１６	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
１７	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
１８	2	9	6	3	0	7	4	1	8	5
１９	4	1	8	5	2	9	6	3	0	7
２０	6	0	4	8	2	6	0	4	8	2
２１	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
２２	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1
２３	6	2	8	4	0	6	2	8	4	0
２４	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
２５	8	5	2	9	6	3	0	7	4	1
２６	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2
２７	8	3	8	3	8	3	8	3	8	3
２８	8	1	4	7	0	3	6	9	2	5
２９	6	4	2	0	8	6	4	2	0	8
３０	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
３１	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1
３２	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

表８

周期	６０	６０	６０	６０	１２	６０	６０	６０	６０	１２
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
3	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
4	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
5	1	3	5	7	9	1	3	5	7	9
6	5	8	1	4	7	0	3	6	9	2
7	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1
8	1	9	7	5	3	1	9	7	5	3
9	7	0	3	6	9	2	5	8	1	4
１０	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
１１	5	9	3	7	1	5	9	3	7	1
１２	3	8	3	8	3	8	3	8	3	8
１３	8	7	6	5	4	3	2	1	0	9
１４	1	5	9	3	7	1	5	9	3	7
１５	9	2	5	8	1	4	7	0	3	6
１６	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
１７	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
１８	9	6	3	0	7	4	1	8	5	2
１９	8	5	2	9	6	3	0	7	4	1
２０	7	1	5	9	3	7	1	5	9	3
２１	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
２２	2	7	2	7	2	7	2	7	2	7
２３	7	3	9	5	1	7	3	9	5	1
２４	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
２５	6	3	0	7	4	1	8	5	2	9
２６	5	3	1	9	7	5	3	1	9	7
２７	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6
２８	6	9	2	5	8	1	4	7	0	3
２９	7	5	3	1	9	7	5	3	1	9
３０	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
３１	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1
３２	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

表9

周期	２０	１２	２０	６０	２０	６０	４	６０	２０	６０
１	０	１	２	３	４	５	６	７	８	９
２	８	８	８	８	８	８	８	８	８	８
３	８	９	０	１	２	３	４	５	６	７
４	６	７	８	９	０	１	２	３	４	５
５	４	６	８	０	２	４	６	８	０	２
６	０	３	６	９	２	５	８	１	４	７
７	４	９	４	９	４	９	４	９	４	９
８	４	２	０	８	６	４	２	０	８	６
９	８	１	４	７	０	３	６	９	２	５
１０	２	３	４	５	６	７	８	９	０	１
１１	０	４	８	２	６	０	４	８	２	６
１２	２	７	２	７	２	７	２	７	２	７
１３	２	１	０	９	８	７	６	５	４	３
１４	４	８	２	６	０	４	８	２	６	０
１５	６	９	２	５	８	１	４	７	０	３
１６	０	７	４	１	８	５	２	９	６	３
１７	６	６	６	６	６	６	６	６	６	６
１８	６	３	０	７	４	１	８	５	２	９
１９	２	９	６	３	０	７	４	１	８	５
２０	８	２	６	０	４	８	２	６	０	４
２１	０	１	２	３	４	５	６	７	８	９
２２	８	３	８	３	８	３	８	３	８	３
２３	８	４	０	６	２	８	４	０	６	２
２４	６	７	８	９	０	１	２	３	４	５
２５	４	１	８	５	２	９	６	３	０	７
２６	０	８	６	４	２	０	８	６	４	２
２７	４	９	４	９	４	９	４	９	４	９
２８	４	７	０	３	６	９	２	５	８	１
２９	８	６	４	２	０	８	６	４	２	０
３０	２	３	４	５	６	７	８	９	０	１
３１	０	９	８	７	６	５	４	３	２	１
３２	２	２	２	２	２	２	２	２	２	２

表 10

周期	６０	６０	６０	１２	６０	６０	６０	６０	１２	６０
１	０	１	２	３	４	５	６	７	８	９
２	９	９	９	９	９	９	９	９	９	９
３	９	０	１	２	３	４	５	６	７	８
４	８	９	０	１	２	３	４	５	６	７
５	７	９	１	３	５	７	９	１	３	５
６	５	８	１	４	７	０	３	６	９	２
７	２	７	２	７	２	７	２	７	２	７
８	７	５	３	１	９	７	５	３	１	９
９	９	２	５	８	１	４	７	０	３	６
１０	６	７	８	９	０	１	２	３	４	５
１１	５	９	３	７	１	５	９	３	７	１
１２	１	６	１	６	１	６	１	６	１	６
１３	６	５	４	３	２	１	０	９	８	７
１４	７	１	５	９	３	７	１	５	９	３
１５	３	６	９	２	５	８	１	４	７	０
１６	０	７	４	１	８	５	２	９	６	３
１７	３	３	３	３	３	３	３	３	３	３
１８	３	０	７	４	１	８	５	２	９	６
１９	６	３	０	７	４	１	８	５	２	９
２０	９	３	７	１	５	９	３	７	１	５
２１	５	６	７	８	９	０	１	２	３	４
２２	４	９	４	９	４	９	４	９	４	９
２３	９	５	１	７	３	９	５	１	７	３
２４	３	４	５	６	７	８	９	０	１	２
２５	２	９	６	３	０	７	４	１	８	５
２６	５	３	１	９	７	５	３	１	９	７
２７	７	２	７	２	７	２	７	２	７	２
２８	２	５	８	１	４	７	０	３	６	９
２９	９	７	５	３	１	９	７	５	３	１
３０	１	２	３	４	５	６	７	８	９	０
３１	０	９	８	７	６	５	４	３	２	１
３２	１	１	１	１	１	１	１	１	１	１

ですから，

$$\begin{aligned}
r_n &= r_2 r_{n-1} + r_1 r_{n-2} \\
&= r_2(r_{n-2} + r_{n-3}) + r_1 r_{n-2} \\
&= (r_2 + r_1) r_{n-2} + r_2 r_{n-3} \\
&= r_3 r_{n-2} + r_2 r_{n-3} \\
&= r_4 r_{n-3} + r_3 r_{n-4} \\
&= \cdots \\
&= r_8 r_{n-7} + r_7 r_{n-8} \\
&= r_{n-8}
\end{aligned}$$

基本周期は 8 です．

同様にして，

法	基本周期
4	6
5	２０
6	２４
7	１６
8	１２
9	２４
１０	６０
１１	１０
１２	２４
１３	２８
１４	４８
１５	４０

です．

5　フィーバー数列の一般化

モードが 2 の場合，フィーバー数列 F_i は，

$$F_1 = a, F_2 = b, F_{i+2} := F_i + F_{i+1} \pmod{2}$$

によって定義されます．したがって，フィーバー数列の第 5 項は，

$$F_5 = r_3 a + r_4 b := b \pmod{2}$$

となり，b が一定なので，「5 番目の数」が一定となります．

1 を周期とするものが 1 個，3 を周期とするものが 3 個，合計 $2^2 = 4$ 個です．

モード 3 の場合は，フィボナッチ剰余数列 r_i は，

$$r_0 = 0, r_1 = 1, r_{i+2} := r_i + r_{i+1} \pmod{3}$$

で定義されます．

表 11

周期	1	3		3	3
1	0	1		0	1
2	0	0		1	1
3	0	1		1	0
4	0	1		0	1
5	0	0		1	1

$r_{-1}=1, r_0=0, r_1=1, r_2=1, r_3=2, r_4=0, r_5=2, r_6=2, r_7=1, r_8=0, r_9=1, \cdots$ ですから，基本周期は 8 です．

フィーバー数列 F_i は，

$$F_1=a, F_2=b, F_{i+2}:=F_i+F_{i+1} \pmod 3$$

によって定義されます．したがって，フィーバーの数列の第 6 項は，

$$F_6:=r_4a+r_5b:=2b \pmod 3$$

となり，b が一定なので，「6 番目の数」が一定となります．

1 を周期とするものが 1 個，8 を周期とするものが 8 個，合計 $3^2=9$ 個です．

モード 4 の場合は，フィボナッチ剰余数列 r_i は，

表 12

周期	1	8	8		8	8	8		8	8	8
1	0	1	2		0	1	2		0	1	2
2	0	0	0		1	1	1		2	2	2
3	0	1	2		1	2	0		2	0	1
4	0	1	2		2	0	1		1	2	0
5	0	2	1		0	2	1		0	2	1
6	0	0	0		2	2	2		1	1	1
7	0	2	1		2	1	0		1	0	2
8	0	2	1		1	0	2		2	1	0
9	0	1	2		0	1	2		0	1	2
1 0	0	0	0		1	1	1		2	2	2

$$r_0=0, r_1=1, r_{i+2}:=r_i+r_{i+1} \pmod 4$$

で定義されます．

$r_{-1}=1, r_0=0, r_1=1, r_2=1, r_3=2, r_4=3, r_5=1, r_6=0, r_7=1, r_8=1, r_9=2, \cdots$ ですから，基本周期は 6 です．

