数学・物理通信

8巻9号　　2018年12月

編集　新関章三・矢野　忠

2018年12月13日

目次 (Contents)

管楽器で使用されるリードの固有振動 (1)

世戸 憲治 *

Characteristic Oscillation of a Reed for Wind Instruments (1)

Kenji SETO*

1　はじめに

ここでは，クラリネットやサックスなどの管楽器で使われるリードの固有振動を解析する．このリードは，図 1 に示すように，通常，葦 (あし reed) で作られており，図で示したアルトサックス用のものは，長さ 7 cm, 幅 1.5 cm, 厚さは厚いところで，2.2 mm ほどであるが，この厚さは先端にいくほど薄くなっている．このリードは，音を発生させる基本となるものであるが，この振動がそのまま音として出るわけではない．リードの役目は，発振するきっかけを作っているだけで，この振動が管内の空気に共鳴を起こさせ，いろいろな周波数の音が出せるようになっている．しかし，リード自体の固有振動が，密にたくさん存在しないといろいろな音に共鳴できないのではという疑問が発生する．これは，おそらく，リードの厚さが先端にいくほど薄くなることにその秘密があるのではと考えられる．という訳で，今回の解析では，空気振動の共鳴までは扱わないが，リード自体の固有振動がどのようなものかを解析してみる．

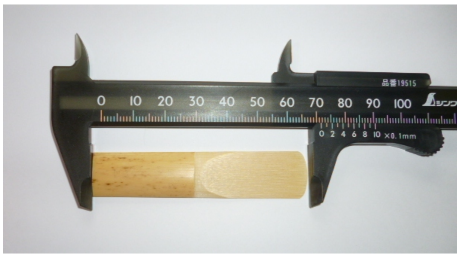

図 1　ノギスに挟まれたリード

2　方程式の導入とその解法

2.1　方程式の導入

ここでは，リードを厚さが変化する 1 枚の板として扱う．この板の長さを ℓ, 幅を a, 厚さを h とする．ただし，長さ，幅の ℓ, a は一定値であるが，厚さ h は，場所によって変わるので，板の固定点から先端方向にとった座標 x の関数 $h(x)$ として扱うことにする．この板の体積密度を ρ, Young 率を E, Poisson 比を ν とする．この板の面に対し垂直で，幅方向には一様な変位を，座標 x, 時刻 t で，$V(x,t)$ とする．ここでは，Lagrangian を用いて波動方程式を導入することにする．そのため，座標軸方向の単位長さあたりの運動エネルギー K と曲

* 北海学園大学名誉教授　　E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

げ歪みエネルギー U を，

$$K = \frac{1}{2}\rho a h (V_t)^2, \quad U = \frac{1}{2} D a h^3 (V_{xx})^2, \quad D = \frac{E}{12(1-\nu^2)} \tag{2.1}$$

と導入する．ここに，変位 V に付けた添え字はその変数での微分を表す．また，変数 D はこの第 3 式で定義される材料定数である．ここでは剪断変形を小さいものとして無視した解析をする．これから Lagrangian $\mathcal{L}$, 作用積分 $\mathcal{I}$ を

$$\mathcal{L} = \int_0^\ell (K-U)dx, \qquad \mathcal{I} = \int \mathcal{L}dt \tag{2.2}$$

とし，Euler-Lagrange 方程式を求めると，

$$\rho h\, V_{tt}(x,t) = -D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big[h^3 V_{xx}(x,t)\Big] \tag{2.3}$$

となる．以下では，数式の見やすさ，書きやすさから x での微分を $\partial/\partial x$ と書く場合と，添え字の x で済ます場合とが混在した形で使うことにする．この方程式を，$x=0$ は埋め込み固定端として，

$$V(0,t) = 0, \qquad V_x(x,t)\Big|_{x=0} = 0 \tag{2.4}$$

および，先端の $x=\ell$ では，曲げモーメント M，および剪断力 Q がゼロとなるものとして，

$$M = aDh^3 V_{xx}\Big|_{x=\ell} = 0, \qquad Q = aD\frac{\partial}{\partial x}[h^3 V_{xx}]\Big|_{x=\ell} = 0 \tag{2.5}$$