フィーバー数列 F_i は，

$$F_1=a, F_2=b, F_{i+2}:=F_i+F_{i+1} \pmod 4$$

によって定義されます．

　したがって，フィーバー数列の第 8 項は，

$$F_8 := r_6 a + r_7 b := b \pmod 4$$

となり，b が一定なので，「8 番目の数」が一定となります．

　1 を周期とするものが 1 個，3 を周期とするものが 3 個，6 を周期とするものが 2 種類 12 個，合計 $4^2 = 16$ 個です．

表 13

周期	1	6	3	6		6	6	6	6
1	0	1	2	3		0	1	2	3
2	0	0	0	0		1	1	1	1
3	0	1	2	3		1	2	3	0
4	0	1	2	3		2	3	0	1
5	0	2	0	2		3	1	3	1
6	0	3	2	1		1	0	3	2
7	0	1	2	3		0	1	2	3
8	0	0	0	0		1	1	1	1

表 14

周期	3	6	3	6		6	6	6	6
1	0	1	2	3		0	1	2	3
2	2	2	2	2		3	3	3	3
3	2	3	0	1		3	0	1	2
4	0	1	2	3		2	3	0	1
5	2	0	2	0		1	3	1	3
6	2	1	0	3		3	2	1	0
7	0	1	2	3		0	1	2	3
8	2	2	2	2		3	3	3	3

　モード 5 の場合は，フィボナッチ剰余数列 r_i は，

$$r_0 = 0, r_1 = 1, r_{i+2} := r_i + r_{i+1} \pmod 5$$

で定義されます．$r_{-1} = 1, r_0 = 0, r_1 = 1, r_2 = 1, r_3 = 2, r_4 = 3, r_5 = 0, r_6 = 3, r_7 = 3, r_8 = 1, r_9 = 4, r_{10} = 0, r_{11} = 4, r_{12} = 4, r_{13} = 3, r_{14} = 2, r_{15} = 0, r_{16} = 2, r_{17} = 2, r_{18} = 4, r_{19} = 1, r_{20} = 0, r_{21} = 1, \cdots$ ですから，基本周期は 20 です．

　フィーバー数列 F_i は，

$$F_1 = a, F_b = b, F_{i+2} := F_i + F_{i+1} \pmod 5$$

によって定義されます．

したがって，フィーバー数列の第 7 項は，

$$F_7 := r_5 a + r_6 b := 3b \pmod{5}$$

となり，b が一定なので，「7 番目の数」が一定となります．

1 を周期とするものが 1 個，4 を周期とするものが 4 個，20 を周期とするものが 20 個，合計 $5^2 = 25$ 個です．

表 15　この表が表 15 でつぎの表は表 15（続）である．

周期	1	20	20	20	20		20	20	4	20	20		20	20	20	20	4
1	0	1	2	3	4		0	1	2	3	4		0	1	2	3	4
2	0	0	0	0	0		1	1	1	1	1		2	2	2	2	2
3	0	1	2	3	4		1	2	3	4	0		2	3	4	0	1
4	0	1	2	3	4		2	3	4	0	1		4	0	1	2	3
5	0	2	4	1	3		3	0	2	4	1		1	3	0	2	4
6	0	3	1	4	2		0	3	1	4	2		0	3	1	4	2
7	0	0	0	0	0		3	3	3	3	3		1	1	1	1	1
8	0	3	1	4	2		3	2	4	2	0		1	4	2	0	3
9	0	3	1	4	2		1	0	2	0	3		2	0	3	1	4
10	0	1	2	3	4		4	2	1	2	3		3	4	0	1	2
11	0	4	3	2	1		0	2	3	2	1		0	4	3	2	1
12	0	0	0	0	0		4	4	4	4	4.		3	3	3	3	3

周期	20	4	20	20	20		20	20	20	4	20
1	0	1	2	3	4		0	1	2	3	4
2	3	3	3	3	3		4	4	4	4	4
3	3	4	0	1	2		4	0	1	2	3
4	1	2	3	4	0		3	4	0	1	2
5	4	1	3	0	2		2	4	1	3	0
6	0	3	1	4	2		0	3	1	4	2
7	4	4	4	4	4		2	2	2	2	2
8	4	2	0	3	1		2	0	3	1	4
9	3	1	4	2	0		4	2	0	3	1
10	2	3	4	0	1		1	2	3	4	0
11	0	4	3	2	1		0	4	3	2	1
12	2	2	2	2	2		1	1	1	1	1

モード 6 の場合は，フィボナッチ剰余数列 r_i は，

$$r_0 = 0, r_1 = 1, r_{i+2} := r_i + r_{i+1} \pmod{6}$$

で定義されます．

$r_{-1}=1, r_0=0, r_1=1, r_2=1, r_3=2, r_4=3, r_5=5, r_6=2, r_7=1, r_8=3, r_9=4, r_{10}=1, r_{11}=5, r_{12}=3, r_{13}=5, r_{14}=5, r_{15}=4, r_{16}=3, r_{17}=1, r_{18}=4, r_{19}=5, r_{20}=3, r_{21}=2, r_{22}=5, r_{23}=1, r_{24}=0, \cdots$ ですから，基本周期は 24 です．

フィーバー数列 F_i は，

$$F_1=a, F_2=b, F_{i+2}:=F_i+F_{i+1} \pmod 5$$

によって定義されます．したがって，フィーバー数列の第 7 項は，

$$F_7 := r_5 a + r_6 b := 3b \pmod 5$$

となり，b が一定なので，「7 番目の数」が一定となります．

フィーバー数列 F_i は，

$$F_1=a, F_2=b, F_{i+2}:=F_i+F_{i+1} \pmod 6$$

によって定義されます．したがって，フィーバー数列の第 14 項は，

$$F_{14} := r_{12} a + r_{13} b := 5b \pmod 6$$

となり，b が一定なので，「14 番目の数」が一定となります．

1 を周期とするものが 1 個，3 を周期とするものが 3 個，8 を周期とするものが 8 個，24 を周期とするものが 24 個，合計 $6^2=36$ です．

表 16　この表が表 16 で，つぎの表は表 16（続）である．

周期	1	24	8	3	8	24	24	24	24	24	24	24	8	24	8	24	8	24
1	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5
2	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
3	0	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	0	2	3	4	5	0	1
4	0	1	2	3	4	5	2	3	4	5	0	1	4	5	0	1	2	3
5	0	2	4	0	2	4	3	5	1	3	5	1	0	2	4	0	2	4
6	0	3	0	3	0	3	5	2	5	2	5	2	4	1	4	1	4	1
7	0	5	4	3	2	1	2	1	0	5	4	3	4	3	2	1	0	5
8	0	2	4	0	2	4	1	3	5	1	3	5	2	4	0	2	4	0
9	0	1	2	3	4	5	3	4	5	0	1	2	0	1	2	3	4	5
10	0	3	0	3	0	3	4	1	4	1	4	1	2	5	2	5	2	5
11	0	4	2	0	4	2	1	5	3	1	5	3	2	0	4	2	0	4
12	0	1	2	3	4	5	5	0	1	2	3	4	4	5	0	1	2	3
13	0	5	4	3	2	1	0	5	4	3	2	1	0	5	4	3	2	1
14	0	0	0	0	0	0	5	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4

周期	3	24	24	3	24	24		8	24	8	24	8	24		24	24	24	24	24	24
1	0	1	2	3	4	5		0	1	2	3	4	5		0	1	2	3	4	5
2	3	3	3	3	3	3		4	4	4	4	4	4		5	5	5	5	5	5
3	3	4	5	0	1	2		4	5	0	1	2	3		5	0	1	2	3	4
4	0	1	2	3	4	5		2	3	4	5	0	1		4	5	0	1	2	3
5	3	5	1	3	5	1		0	2	4	0	2	4		3	5	1	3	5	1
6	3	0	3	0	3	0		2	5	2	5	2	5		1	4	1	4	1	4
7	0	5	4	3	2	1		2	1	0	5	4	3		4	3	2	1	0	5
8	3	5	1	3	5	1		4	0	2	4	0	2		5	1	3	5	1	3
9	3	4	5	0	1	2		0	1	2	3	4	5		3	4	5	0	1	2
10	0	3	0	3	0	3		4	1	4	1	4	1		2	5	2	5	2	5
11	3	1	5	3	1	5		4	2	0	4	2	0		5	3	1	5	3	1
12	3	4	5	0	1	2		2	3	4	5	0	1		1	2	3	4	5	0
13	0	5	4	3	2	1		0	5	4	3	2	1		0	5	4	3	2	1
14	3	3	3	3	3	3		2	2	2	2	2	2		1	1	1	1	1	1

不思議な数式 3

山崎和夫 [*1]

Strange Number Orders 3

Kazuo Yamazaki[*2]

1　たねあかし

これは「数学・物理通信」8 巻 3 号 (2018.3) 20-21 と 8 巻 5 号 (2018.6) 28-30 の続編です．

このシリーズで論じてきた不思議な数式の群れの成り立ちの証明，あるいは，なぜそのような規則的で見事で不思議な数式が成り立つのか，小学生の算数で理解できる種明かしをします．既に書いてきたように数学的帰納法で済むことですが．

先ずシリーズで取り上げた不思議な数式の特徴を明確に述べておきましょう．それは等式の左右両辺でそれぞれ 1 組の特殊な数列を含み，その数列は 1 から 9 までの（時に 0 を含む）自然数を小から大へ，または，大から小へ規則的に順番に並べたものです．数列は常に 1 個から 2 個，3 個…と数字の数が 1 個ずつ増えて行きます[*3]

つまり次の数式はその前の数式より 1 桁大きな数の等式になっています．原則として右辺の数列はその形が数学的に美しいものになるように，左辺の数列をいわば手で入れて，必要ならなるべく規則的な補正をします．

上記のような数列はその最上桁に，もしくは，最小桁に 1 個の数が付加されて次の式が生じます．この 2 つの場合で次の式の求め方が大きく異なります．

このような言葉による説明は解りにくいのですが，すぐに以下で具体例で説明するのでもう少しご辛抱ください．

先ず最小桁，つまり，1 桁目に新たな数字が 1 個付加されて次の式が生ずる場合には既に解かっている数式 (U) とこれから求めるべき次の数式を (X) とします．

(X) の左辺に含まれる数列はそれまでの一連の数式の流れからほぼその形は推測できます．この場合には (U) の両辺を 10 倍したつまり 1 桁目に 0 を付加した式を，(X) の両辺から辺々相引くことにします．

$$(\mathrm{X})\text{ の右辺} - 10 \times (\mathrm{U}\text{ の右辺}) = (\mathrm{X})\text{ の左辺} - 10 \times (\mathrm{U}\text{ の左辺}) \tag{1}$$

移項して

$$(\mathrm{X})\text{ の右辺} = 10 \times (\mathrm{U}\text{ の右辺}) + [(\mathrm{X})\text{ の左辺} - 10 \times (\mathrm{U}\text{ の左辺})] \tag{2}$$

で (X) の右辺が求められます．

---

*1 京都大学名誉教授

*2 kazuo-yamazaki@y2.dion.ne.jp

*3 編集者注：山崎さんの数列という用語は普通に使われるのとすこし違う．それも使われる場所で意味が多義的である．普通には数の列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ を数列という．ところが，数列という用語を場合によっては単に一つの数の中の数の並びという意味に使ったり，縦に書かれたつぎつぎの数式の左辺（または右辺）のつぎつぎの規則的な数の列を数列と言われるときもある．このときには左辺の数（または右辺の数）だけををつぎつぎと取り出して並べれば，確かに数列であるが，それらの数をつぎつぎと並べるという風に表されているわけでもない．読者がその場その場で臨機応変に解釈することが必要である．

お待ちどうさま．上記の“からくり”をこの話の最初の数式群でご説明します．

$$
\begin{aligned}
1 \times 8 + 1 &= \underline{9} \\
12 \times 8 + 2 &= \underline{9}8 \\
123 \times 8 + 3 &= \underline{98}7 \\
&\cdots \\
&\cdots \\
123456 \times 8 + 6 &= \underline{98765}4 \qquad \text{(U)} \\
1234567 \times 8 + 7 &= ? \qquad \text{(X)}
\end{aligned}
$$

上に説明したようにして，？を求めます．

$$
\begin{aligned}
? &= 9876540 + [(1234567 \times 8 + 7) - (1234560 \times 8 + 60)] \\
&= 9876540 + [(7 \times 8 + 7) - 60] \\
&= 9876540 + [(56 + 7) - 60] \\
&= 9876540 + 3 \\
&= 9876543
\end{aligned} \tag{3}
$$

で答えが求まりました．上に書いた簡単な 3 個の式でやってみてください．“からくり”が見えてきましたか？

つぎに，左辺の数列の最大桁に数字が 1 個だけ付加される場合を具体的な数式で説明します．

$$
\begin{aligned}
1 \times 9 - 1 &= \square 8 \\
21 \times 9 - 1 &= 188 \\
321 \times 9 - 1 &= 2888 \\
&\cdots \\
&\cdots \\
87654321 \times 9 - 1 &= 788888888 \qquad \text{(U)} \\
987654321 \times 9 - 1 &= ? \qquad \text{(X)}
\end{aligned}
$$

ここで，? の求め方を示します．

最後の式 (X) からその上の式 (U) を辺々相引くと

$$? - 788888888 = (987654321 \times 9 - 1) - (87654321 \times 9 - 1) \tag{4}$$

移項して，右辺の引き算をすれば

$$
\begin{aligned}
? &= 788888888 + (900000000 \times 9) \\
&= 88888888 + (7 + 9 \times 9) \times 100000000 \\
&= (7 + 81) \times 100000000 + 88888888 \\
&= 8888888888
\end{aligned} \tag{5}
$$

となります．すなわち，求める式は

$$987654321 \times 9 - 1 = 8888888888 \tag{6}$$

です．先ほどと同様に上記の初めの 3 個の式で確かめてみてください．

くりかえしになりますが，結論をもう一度まとめれば，左辺の数列の 1 桁の位置に新たな数字を 1 個付加する場合には，そうして得られた数式の両辺を 10 倍して，それを次の求めようとする式から引けば，大部分は消えて，新たに加えた数字による変化が 1 桁の数になります．それを右辺の 1 桁として付加すればよいことになります．

また，左辺の数列の最高桁に新たな数字を 1 個付加する場合には，その新たな数列を含む数式から 1 つ上の数式を引くと大部分がキャンセルして，最高桁に付加した数による寄与のみが残り，それを右辺に加えればよいことになります．

逆に，(X) が与えられているとして，(U) の右辺を導出してみてください．

以下の式 (7) から (20) までは結果のみを書きましたが，この「たねあかし」と同様に説明出来ます．

2　不思議な数式の群れ (3)

$$
\begin{aligned}
1 \times 8 - 1 &= \square\underline{7} \\
21 \times 8 - 1 &= 1\underline{67} \\
321 \times 8 - 1 &= 2\underline{567} \\
4321 \times 8 - 1 &= 3\underline{4567} \\
54321 \times 8 - 1 &= 4\underline{34567} \\
654321 \times 8 - 1 &= 5\underline{234567} \\
7654321 \times 8 - 1 &= 6\underline{1234567} \\
87654321 \times 8 - 1 &= 7\underline{01234567}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

ここまでは右辺も左辺も見事で規則的な数列でほかの可能性はありません．ところがこれをそのまま延長すれば，$987654321 \times 8 - 1 = 7901234567$ になります．これは最初の 79 が $9 \times 8 + 7 = 79$ となるためで，計算を何度もやり直してみましたが，計算ミスではありませんでした．しかし，右辺の数列の縦，横の並びからすると 79 ではなく 89 であることが望ましいのです．

そこで，$\times 8$ のタイプの数列では上記の 8 個の数式で 1 巡目は終わり，9 個目からは左辺に $1000000000 = 10^9$ を付加すれば

$$
\begin{aligned}
987654321 \times 8 - 1 + 1 \times 10^9 &= 8901234567 \\
8987654321 \times 8 - 1 + 1 \times 10^9 + 6 \times 10^9 &= 78901234567 \\
78987654321 \times 8 - 1 + 47 \times 10^9 &= 678901234567 \\
678987654321 \times 8 - 1 + 247 \times 10^9 &= 5678901234567 \\
5678987654321 \times 8 - 1 + 247 \times 10^9 &= 45678901234567 \\
45678987654321 \times 8 - 1 + 247 \times 10^9 - 2 \times 10^{13} &= 345678901234567 \\
345678987654321 \times 8 - 1 + 247 \times 10^9 - 42 \times 10^{13} &= 2345678901234567 \\
2345678987654321 \times 8 - 1 + 247 \times 10^9 - 642 \times 10^{13} &= 12345678901234567 \\
12345678987654321 \times 8 - 1 + 247 \times 10^9 - 8642 \times 10^{13} &= \square 12345678901234567
\end{aligned}
\tag{8}
$$