の境界条件の基に解くことになる．

ここでは，リードの厚さ h は先端にいくほど一様に薄くなるものとして，x の 1 次式

$$h(x) = h_0\Big(1 - \frac{x}{\ell}\Big) \tag{2.6}$$

を仮定する．このとき，$h(\ell)=0$ となるので，(2.5) 式の M, Q は，$x=\ell$ で自動的にゼロとなる．

この方程式を解く前に，数式簡素化のため，変数の無次元化をしておく．速度の次元を持つ c，および時間の次元を持つ τ を

$$c = \sqrt{\frac{D}{\rho}}, \qquad \tau = \frac{\ell}{c} \tag{2.7}$$

と導入しておく．これを用いて，ℓ を長さの単位，また，τ を時間の単位として，x, h, h_0, t, V を，改めて

$$x/\ell \;\to\; x, \quad h/\ell \;\to\; h, \quad h_0/\ell \;\to\; h_0, \quad t/\tau \;\to\; t, \quad V/\ell \;\to\; V \tag{2.8}$$

とおき直す．この変換で方程式は，

$$h\, V_{tt}(x,t) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big[h^3 V_{xx}(x,t)\Big], \qquad h = h_0(1-x) \tag{2.9}$$

となる．

2.2　固有値と固有関数

ここで，変位 $V(x,t)$ を座標 x と時間 t について，変数分離形にし，時間部分を三角関数として，

$$V(x,t) = X(x)\sin(\omega t + \alpha) \tag{2.10}$$

とおいてみる．ω は無次元化された角振動数，α は位相定数である．このとき，$X(x)$ が満たす方程式は，

$$h\,\omega^2 X(x) = \frac{d^2}{dx^2}\Big[h^3 X_{xx}(x)\Big], \qquad h = h_0(1-x) \tag{2.11}$$

となる．この方程式を (2.4) 式からでる境界条件

$$X(0) = 0, \qquad X_x(x)\Big|_{x=0} = 0 \tag{2.12}$$

の基に解くことになる．この方程式の解を級数展開の形にして，

$$X(x) = \sum_{r=0}^{\infty} C_r (1-x)^r \tag{2.13}$$

とおき，方程式に代入すると，係数 C_r 間の漸化式

$$\omega^2 C_r = h_0^2 (r+3)(r+2)^2(r+1) C_{r+2}, \qquad r = 0, 1, 2, \cdots \tag{2.14}$$

を得る．この式から係数 C_r を求めるとき，C_0 から求めていく方法と C_1 から求めていく方法の 2 つの系列が考えられる．初めに，$C_0 = 1$, $C_1 = 0$ として求めると，添え字 r が奇数のところはすべてゼロとなり，偶数のところが，

$$C_{2n} = \frac{1}{(2n+1)\,!\,(2n)\,!}\left(\frac{\omega}{h_0}\right)^{2n} \tag{2.15}$$

と求められる．このときの解を $F(x)$ とすると，

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\,!\,(2n)\,!}\left[\frac{\omega}{h_0}(1-x)\right]^{2n} \tag{2.16}$$

となる．もう一つの方法は，$C_0 = 0$, $C_1 = \omega/(2h_0)$ として (2.14) 式を解くと，添え字が奇数のところだけが残り，

$$C_{2n+1} = \frac{1}{(2n+2)\,!\,(2n+1)\,!}\left(\frac{\omega}{h_0}\right)^{2n+1} \tag{2.17}$$

と求められるので，このときの解を $G(x)$ とすると，

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+2)\,!\,(2n+1)\,!}\left[\frac{\omega}{h_0}(1-x)\right]^{2n+1} \tag{2.18}$$