最後の 2 つの式の右辺は同じです．ミスプリントではありません．

ここでは右辺の数列に最高桁に縦に並ぶ数列と，横向きにはおなじみの数列が見事に並んでいることに，お気づきでしょうね．左辺に含まれている数列は，右辺のような見事な数列を得られるように，いわば意図的に手で補正を加えて，8 倍したり 1 を引いたりして，右辺のそれと無関係な数列と等式 = で結ばれているのは不思議ではないでしょうか．右辺の数列などいくら見ても見えない方，そんなことは偶然そうなっているので不思議でも何でもないと思う方は，このあたりであきらめてください．10 桁の数が偶然同じになる確率は 100 億分の 1 なのですよ．

以下の数列では右辺に 8 が何個も並びますが，2 巡目からは 9 が 1 個入ってきます．左辺を細工して，右辺は最

高桁以外全部が 8 になるように補正してあります.

$$\begin{aligned}
1 \times 9 - 1 &= \square 8 \\
21 \times 9 - 1 &= 188 \\
321 \times 9 - 1 &= 2888 \\
4321 \times 9 - 1 &= 38888 \\
54321 \times 9 - 1 &= 488888 \\
654321 \times 9 - 1 &= 5888888 \\
7654321 \times 9 - 1 &= 68888888 \\
87654321 \times 9 - 1 &= 788888888 \\
987654321 \times 9 - 1 &= 8888888888 \\
10987654321 \times 9 - 1 &= 98888888888 \\
210987654321 \times 9 - 1 - 1 \times 10^{10} &= 1888888888888 \\
3210987654321 \times 9 - 1 - 1 \times 10^{10} &= 28888888888888 \\
43210987654321 \times 9 - 1 - 1 \times 10^{10} &= 388888888888888 \\
543210987654321 \times 9 - 1 - 1 \times 10^{10} &= 4888888888888888 \\
6543210987654321 \times 9 - 1 - 1 \times 10^{10} &= 58888888888888888 \\
76543210987654321 \times 9 - 1 - 1 \times 10^{10} &= 688888888888888888 \\
876543210987654321 \times 9 - 1 - 1 \times 10^{10} &= 7888888888888888888 \\
9876543210987654321 \times 9 - 1 - 1 \times 10^{10} &= 88888888888888888888 \\
109876543210987654321 \times 9 - 1 - 1 \times 10^{10} &= 988888888888888888888
\end{aligned} \tag{9}$$

こちらは上記の補正の件以外は単純で見事に縦，横の数列が並んでいます.

3 不思議な数式の群れ (4)

3.1 左辺が奇数列の場合

先に左辺が奇数列の場合を挙げましょう.

$$\begin{aligned}
1 \times 9 - 2 &= \square 7 \\
31 \times 9 - 2 &= 277 \\
531 \times 9 - 2 &= 4777 \\
7531 \times 9 - 2 &= 67777 \\
97531 \times 9 - 2 &= 877777 \cdots \\
&\cdots \\
197531 \times 9 - 2 &= 1777777 \\
3197531 \times 9 - 2 &= 28777777 \\
53197531 \times 9 - 2 &= 478777777 \\
753197531 \times 9 - 2 &= 6778777777 \\
9753197531 \times 9 - 2 &= 87778777777
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
1 \times 9 &= \square 9 \\
13 \times 9 &= 117 \\
135 \times 9 &= 1215 \\
1357 \times 9 &= 12213 \\
13579 \times 9 &= 122211 \cdots \\
&\cdots \\
135791 \times 9 &= 1222119 \\
1357913 \times 9 &= 12221217 \\
13579135 \times 9 &= 122212215 \\
135791357 \times 9 &= 1222122213 \\
1357913579 \times 9 &= 12221222211
\end{aligned} \tag{11}$$

2 巡目では右辺の最高桁以外は適当に左辺を細工すれば

$$\begin{aligned} 197531\times 9-2&=17777777\\ 3197531\times 9-2-1\times 10^6&=27777777\\ 53197531\times 9-2-1\times 10^6&=477777777\\ 753197531\times 9-2-1\times 10^6&=6777777777\\ 9753197531\times 9-2-1\times 10^6&=87777777777 \end{aligned}\tag{12}$$

$$\begin{aligned} 135791\times 9+1\times 10^2&=1222219\\ 1357913\times 9+1\times 10^3&=12222217\\ 13579135\times 9+1\times 10^4&=122222215\\ 135791357\times 9+1\times 10^5&=1222222213\\ 1357913579\times 9+1\times 10^6&=12222222211 \end{aligned}\tag{13}$$

3.2　左辺が偶数列の場合

つぎに左辺が偶数列の場合を挙げましょう．

$$\begin{gathered} 2\times 9-1=17\\ 42\times 9-1=377\\ 642\times 9-1=5777\\ 8642\times 9-1=77777\\ \cdots\\ \cdots\\ 28642\times 9-1-8\times 10^4=177777\\ 428642\times 9-1-8\times 10^4=3777777\\ 6428642\times 9-1-8\times 10^4=57777777\\ 86428642\times 9-1-8\times 10^4=777777777 \end{gathered}\tag{14}$$

$$\begin{gathered} 2\times 9+10=28\\ 24\times 9+10=226\\ 246\times 9+10=2224\\ 2468\times 9+10=22222\\ \cdots\\ \cdots\\ 24680\times 9+1\times 10^2=222220\\ 246802\times 9+1\times 10^3=2222218\\ 2468024\times 9+1\times 10^4=22222216\\ 24680246\times 9+1\times 10^5=222222214\\ 246802468\times 9+1\times 10^6=2222222212 \end{gathered}\tag{15}$$

以上は $\times 9$ のタイプの数式群を取り上げてきましたが，$\times 8$ のタイプの数式群をあげておきます．

$$\begin{gathered} 2\times 8=16\\ 24\times 8=192\\ 246\times 8=1968\\ 2468\times 8=19744\\ 24682\times 8=197456\\ 246824\times 8=1974592\\ 2468246\times 8=19745968\\ 24682468\times 8=197459744 \end{gathered}\tag{16}$$

$$\begin{gathered} 2\times 8=16\\ 42\times 8=336\\ 642\times 8=5136\\ 8642\times 8=69136\\ 28642\times 8=229136\\ 428642\times 8=3429136\\ 6428642\times 8=51429136\\ 86428642\times 8=691429136 \end{gathered}\tag{17}$$

$\times 7$ のタイプの数式は複雑で規則性がはじめわかりにくかったですが，すこし試行錯誤するとそれなりに何か見つかりそうです．その例を 2 つだけ与えておきましょう．

$$
\begin{aligned}
1 \times 7 + 2 &= \square 9 \\
12 \times 7 + 3 &= 87 \\
123 \times 7 + 4 &= 865 \\
1234 \times 7 + 5 &= 8643 \\
12345 \times 7 + 6 &= 86421 \\
123456 \times 7 + 7 &= 864199 \\
1234567 \times 7 + 8 &= 8641977 \\
12345678 \times 7 + 9 &= 86419755 \\
123456789 \times 7 + 10 &= 864197533 \\
1234567890 \times 7 + 1 &= 8641975231 \\
12345678901 \times 7 + 2 &= 86419752309 \\
123456789012 \times 7 + 3 &= 864197523087
\end{aligned} \tag{18}
$$

$$
\begin{aligned}
1 \times 7 &= \square 7 \\
21 \times 7 &= 147 \\
321 \times 7 &= 2247 \\
4321 \times 7 &= 30247 \\
54321 \times 7 &= 380247 \\
654321 \times 7 &= 4580247 \\
7654321 \times 7 &= 53580247 \\
87654321 \times 7 &= 613580247 \\
987654321 \times 7 &= 6913580247 \\
10987654321 \times 7 &= 76913580247
\end{aligned} \tag{19}
$$

4　不思議な数式の発展の例

このシリーズではいままである特殊な数字の列の組み合わせを基礎にして，いくつかの不思議な数式のグループを導いてきました．それらの間に成り立つ単発の不思議な数式がありそうです．その最初の一つは式 (18) の下から 4 番目の式 $123456789 \times 7 + 10 = 864197533$ をすこし細工してみれば，

$$123456789 \times 7 + 8 + 100000 = 864297531 \tag{20}$$

が得られます．これはとても見事な式だと思うのですが.

実は (20) は (18) の一つを補正して得られた式で，数式の群れの横断型で目指している数式ではありません．いくつかの候補はあるのですが，いずれも私にとって満足できる見事な数式ではありませんので，今回はここに発表することは見送ります．例えば，(20) の右辺は見事な数列ですが，右辺を先に特定して，それと等しくなるような左辺の規則的な数列を発見するのは，とても難しいことなのです．

（最終点検時に追加）

つぎの 8 つの式はその後いろいろ調べているうちに，得られたものです．

(a)-(e) の 5 桁までの式は比較的きれいなのですが，(f)-(h) の 9，10 桁の式は等式 = を成り立たせるために，無理やり左辺をこしらえた結果として得られたものです．

$$1234 \times 7 + 4 = 8642 \tag{a}$$
$$12345 \times 7 + 5 = 86420 \tag{b}$$
$$6789 \times 8 + 9 = 54321 \tag{c}$$
$$12345 \times 8 + 5 = 98765 \tag{d}$$
$$13933 \times 7 = 97531 \tag{e}$$
$$123471076 \times 7 - 1 = 864297531 \tag{f}$$
$$1234585361 \times 7 + 4 = 8642097531 \tag{g}$$
$$1393312345 \times 7 + 5 = 9753186420 \tag{h}$$

ある定積分の解析

秋葉 敏男

The Analysis of a Definite Integral

Toshio Akiba*1

1 はじめに

「数学・物理通信」のバックナンバーを読み返していて，下記の定積分の誤りについての指摘を目にしました [1].

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^x\log x}\mathrm{d}x=0$$

確かに，手元の数学公式集 (1960 年代刊行) にも上記の記載が見られます.

そこで，この定積分を解析的に計算できないかと考えました． 以下は，問題の定積分の解析計算への一つの試みです.

2 不定積分の計算

まず上の定積分の被積分関数を $f(x)$ と表します．すなわち，

$$f(x)=\frac{1}{\mathrm{e}^x\log x}$$

として、$f(x)$ の不定積分を考察します． そのため，試みに $f(x)$ を微分してみると

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=&\frac{-\mathrm{e}^x(\log x+x^{-1})}{(\mathrm{e}^x\log x)^2}\\=&-\frac{1}{\mathrm{e}^x\log x}-\frac{1}{x\mathrm{e}^x(\log x)^2}\\=&-f(x)-g(x)\qquad\qquad\left(g(x)\equiv\frac{1}{x\mathrm{e}^x(\log x)^2}\right)\end{aligned}$$

すなわち

$$\int f(x)\mathrm{d}x=-f(x)-\int g(x)\mathrm{d}x \tag{2.1}$$

次に，$g(x)$ の不定積分を計算するために $t=\log x$ により変数変換すれば

$$g(x)\mathrm{d}x=\frac{x\mathrm{d}t}{x\mathrm{e}^x t^2}=\frac{\exp(-\mathrm{e}^t)}{t^2}\mathrm{d}t\equiv h(t)\mathrm{d}t$$

$h(t)$ の分子の指数関数を整級数に展開すると

$$\begin{aligned}\exp(-\mathrm{e}^t)=&\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{e}^t)^l}{l!}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l\mathrm{e}^{lt}}{l!}\\=&\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(lt)^m}{m!}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l l^m}{l!}\equiv\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\psi(m)}{m!}t^m\end{aligned}$$

*1 tawarp@mug.biglobe.ne.jp

ここで，次の様に定義しています．

$$\psi(m) \equiv \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l l^m}{l!} \tag{2.2}$$

ちなみに，上記の展開式の変数を x に戻すと，e^{-x} を $\log x$ で級数展開した形になります.(この関係式は，付録 3 で使っています)

$$\mathrm{e}^{-x} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi(m)}{m!} (\log x)^m \tag{2.3}$$

定義式 (2.2) から，$\psi(0) = \mathrm{e}^{-1}$，$\psi(1) = -\mathrm{e}^{-1}$　と求められますから，$h(t)$ は次の様に変形されます．

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{t^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi(m)}{m!} t^m = \frac{\psi(0)}{t^2} + \frac{\psi(1)}{t} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\psi(m)}{m!} t^{m-2} \\ &= \frac{t^{-2} - t^{-1}}{\mathrm{e}} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\psi(m)}{m!} t^{m-2} \end{aligned} \tag{2.4}$$

そこで，式 (2.4) の右辺を項別積分して

$$\int h(t) \mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-1}(t^{-1} + \log t) + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\psi(m)}{m!(m-1)} t^{m-1}$$

これを式 (2.1) 代入して整理すれば

$$\int f(x) \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-x}}{\log x} + \mathrm{e}^{-1} \log|\log x| - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\psi(m+1)}{(m+1)!m} (\log x)^m \equiv J_1 \tag{2.5}$$

これが問題の関数の不定積分です．
一方、下記の不定積分 [2] を利用して $f(x)$ の不定積分を求める事も出来ます.($\log x = t$ と置換して得られます.)

$$\int \frac{x^m}{\log x} \mathrm{d}x = \mathrm{li}(x^{m+1}) \tag{2.6}$$

$$\mathrm{li}(x^{m+1}) \equiv \log|\log x| + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(m+1)^r (\log x)^r}{r \times r!} \tag{2.7}$$

この公式を使うと

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x \log x} &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \mathrm{li}(x^{l+1}) \\ &= \mathrm{e}^{-1} \log|\log x| - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\psi(m+1)}{m! \times m} (\log x)^m \equiv J_2 \end{aligned} \tag{2.8}$$

これも問題の関数の不定積分で，二つ不定積分は，$J_2 = J_1 - \mathrm{e}^{-1}$ の関係にあります.(付録 3 参照)

3　定積分の計算・評価

定積分を計算するために，式 (2.5) の右辺の各項に次の様に名前を付けます．

$$\begin{aligned} &I_1 \equiv \frac{\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-x}}{\log x} \qquad : \qquad I_2 \equiv \log|\log x| \\ &I_3 \equiv \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\psi(m)}{m!(m-1)} (\log x)^{m-1} \equiv \sum_{m=2}^{\infty} a_m (\log x)^{m-1} \end{aligned} \tag{3.1}$$

まず，ロピタルの定理により

$$\lim_{x\to 1+0} I_1 = \lim_{x\to 1+0} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1/x} = \mathrm{e}^{-1} \qquad : \qquad \lim_{x\to 1-0} I_1 = \lim_{t\to 1+0} \frac{\mathrm{e}^{-1/t}}{t} = \mathrm{e}^{-1}$$

従って，$I_1]_0^\infty = I_1]_0^1 + I_1]_1^\infty = \left(\mathrm{e}^{-1} - 0\right) + \left(0 - \mathrm{e}^{-1}\right) = 0$
次に，$\lim_{x\to\infty} I_2 = \lim_{x\to 0} I_2 = \lim_{t\to\infty} \log t$ 及び $\lim_{x\to 1\pm 0} I_2 = \lim_{t\to\infty} \log t$ ですから

$$\begin{aligned} I_2]_0^\infty &= \left(\lim_{x\to\infty} \log x - \lim_{y\to 1+0} \log|\log y|\right) + \left(\lim_{s\to 1-0} \log|\log s| - \lim_{t\to\infty} \log t\right) \\ &= \lim_{x,t\to\infty} \log\frac{x}{t} + \lim_{s,y\to\infty} \log\frac{s}{y} = \log 1 + \log 1 = 0 \end{aligned}$$

最後に $I_3]_0^\infty$ を計算します.
$\lim_{x\to 1\pm 0} \sum_{m=2}^\infty a_m (\log x)^{m-1} = 0$ ですから

$$I_3]_0^\infty = \lim_{x\to\infty} \sum_{m=2}^\infty a_m (\log x)^{m-1} - \lim_{x\to 0} \sum_{m=2}^\infty a_m (\log x)^{m-1}$$

以上より，求める定積分を w と書けば

$$\begin{aligned} w &= I_1]_0^\infty + \mathrm{e} I_2]_0^\infty - I_3]_0^\infty = -I_3]_0^\infty \\ &= \lim_{t\to\infty} \sum_{m=2}^\infty a_m (-\log t)^{m-1} - \lim_{x\to\infty} \sum_{m=2}^\infty a_m (\log x)^{m-1} \end{aligned}$$

付録 2 に示す様に，I_3 は区間 $(-\infty, \infty)$ で絶対収束しますから，m の偶数項と奇数項に分けて考えると，w においては偶数項のみとなりますから

$$w = -2 \lim_{t\to\infty} \sum_{p=1}^\infty a_{2p} (\log t)^{2p-1} \tag{3.2}$$

そこで，$x = \log t$ と変換して $F(x) \equiv \sum_{p=1}^\infty a_{2p} x^{2p-1}$ とおけば

$$w = -2 \lim_{x\to\infty} F(x) \tag{3.3}$$

$$F(x) = \sum_{p=1}^\infty \frac{\psi(2p)}{(2p)!(2p-1)} x^{2p-1} = \sum_{p=1}^\infty a_{2p} x^{2p-1} \qquad (x > 0) \tag{3.4}$$

この級数 $F(x)$ の m 項までの部分和を　$F_m = \sum_{p=1}^m a_{2p} x^{2p-1}$ とします.