となる．実は，これら 2 つの関数 $F(x)$, $G(x)$ は，1 次の Bessel 関数 $J_1(z)$，および 1 次の変形 Bessel 関数 $I_1(z)$ で表すことが可能である．これら Bessel 関数の級数で表した定義式

$$J_1(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(r+1)\,!\,r\,!}\left(\frac{z}{2}\right)^{1+2r}, \qquad I_1(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(r+1)\,!\,r\,!}\left(\frac{z}{2}\right)^{1+2r} \tag{2.19}$$

において，和および差を作ると，偶数項，または，奇数項のみが残り，

$$I_1(z)+J_1(z) = z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\,!\,(2n)\,!}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{4n}, \quad I_1(z)-J_1(z) = z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+2)\,!\,(2n+1)\,!}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{2(2n+1)} \tag{2.20}$$

となる．この式と $F(x)$, $G(x)$ の定義式 (2.16) (2.18) と比較すると，変数間の関係式

$$\Big(\frac{z}{2}\Big)^2 = \frac{\omega}{h_0}(1-x), \qquad \text{すなわち} \qquad z = 2\sqrt{\frac{\omega}{h_0}(1-x)} \tag{2.21}$$

のもとに，

$$F(x) = \frac{1}{z}[I_1(z)+J_1(z)], \qquad\qquad G(x) = \frac{1}{z}[I_1(z)-J_1(z)] \tag{2.22}$$

と表されることになる．このように方程式 (2.11) の解が Bessel 関数で表されることは，この方程式自体が Bessel の方程式と結びつくことを示唆している．このことに関しては「付録」で述べることにする．

一般解はこれら 2 つの解 $F(x)$, $G(x)$ の重ね合わせであるが，境界条件である (2.12) の第 1 式を満たすためには，

$$X(x) = F(x)G(0) - F(0)G(x) \tag{2.23}$$

の形に制限される．さらに，(2.12) の第 2 式を満たさなければならないが，この第 2 式を，ω の関数として，$E(\omega)$ と定義すると

$$E(\omega) \equiv X_x(x)\Big|_{x=0} = 0 \tag{2.24}$$

となる．これから，この式中に含まれる角振動数 ω の値が固有値として求められる．この意味で，この式を固有値方程式と呼ぶことにする．固有値 ω は離散的に求まるはずで，これらを小さい方から ω_i, $(i=1,2,3,\cdots)$ とする．また，関数 $X(x)$ の ω 依存性を明示するため，これを $X(x,\omega_i)$, $(i=1,2,3,\cdots)$ と書くことにし，これを固有関数と呼ぶ.

2.3 固有関数の規格化

ここでは，一般に固有値とは限らない 2 個の角振動数を考え，これらを ω, ω' とする．また，これら 2 個の角振動数に対応し，(2.23) 式で定義される 2 つの関数を $X(x,\omega)$, $X(x,\omega')$ とする．これらが満たす方程式は，(2.11) 式から，

$$h\,\omega^2X(x,\omega) = \frac{d^2}{dx^2}\Big[h^3X_{xx}(x,\omega)\Big], \qquad\qquad h\,\omega'^2X(x,\omega') = \frac{d^2}{dx^2}\Big[h^3X_{xx}(x,\omega')\Big] \tag{2.25}$$

となる．この第 1 式に $X(x,\omega')$ を掛け，第 2 式に $X(x,\omega)$ を掛けてから辺々を引き算すると，

$$\begin{aligned}(\omega^2-\omega'^2)hX(x,\omega)X(x,\omega') = \frac{d}{dx}\Big[&X(x,\omega')\frac{d}{dx}\big[h^3X_{xx}(x,\omega)\big] - X(x,\omega)\frac{d}{dx}\big[h^3X_{xx}(x,\omega')\big] \\ &- X_x(x,\omega')h^3X_{xx}(x,\omega) + X_x(x,\omega)h^3X_{xx}(x,\omega')\Big]\end{aligned} \tag{2.26}$$