ところで，付録 1 の命題 (2) で触れている様に，a_{2p} の符号は連続する複数の項について同一で，やがて反符号となって複数項続き，この様な符号反転を繰り返します.

そこで，m を或る正項列の末尾項の添え字になる様に選び，この正項列の項数を k とし，正項列の直前の負項列の項数を j とします.(k, j は m と伴に増加します)

この時，正項を $a_{2q} x^{2q-1}$ で，負項を $-|a_{2n}| x^{2n-1}$ の様に表示すれば

$$F_m = \sum_q^m a_{2q} x^{2q-1} - \sum_n^{m-k} |a_{2n}| x^{2n-1}$$

上記の部分和 F_m の右辺に，負項の符号を反転したものを加減し，$(m-k-j)$ 項までの正項の 2 倍を加減してやると　$a_2 = 0$ ですから

$$F_m = \sum_{q=2}^m a_{2q} x^{2q-1} - 2 \sum_{n=2}^{m-k} |a_{2n}| x^{2n-1} + 2 \sum_q^{m-k-j} a_{2q} x^{2q-1}$$

ここで，付録 1 命題 (3) の近似値を使えば，$\mathrm{e}a_{2m} = \alpha_{2m} \times 10^{-m}(1 \le |\alpha_{2m}| < 10)$ と書けますから，$r \equiv x^2/10$ と置いて

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}xF_m &\approx \sum_{q=2}^{m} \alpha_{2q} r^q - 2\sum_{n=2}^{m-k} |\alpha_{2n}| r^n + 2\sum_{q}^{m-k-j} \alpha_{2q} r^q \\
&> \sum_{q=2}^{m} r^q - 20\sum_{n=2}^{m-k} r^n + 2\sum_{q}^{m-k-j} r^q \\
&> \sum_{q=2}^{m} \frac{(-1)^q}{q!} r^q - 20\sum_{n=2}^{m-k} r^n + 2\sum_{q}^{m-k-j} r^q \\
&= \sum_{q=2}^{m} \frac{(-1)^q}{q!} r^q - 20\frac{r^{m+1-k} - r^2}{r-1} + 2\sum_{q}^{m-k-j} r^q \equiv G_m
\end{aligned} \tag{3.5}$$

m を無限大にすると，G_m の第一項は $r - 1 + \mathrm{e}^{-r}$ に収束します. そして，$(m-k)$ 及び $(m-k-j) \equiv \mu$ は 0 に収束しますから，G_m の極限値 G_∞ は

$$G_\infty \equiv \lim_{m\to\infty} G_m = (21r - 1) + \mathrm{e}^{-r} + 2\lim_{\mu\to 0}\sum_{q}^{\mu} r^q$$

となり，正値です. 従って

$$\mathrm{e}xF(r) \equiv \lim_{m\to\infty} \mathrm{e}xF_m \ge G_\infty > 0$$

これから $F(r) > 0$ である事が分かります. そして，絶対収束級数 (3.4) の和は，この $F(r)$ に限ります.

そこで，関数 $F(r)$ の形状を知る為に，その微分係数を計算してみます. $F(r)$ は整級数ですから項別微分可能で，得られた整級数の収束半径は $F(r)$ のものと同一です.[3]

式 (3.4) より

$$F^{'}(x) \equiv \frac{dF(x)}{dx} = \sum_{p=1}^{\infty} a_{2p}(2p-1)x^{2p-2} \equiv \sum_{p=1}^{\infty} b_{2p} x^{2p-2}$$

ここで導入された係数 $b_{2p} = (2p-1)a_{2p}$ は付録 1 命題 (3) に示す a_{2p} の近似値*2 $\frac{10^{-p}}{2p\times\mathrm{e}}$ を使って $b_{2p} \approx 10^{-p}\frac{2p-1}{2p\times\mathrm{e}} \approx \frac{10^{-p}}{\mathrm{e}}$ と近似出来ます. この近似値を使えば，$F(r)$ の場合と全く同様の計算で $F^{'}(x)$ が正値である事が示されます. 従って，正値関数 $F(x)$ は x が無限に増加する時，増加関数として極限値に収束しますから，その極限値は正値です. よって，式 (3.3) より $w < 0$　という事になり，求める定積分 w は負値であると評価されます.

式 (3.4) より

$$\begin{aligned}
F(x) &= a_4x^3 - |a_6|x^5 + a_8x^7 + ... \\
&= a_4x^3(1 - \frac{|a_6|}{a_4}x^2 + ...) \\
&\approx \frac{a_4x^3}{1 + \frac{|a_6|}{a_4}x^2} \\
&\approx \frac{a_4}{\frac{1}{M} + \frac{|a_6|}{a_4}} \qquad (x^2, x^3 \text{を大数 M で近似})
\end{aligned} \tag{3.6}$$

*2 式 (a1.2) 参照

$$\lim_{M\to\infty} F(x) \approx \frac{(a_4)^2}{|a_6|} \approx 0.0283857 \qquad (a_4 \approx 5.109436\times 10^{-3}, a_6 \approx -9.196986\times 10^{-4})$$

従って，求める定積分の概略値は -0.05677 とされます.
次に，もう一つの不定積分 (2.8) を用いると

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x &= -2\lim_{x\to\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(\log x)^{2m+1}\frac{\psi(2m+2)}{(2m+1)!(2m+1)} \\ &= -2\lim_{x\to\infty}\sum_{p=1}^{\infty}2p\times a_{2p}(\log x)^{2p-1} \qquad (3.7)\end{aligned}$$

となり，式 (3.2) の係数に対して因子 $2p$ の違いがあります. この違いは，微分係数 $\acute{F}(x)$ の係数 $(b_{2p}=(2p-1)a_{2p})$ の場合と同様のものですから，式 (3.2) と式 (3.7) は収束性などの違いはあっても同一の和を与えると考えられます. 式 (3.6) と同じ考え方で定積分の概略値を求めてみると

$$w \approx -2\frac{(4a_4)^2}{6|a_6|} = -\frac{8}{3}\times 0.05677 = -0.15139 \qquad (3.8)$$

計算機でこの定積分を処理した結果は以下のとおりです.

$$S_1 \equiv \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad : \quad S_2 \equiv \int_c^d f(x)\mathrm{d}x$$

において，$a=10^{-6}:b=1-10^{-6}:c=1+10^{-6}$ とおき，d の値を変えてみると下表の様になります.

d	S_1(一定)	S_2	$S_1+S_2\approx w$
10	-5.19051897	5.036020779	-0.154498191
20	-5.19051897	5.036039763	-0.154479207
30	-5.19051897	5.036039764	-0.154479206
40	-5.19051897	5.036039764	-0.154479206
50	-5.19051897	5.036039764	-0.154479206

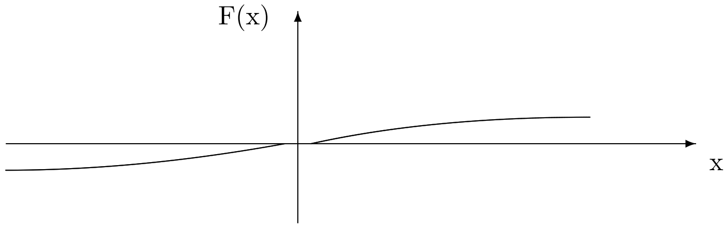
4 おわりに

求めようとした不定積分は初等関数では表示出来ない為，定積分の詳細値を求める事は出来ませんでした.
その符号は負と判定されましたが，その為に不規則な符号配列の級数 $F(x)=\sum_{p=2}^{\infty}a_{2p}x^{2p-1}$ を解析しました.
この級数の 20 項までの係数は次表のとおりです.

m	ea_m	m	ea_m	m	ea_m	m	ea_m
1	—	6	-2.50×10^{-3}	11	-5.46×10^{-6}	16	3.16×10^{-8}
2	0.000	7	-2.97×10^{-4}	12	-3.36×10^{-6}	17	1.51×10^{-9}
3	8.33×10^{-2}	8	1.77×10^{-4}	13	-6.76×10^{-7}	18	-2.55×10^{-9}
4	1.38×10^{-2}	9	9.19×10^{-5}	14	9.72×10^{-8}	19	-1.16×10^{-9}
5	-4.16×10^{-3}	10	1.26×10^{-5}	15	1.07×10^{-7}	20	-2.12×10^{-10}

$$F(x) = a_4x^3 - |a_6|x^5 + a_8x^7 + a_{10}x^9 - |a_{12}|x^{11} + a_{14}x^{13} + a_{16}x^{15} - |a_{18}|x^{17} - |a_{20}|x^{19} + ...$$

関数 $F(x)$ は奇関数であり，$F(0)=\acute{F}(0)=0, \acute{F}(x\neq 0)>0$ ですから，横軸に沿う増加関数です.



今回の考察のきっかけは，公式の記載ミスでしたが，これとは別に下記の公式 [2] にも記載不備が見られます.

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha}{\log x}\mathrm{d}x = \log(\alpha+1) \tag{4.1}$$

左辺の定積分は負値ですから，条件 $-1 < \alpha < 0$ を明記して欲しいものです.

付録 1　数列 $\{\psi(m)\}$ の性質

定義式 (2.2) により導入された $\psi(m)$ について，いくつかの性質を考察します.

$$\begin{aligned}
\psi(m) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l l^m}{l!} &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l l^{m-1}}{(l-1)!} \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}(l+1)^{m-1}}{l!} \\
&= -\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \sum_{r=0}^{m-1} \begin{pmatrix} m-1 \\ r \end{pmatrix} \times l^r \\
&= -\sum_{r=0}^{m-1} \begin{pmatrix} m-1 \\ r \end{pmatrix} \psi(r)
\end{aligned}$$

すなわち，次の様な漸化式が得られます.

$$\psi(m) = -\sum_{r=0}^{m-1} \begin{pmatrix} m-1 \\ r \end{pmatrix} \psi(r) \tag{a1.1}$$

この漸化式から $\psi(m) = \lambda_m \mathrm{e}^{-1}$ の形に書ける事がわかります.($\psi(0) = \mathrm{e}^{-1}$ に注意)

そして，以下に示す性質を持ちます.

命題 (1) $|\lambda_m| < m!$

命題 (2) λ_m の符号は，連続する同一符号が交互反転します.

命題 (3) $a_m = \frac{\psi(m)}{m!(m-1)}$ について，$|a_m| \approx \mathrm{e}^{-1} 10^{-m/2}$

[命題 (1) の証明]

数学的帰納法で示します.

(1)m=2 の時

$$\begin{aligned}
\psi(2) &= -\sum_{r=0}^{1} \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix} \psi(r) \\
&= -\psi(0) - \psi(1) \\
&= -\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^{-1} = 0 < 2!
\end{aligned}$$

(2)　$2 \leq r \leq (m-1)$ なる r について，$|\lambda_r| < r!$ と仮定すると

$$\psi(m) = -\sum_{r=0}^{m-1} \begin{pmatrix} m-1 \\ r \end{pmatrix} \psi(r) = -\sum_{r=0}^{m-1} \begin{pmatrix} m-1 \\ r \end{pmatrix} \times \mathrm{e}^{-1}\lambda_r$$

$\psi(m)=\lambda_m \mathrm{e}^{-1}$ の形に書けますから

$$\lambda_m = -\sum_{r=0}^{m-1} \binom{m-1}{r} \times \lambda_r$$

両辺の絶対値を取って

$$\begin{aligned}|\lambda_m| &< \sum_{r=0}^{m-1} \binom{m-1}{r} \times |\lambda_r| \\ &< \sum_{r=0}^{m-1} \binom{m-1}{r} \times r! \\ &= \sum_{r=0}^{m-1} \frac{(m-1)!}{(m-1-r)!} \\ &< (m-1)! \sum_{r=0}^{m-1} 1 = (m-1)! \times m = m!\end{aligned}$$

つまり，$|\lambda_m| < m!$ となり $r=m$ の時も成立します.[証明終]

[命題 (2) の証明]

仮に，$m_1 \leq m \leq m_2$　なる m に対して $\psi(m) > 0$　とすると，上記の漸化式を使って

$$\psi(m_2+1) = -\sum_{r=0}^{m_2} \binom{m_2}{r} \psi(r) = -\sum_{r=0}^{m_1-1} \binom{m_2}{r} \psi(r) - \sum_{r=m_1}^{m_2} \binom{m_2}{r} \psi(r)$$

$\psi(m)$　の絶対値は m の増加と伴に増加しますから $-\sum_{r=m_1}^{m_2} \binom{m_2}{r} \psi(r)$　の部分の絶対値も増加し，やがて全体の符号を負に反転させます．その後しばらく同じ符号が続いてまた反転しますが，$\psi(m)$ の絶対値が増大していますから，その符号を反転させる為の同一符号の項数は増加します.[証明終]

[命題 (3) 証明]

$\psi_m = \mathrm{e}^{-1}\lambda_m$ ですから，$\alpha_m \equiv \mathrm{e}a_m$ とします．数値計算により $\alpha_2 = 0, \alpha_3 \approx 0.0833, \alpha_4 \approx 0.0138, \alpha_5 \approx -4.16 \times 10^{-3}, \alpha_6 \approx -2.50 \times 10^{-3}$　などが得られて，添え字と 10 の指数との関係を示唆しています.

そこで，　$7 \leq r \leq m$ なる r について $|\alpha_r| \approx 10^{-r/2}$　と仮定して，$|\alpha_{m+1}|$ の近似値を計算して見ます.

$$\begin{aligned}\alpha_{m+1} &= \mathrm{e}\frac{\psi(m+1)}{m(m+1)!} \\ &= \mathrm{e}\frac{-1}{m(m+1)!} \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} \psi(r) \\ &= \frac{-1}{m(m+1)!} \sum_{r=1}^{m} \binom{m}{r} r!(r-1)\alpha_r - \frac{1}{m(m+1)!} \\ &\approx \frac{-1}{m(m+1)} \sum_{r=2}^{m} \frac{r-1}{(m-r)!}\alpha_r\end{aligned}$$

ここで，スターリングの近似式*3を用いて

$$
\begin{aligned}
|\alpha_{m+1}| &\approx \frac{1}{m(m+1)\sqrt{2\pi}}\left|\sum_{r=2}^{m-1}\frac{r-1}{\sqrt{m-r}}\frac{\mathrm{e}^{m-r}}{(m-r)^{m-r}}\alpha_r\right| \\
&< \frac{m-2}{m(m+1)\sqrt{2\pi}}\sum_{r=2}^{m-1}\frac{\mathrm{e}^{m-r}}{(m-r)^{m-r}}|\alpha_r| \\
&\approx \frac{(m-2)(\sqrt{10})^{-m}}{m(m+1)\sqrt{2\pi}}\sum_{r=2}^{m-1}\frac{(\mathrm{e}\sqrt{10})^{m-r}}{(m-r)^{m-r}} \qquad (|\alpha_r|\approx 10^{\frac{r}{2}})
\end{aligned}
$$

和 $\sum_{r=2}^{m-1}\frac{(\mathrm{e}\sqrt{10})^{m-r}}{(m-r)^{m-r}}$ については，数値計算により $m=12$ の時の和 (≈ 115) よりは大きく無い事が分かりますから

$$
|\alpha_{m+1}| \approx \frac{115\sqrt{10}(m-2)(\sqrt{10})^{-m-1}}{m(m+1)\sqrt{2\pi}} \tag{a1.2}
$$

ここで，$10^{-\delta(m)} \equiv \frac{115\sqrt{10}(m-2)}{m(m+1)\sqrt{2\pi}}$ により $\delta(m)$ を定義すれば $|\alpha_{m+1}| \approx (\sqrt{10})^{-m-1-\delta(m)}$ と表されますが，$m=10^k$ の時 $\delta(m)\approx k$ は 10^k に比べて無視出来ますから，$m+1$ についても $|\alpha_{m+1}|\approx 10^{-(m+1)/2}$ と近似出来ると考えられます．[証明終]

最後に，漸化式 (a1.1) を変形して $\psi(m)$ の別の表現式を求めておきます．

$$
\begin{aligned}
\psi(m) &= -\sum_{r=0}^{m-1}\begin{pmatrix} m-1 \\ r \end{pmatrix}\psi(r) \\
&= -\sum_{r=0}^{m-2}\begin{pmatrix} m-1 \\ r \end{pmatrix}\psi(r) - \begin{pmatrix} m-1 \\ m-1 \end{pmatrix}\psi(m-1) \\
&= \sum_{r=0}^{m-2}\left[-\begin{pmatrix} m-1 \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m-1 \\ m-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m-2 \\ r \end{pmatrix}\right]\times\psi(r)
\end{aligned}
$$

そこで，

$$
A_r^{m-1} \equiv -\begin{pmatrix} m-1 \\ r \end{pmatrix} \quad : \quad A_r^{m-2} \equiv A_r^{m-1} + A_{m-1}^{m-1}\begin{pmatrix} m-2 \\ r \end{pmatrix}
$$