となる．この両辺を x で積分すると，右辺は直ちに積分され，$x=1$ とした上限値と, $x=0$ とした下限値との差となるが，$h(1)=0$ から上限値はすべて消え，また，(2.23) 式から，$X(0,\omega)$ は ω の値に無関係にゼロとなるので，

$$\int_0^1(1-x)X(x,\omega)X(x,\omega')dx = \frac{{h_0}^2}{\omega^2-\omega'^2}\Big[X_x(x,\omega')X_{xx}(x,\omega) - X_x(x,\omega)X_{xx}(x,\omega')\Big]\Big|_{x=0} \tag{2.27}$$

となる．ここで，(2.11) の第 2 式 $h = h_0(1-x)$ を用いた．ここで，ω, ω' が異なる固有値，ω_i, ω_j となるときは，(2.24) 式から $X_x(0,\omega_i) = X_x(0,\omega_j) = 0$ となるので，右辺はゼロとなり，異なる固有値に属する固有関数同士の直交性が導かれる．同じ固有値となるときは，この式は 0/0 となるので，先に，$\omega' = \omega_i$ とおいてから，その後，$\omega \to \omega_i$ の極限をとる．結果として，固有関数の直交式

$$\int_0^1 (1-x)X(x,\omega_i)X(x,\omega_j)dx = {N_i}^2\delta_{i,j}, \qquad {N_i}^2 = \frac{-{h_0}^2}{2\omega_i}\left[\partial_\omega X_x(0,\omega)\right]_{\omega=\omega_i} X_{xx}(0,\omega_i) \tag{2.28}$$

を得る．ここに，N_i は規格化定数で，$X(x,\omega_i)/N_i$ が規格化された固有関数となる．このときの被積分関数は，単に 2 個の固有関数の積ではなく，$1-x$ という重みが付くことに注意する．また，$\omega_i = \omega_j$ のとき，この規格化積分は正定値となるべきなので，$[\partial_\omega X_x(0,\omega)]_{\omega=\omega_i}$ と $X_{xx}(0,\omega_i)$ は必ず異符号でなければならない．

3 数値計算例

リードは葦，または，竹の一種である暖竹と呼ばれるもので作られている．これらに関する材料定数はインターネットで調べてもなかなか出てこない．ここでは，一応，Young 率 E, Poisson 比 ν, 密度 ρ としてつぎの値を用いる．

$$E = 15.8\,\mathrm{GPa}, \qquad \nu = 0.2, \qquad \rho = 650\,\mathrm{kg/m^3} \tag{3.1}$$

また，アルト・サックス用のリードの長さはおよそ 7 cm であるが，厚さが厚い方の 3.2 cm はリガチャーでマウス・ピースに固定するために使われるので，振動に寄与する部分の長さは残りの 3.8 cm である．また，この振動する部分の厚いほうの厚さは，2.2 mm である．すなわち，

$$\ell = 3.8\times10^{-2}\mathrm{m}, \qquad h_0 = 2.2\times10^{-3}\mathrm{m}, \qquad \text{無次元化した } h_0\text{は，} h_0 = 0.0579 \tag{3.2}$$

となる．さらに，(2.7) 式に従って，速度 c, 時間 τ を求めると，

$$c = 1.452\times10^3\mathrm{m/s}, \qquad \tau = 2.616\times10^{-5}\mathrm{s} \tag{3.3}$$

となる．

この設定のもとに固有値方程式 (2.24) を数値的に解き，固有値 ω_i を求めると，その初めの 10 個は，

$$\omega_i = 0.3078,\ \ 0.8809,\ \ 1.7390,\ \ 2.8827,\ \ 4.3122,\ \ 6.0275,\ \ 8.0286,\ \ 10.3151,\ \ 12.8189,\ \ 12.8196 \tag{3.4}$$

となる．これは，無次元化された角振動数であるが，これを 2π と τ で割って振動数 n_i

$$n_i = \frac{\omega_i}{2\pi\tau} \tag{3.5}$$

にしたものは

$$n_i[\mathrm{kHz}] = 1.872,\ \ 5.359,\ \ 10.579,\ \ 17.538\ \ 26.235,\ \ 36.670,\ \ 48.845,\ \ 62.756,\ \ 77.989,\ \ 77.993 \tag{3.6}$$

という値になる．単位は kHz なので，これらの値は音の振動数としてはかなり高いもので，人間が聴こえる最高音が，20 kHz 程度であるから，これでは初めの 4 個の音しか聞こえないことになる．ちなみに，この初めの振動数 1.872 kHz というのは，ピアノので言うと，白鍵，黒鍵合わせて全部で 88 鍵あるうちの高い方から 15 番目の「ラ♯」の振動数である．つぎの 5.359 kHz になるともうピアノにはそれに相当する鍵盤はない．

ここでは，10 個の固有振動数を求めたが，何故か，そのうちの 9 番目と 10 番目はかなり近いところにある．固有値方程式 (2.24) に従って，ω の値に対し $E(\omega)$ がどのように変化するかをグラフにしたものが図 2 である．この図でグラフが横軸 ω をよぎるところが，固有値になるわけであるが，ω の値が 15 あたりからそれ以上になると振動が激しくなり，固有値が連続的に繋がってしまう．いわば，量子力学の周期ポテンシャルのときのように，連続固有値になってしまう．これはリードの厚さが先端にいくほど薄くなることと関係しているのだろう．初めは，この連続固有値がより小さいところ，少なくも人間の可聴領域にでることを期待していたのだが，結果はそうはならなかった．

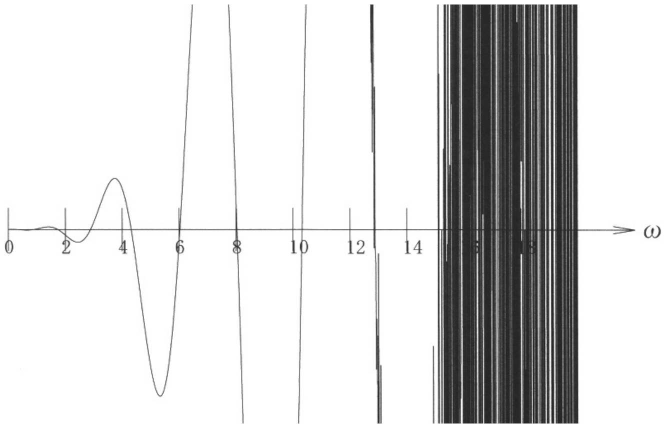

図 2 固有値方程式 $E(\omega)$ のグラフ

つぎの図 3 は，固有値を求めたついでに，固有関数 $X(x, \omega_i)$ を初めの 5 個だけ描いたものである．これらの固有関数は (2.28) 式にしたがって規格化してある．図中の i はモード番号（固有値番号）であり，これら固有関数はモード番号と同じ個数のゼロ点を持つ．リードの先端にいくほど厚さが薄くなるためか，$x = 1$ での振幅が，モード番号が上がるにしたがい大きくなることが見てとれる．