と表記すれば

$$
\psi(m) = \sum_{r=0}^{m-2}\left[A_r^{m-1} + A_{m-1}^{m-1}\begin{pmatrix} m-2 \\ r \end{pmatrix}\right]\times\psi(r) = \sum_{r=0}^{m-2}A_r^{m-2}\psi(r)
$$

一般に，$A_r^{m-k} \equiv A_r^{m-k+1} + A_{m-k+1}^{m-k+1}\begin{pmatrix} m-k \\ r \end{pmatrix}$ と定義して，添字の降下計算を繰り返せば

$$
\psi(m) = \sum_{r=0}^{1}A_r^1\psi(r) = \mathrm{e}^{-1}(A_0^1 - A_1^1)
$$

つまり $\lambda_m = (A_0^1 - A_1^1)$ という事になります.(A_r^{m-k} は m の関数です)
$\psi(m)$ に似た数列に $\phi(m)$ があり [3]，$\psi(m)$ と同様の性質があります．

*3 $x! \approx \sqrt{2x\pi}x^x\mathrm{e}^{-x}$

$$\phi(m) \equiv \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l^m}{l!} \quad : \quad B_r^{m-1} \equiv \begin{pmatrix} m-1 \\ r \end{pmatrix} \quad : \quad B_r^{m-k} \equiv B_r^{m-k+1} + B_{m-k+1}^{m-k+1} \begin{pmatrix} m-k \\ r \end{pmatrix}$$

$$\phi(m) = \sum_{r=0}^{m-1} \begin{pmatrix} m-1 \\ r \end{pmatrix} \phi(r) \quad : \quad \phi(m) = \kappa_m \times \mathrm{e} \quad : \quad \kappa_m < m!$$

$$\phi(m) = \mathrm{e}(B_0^1 + B_1^1) = \mathrm{e}\kappa_m \quad : \quad \mathrm{e}^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\phi(m)}{m!} (\log x)^m$$

付録 2　級数 I_3 の収束半径

級数 I_3 は，式 (3.1) により導入されました.

$$I_3 = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\psi(m)}{m!(m-1)} (\log x)^{m-1}$$

$(m-1)$ 次の項の係数を a_m と書けば，この級数の収束半径 ρ は Cauchy-Hadamard の公式 [3] により

$$\begin{aligned} \rho = \lim_{m\to\infty} \left| \frac{a_m}{a_{m+1}} \right| &= \lim_{m\to\infty} \left| \frac{\psi(m)(m+1)!m}{\psi(m+1)m!(m-1)} \right| \\ &= \lim_{m\to\infty} \frac{(m+1)m}{(m-1)} \left| \frac{\psi(m)}{\psi(m+1)} \right| \end{aligned}$$

$\psi(m+1)$ は次の様に変形されます.

$$\begin{aligned} \psi(m+1) &= -\sum_{r=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ r \end{pmatrix} \psi(r) \\ &= -\psi(m) - \sum_{r=0}^{m-1} \frac{m}{m-r} \begin{pmatrix} m-1 \\ r \end{pmatrix} \psi(r) \end{aligned}$$

従って，

$$\begin{aligned} \frac{\psi(m)}{\psi(m+1)} &= \frac{\psi(m)}{-\psi(m) - \displaystyle\sum_{r=0}^{m-1} \frac{m}{m-r} \begin{pmatrix} m-1 \\ r \end{pmatrix} \psi(r)} \\ &= \frac{1}{-1 - \dfrac{\displaystyle\sum_{r=0}^{m-1} \frac{m}{m-r} \begin{pmatrix} m-1 \\ r \end{pmatrix} \psi(r)}{\displaystyle\sum_{r=0}^{m-1} \begin{pmatrix} m-1 \\ r \end{pmatrix} \psi(r)}} \end{aligned}$$

最後の式は m が無限大に近づく時，$-1/2$ に収束しますから

$$\rho = \lim_{m\to\infty} \frac{m(m+1)}{m-1} \times \frac{1}{2} = \infty \tag{a2.1}$$

つまり，級数 I_3 は区間 $(-\infty, \infty)$ で収束します．しかも，この級数は整級数ですから，絶対かつ一様に収束します.[3]

付録 3　不定積分の表示式

関数 $f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x \log x}$ の不定積分は，$t = \log x$ と置換して以下の様に求める事も出来ます．

$$f(x) = \frac{1}{t}\exp(-\mathrm{e}^t) = \frac{1}{t}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!}\mathrm{e}^{lt}$$

従って，

$$\begin{aligned} f(x)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!}\mathrm{e}^{(l+1)t} &= \frac{\mathrm{d}t}{t}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(1+1)^m t^m}{m!} \\ &= \mathrm{d}t\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^{m-1}}{m!}\varphi(m) \end{aligned}$$

ここで導入した $\varphi(m)$ を変形すると

$$\begin{aligned} \varphi(m) \equiv \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l(l+1)^m}{l!} &= \sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{l-1}l^m}{(l-1)!} \\ &= -\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^l l^{m+1}}{l!} = -\psi(m+1) \end{aligned}$$

よって，求める不定積分は

$$\begin{aligned} \int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x\log x} &= -\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\psi(m+1)}{m!}\int t^{m-1}\mathrm{d}t \\ &= -\psi(1)\log t - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\psi(m+1)t^m}{m!\times m} \\ &= \mathrm{e}^{-1}\log|\log x| - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\psi(m+1)(\log x)^m}{m!\times m} \end{aligned} \tag{a3.1}$$

となり，これは式 (2.8)($= J_2$) と同じものです. 式 (a3.1) の第二項を変形すると

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\psi(m+1)}{m!\times m}(\log x)^m &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(m+1)\psi(m+1)}{(m+1)!\times m}(\log x)^m \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\psi(m+1)}{(m+1)!}(\log x)^m + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\psi(m+1)}{(m+1)!\times m}(\log x)^m \end{aligned}$$

最後の式の第一項を変形すると

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\psi(m+1)}{(m+1)!}(\log x)^m &= \frac{1}{\log x}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\psi(m+1)}{(m+1)!}(\log x)^{m+1} \\ &= \frac{1}{\log x}\left(-\psi(0) - \psi(1)\log x + \mathrm{e}^{-x}\right) \qquad (\text{式 (2.3) 参照}) \end{aligned}$$

従って，

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\psi(m+1)}{(m)!m}(\log x)^m &= \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\log x} - \frac{\mathrm{e}^{-1}}{\log x} + \mathrm{e}^{-1} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\psi(m+1)}{(m+1)!\times m}(\log x)^m \\ &= \mathrm{e}^{-1} - J_1 + \mathrm{e}^{-1}\log|\log x| \end{aligned}$$

これを式（a3.1）に代入すると，$J_1 - \mathrm{e}^{-1}$ となり，$J_2 = J_1 - \mathrm{e}^{-1}$ の関係が得られます.

参考文献

[1] 中西　襄，双曲線正弦関数の逆数を含む級数の総和，数学・物理通信，2 巻 4 号 (2012) 3-14
この論文の“§おわりに ” において，問題の定積分について言及されております.

[2] 森口・宇田川・一松 著,『岩波　数学公式 I』　(岩波書店, 1956)
不定積分 (2.6) は p.165 参照, そして公式 (4.1) は　p.239 参照

[3] 森口・宇田川・一松 著,『岩波　数学公式 II』　(岩波書店,　1957)
$F(r)$ の項別微分可能性・I_3 の収束性・Cauchy-Hadamard の公式については、p.121 参照
$\phi(3), \phi(4)$ については、p.50 参照

[4] 杉村・山村・国枝 著「演習微分学」(裳華房,1957)

[5] 杉村・山村・国枝 著「演習積分学」(裳華房,1957)

編集後記

待たれていた，8 巻 8 号を発行する．

今号は 38 頁の長い号となってしまった．この「数学・物理通信」はメールで配布のサーキュラーであるので，郵送する場合のような郵送料の問題は起らないのだが，それでも毎号が 30 頁前後に収まるように努力をしている．だが，今回だけは頁の大幅な超過がさけられなかった．

今回はワードの原稿を latex にするのに編集者としてだいぶん苦労した．このサーキュラーへの投稿は latex の原稿のみであり，latex 以外の投稿は本来原則として受つけない．

ところが，若い人には当然のことであろうが，高齢の方が latex で原稿をつくるのは難しい．どうも latex になじんでいるかどうかが高齢であることの定義みたいで申し訳ないが，ちょっとそういったことがある．

あっという間に 9 月がおわり，10 月となった．いい季節の到来である．皆様のご健勝を祈念する．

（矢野　忠）