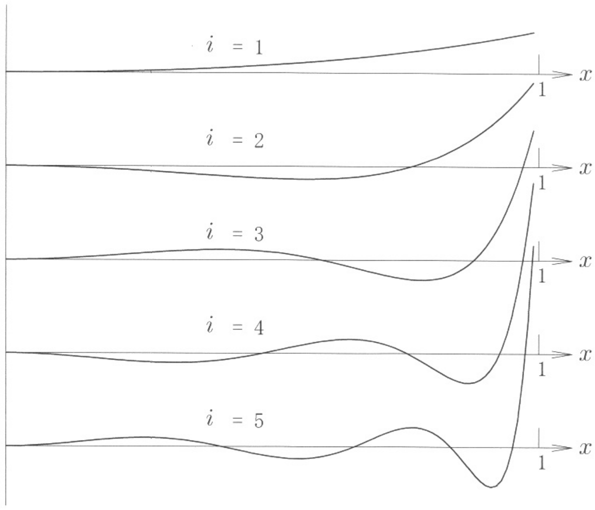

図 3 固有関数 $X(x, \omega_i)$

4　おわりに

終わりに当たって，2 つのことを述べておく．1 つ目は，(2.11) の第 2 式で示したように，ここでは，リードの厚さ h を x の 1 次式 $h = h_0(1-x)$ と仮定した．しかし，実際のリードは，2 次式に近い形をしているので，$h = h_0(1-x)^2$ とした方がよいのかもしれない．これに関してはいずれかの機会に再び触れることにしたい．

2 つ目は，ここでは，リードが単体として存在したときの固有振動を解析してきた．本来ならば，それがマウス・ピースに繋がれて管体と一緒になったときに，どのような振動を起こすかを解析すべきであろう．しかしこれはあの難解な Navier-Stokes 方程式を扱う問題になってしまう．これが大変なことは目に見えており，実際にこれを解いた人はもちろん，解こうとした人もいないであろう．クラリネットやサックスは理論的に解明されてできたものではなく，それまでの人間の経験の積み重ねでできたものである．この点で，理論のちっぽけさを嘆くとともに，人間の経験の偉大さに感服するしかない．

5　付録：方程式 (2.11) と Bessel の微分方程式との関係

ここで，方程式 (2.11) が Bessel 関数の方程式に関係づけられることを示しておく．これは，以前に書いた「Bessel 関数と金属円板の振動 (1), (2)」(「数学・物理通信」7 巻 9 号 2017 年 12 月，8 巻 1 号 2018 年 3 月) で Bessel 関数と 4 階の微分方程式とを結び付けたアナロジーによるものである．

方程式 (2.11) において，独立変数の変換

$$y = \frac{\omega}{h_0}(1-x) \tag{5.1}$$

を施すと

$$yX = \frac{d^2}{dy^2}\Big[y^3\frac{d^2}{dy^2}X\Big] \tag{5.2}$$

となる．一方，1 次の Bessel 関数，および，1 次の変形 Bessel 関数が満たす方程式は，独立変数を z, 従属変数を $F_{(\pm)}$ と書くと，

$$\Big[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{d}{dz} - \frac{1}{z^2} \pm 1\Big]F_{(\pm)} = 0 \tag{5.3}$$

となる．ここに，複号のプラス符号は通常の Bessel 関数，マイナス符号は，変形 Bessel 関数に対応する．この式で従属変数を $F_{(\pm)}/z$ の形に変えると，

$$\Big[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{3}{z}\frac{d}{dz} \pm 1\Big]\frac{F_{(\pm)}}{z} = 0 \tag{5.4}$$

となる．ここで，独立変数を z から y に

$$z = 2\sqrt{y} \tag{5.5}$$

で変換すると

$$\Big[y\frac{d^2}{dy^2} + 2\frac{d}{dy} \pm 1\Big]\frac{F_{(\pm)}}{2\sqrt{y}} = 0 \tag{5.6}$$

となる．ここで，このプラス，マイナス 2 つある微分演算子を重ねて積の形にすると，

$$\Big[\Big(y\frac{d^2}{dy^2} + 2\frac{d}{dy}\Big)^2 - 1\Big]\frac{F_{(\pm)}}{2\sqrt{y}} = 0 \tag{5.7}$$

となる．ここで，この微分演算子の部分を書き替えると，

$$\left(y\frac{d^2}{dy^2}+2\frac{d}{dy}\right)^2=y^2\frac{d^4}{dy^4}+6y\frac{d^3}{dy^3}+6\frac{d^2}{dy^2}=\frac{1}{y}\frac{d^2}{dy^2}\left[y^3\frac{d^2}{dy^2}\right] \tag{5.8}$$

となるので，この (5.7) 式は

$$y\left(\frac{F_{(\pm)}}{2\sqrt{y}}\right)=\frac{d^2}{dy^2}\left[y^3\frac{d^2}{dy^2}\left(\frac{F_{(\pm)}}{2\sqrt{y}}\right)\right] \tag{5.9}$$

となって，これは方程式 (5.2) を再現している．これから，(5.2) 式の 4 個の独立解は，1 次の第 1 種，第 2 種 Bessel 関数 J_1, N_1, および，1 次の第 1 種，第 2 種変形 Bessel 関数 I_1, K_1 で求められ，

$$X=\frac{J_1(2\sqrt{y})}{2\sqrt{y}},\quad \frac{N_1(2\sqrt{y})}{2\sqrt{y}},\quad \frac{I_1(2\sqrt{y})}{2\sqrt{y}},\quad \frac{K_1(2\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}, \tag{5.10}$$

と求められる．このうち，N_1 と K_1 を用いたものは $y=0$ $(x=1)$ で発散するので，ここでの使用には不適切であり，J_1 と I_1 のみがここで使われたことになる．

[謝辞]

今回も，京都大学名誉教授の中西襄先生にこの原稿を見ていただき，たくさんのコメントをいただきました．特に，Bessel 関数との関係を気づかされたのは先生のおかげで，(2.19) 式から (2.22) 式まで，および，付録に書いたことは先生から教わったものです．この点で，先生に心から感謝いたします．

第 2 オイラー定数

–秋葉氏の論文「ある定積分の解析」に関連して–

The Second Euler's Constant

– Concerning Akiba's Paper "The Analysis of a Definite Integral" –

中 西　襄[*1]

Noboru NAKANISHI [*2]

1　はじめに

1988 年 3 月 23 日の朝日新聞に次のような見出しの記事が載った：

“定積分の公式にミス　二百年ぶりに指摘”

記事の内容を要約すると，次の通りである．問題は，ある定積分の公式

$$\int_0^1 \frac{dx}{\log|\log x|} = 0 \tag{1.1}$$

が間違っていたことが，200 年間もの間気づかれずに公式集に連綿と孫引きが繰り返されてきたというのである．このことを発見したのは，阪大教養部の斎藤基彦教授で，実際に左辺の積分の値をコンピューターで計算した結果は，ゼロでなく，

$$I \equiv \int_0^1 \frac{dx}{\log|\log x|} = -0.15447... \tag{1.2}$$

であった．誤りの式 (1.1) の根源は，1790 年に出版されたイタリアの数学者 L. マスケローニの著書ということである．彼は級数展開で計算し，計算間違いしたらしい．しかし，200 年間誰もチェックしないで丸写しされてきたのは，驚くべきことだ．たぶん滅多に使われなかった式なのだろう．

(1.2) の積分は指数関数で変数変換すると，

$$I = \int_0^\infty dx \, \frac{e^{-x}}{\log x} \tag{1.3}$$

と書き直すこともできる．この積分で注意すべきことは，$x = 1$ が被積分関数の単純極であることで，コーシーの主値をとらなければならない．しかしこのことをちゃんと断っている公式集は見たことがない．

[*1] 京都大学名誉教授

[*2] nbr-nak@trio.plala.or.jp

2　秋葉氏の論文について

筆者は「数学・物理通信」2-4 に書いた論文の末尾に，雑談として前節のような話をもう少し簡略に紹介した，

最近，秋葉敏男氏は「数学・物理通信」8-8 において，上記の記事に基づき (1.3) の積分を解析的に調べた．詳細を検討したわけではないが，被積分関数を級数展開し項別積分するという方法で解析的に正確な値を求めるのは，どうやら無理なようである．コンピューターによる数値計算は，10^{-6} のオーダーを微小量とみなす精度の近似で行われ，結果は誤差の範囲で (1.2) の右辺と一致しているようだ．

秋葉氏は計算をやっている途中で気づいたこととして，積分公式

$$\int_0^1 dx\,\frac{x^\alpha}{\log x} = \log(\alpha+1) \tag{2.1}$$

は，左辺が負だから，$-1<\alpha<0$ のような条件式が要るはずだ．これが公式集に記載されていないのは不備だというようなコメントがされていた．しかし $\alpha=0$ にはなにも特異性がないから．正の値にも解析接続できてしまうはずだ．

(2.1) は α で微分すれは両辺とも $1/(\alpha+1)$ だから，問題は積分定数である．よく見れば，明らかに左辺は発散している．つまり積分定数は $-\infty$ である．したがって, 任意の $\alpha>0$ に対して負になるわけである．(2.1) は正しくは，引き算項をつけて，

$$\int_0^1 dx\,\frac{x^\alpha - 1}{\log x} = \log(\alpha+1) \qquad (\Re\alpha > -1) \tag{2.2}$$

としなければならない．

3　ひとつの提言

オイラーのガンマ関数は，

$$\Gamma(\alpha) \equiv \int_0^\infty dx\,x^{\alpha-1}e^{-x} \qquad (\Re\alpha > 0) \tag{3.1}$$

で定義される．これを α について積分して，積分ガンマ関数

$$\tilde{\Gamma}(\alpha) \equiv \int_1^\alpha d\beta\,\Gamma(\beta) = \int_0^\infty dx\,\frac{(x^{\alpha-1}-1)e^{-x}}{\log x} \qquad (\Re\alpha > 0) \tag{3.2}$$

を考える．(3.2) の引き算項は (1.3) に他ならない．その絶対値を $\tilde{C}$ と書いて，**「第 2 オイラー定数」**と呼びたい．すなわち

$$\tilde{C} \equiv -\mathrm{P}\int_0^\infty dx\,\frac{e^{-x}}{\log x} = 0.15447... \tag{3.3}$$

とする（P はコーシーの主値）．そのココロは，オイラー定数は

$$C = -\Gamma'(1) = -\int_0^\infty dx\,\log x \cdot e^{-x} = 0.57721... \tag{3.4}$$

によって与えられるからである，そしてまったくの妄想かもしれないが，多分 C と $\tilde{C}$ の片方または両方を含む代数関係式（既知の特殊定数を含んでもよいとする）は存在しないと思われるからである．

ちなみに，オイラー定数は，オイラーはそれを C で表し，小数点以下 6 桁まで計算をした．その後マッケローニはそれを γ で表し，32 桁まで計算したが，正しかったのは 20 桁までだったという[*3]．このマッケローニのミスを見つけた人は，(1.1) まではチェックしなかったようだ．

[謝辞]　有益なコメントをしていただいた北海学園大学名誉教授世戸憲治氏に感謝する．

[*3] ウィキペディア　「オイラーの定数」による．

四元数（補遺 4）（改訂版）

— 『代数学の歴史』を読む —

矢野　忠[*1]

The Quaternions (Appendix 4)(Revised Version)

Tadashi YANO [*2]

目次

1　はじめに

これは，すでに「数学・物理通信」6 巻 10 号に掲載したエッセイ「四元数（補遺 4)」の改訂版である [1]．ファン・デア・ヴェルデン『代数学の歴史』（現代数学社）の第 10 章「代数の発見」を読み返していて，前のエッセイを改訂したほうがいいのではないかと考えた [2].

というのは前のエッセイは『代数学の歴史』からの引用部分で重要なことを書いてあるのに，さらっと書かれてあるために，それに気がつかなかったところがいくつかあった．そういう箇所については私なりのコメントをしたほうがよりハミルトンの四元数の発見の過程のイメージが喚起されるではないかと思った．

また，私のエッセイにはいくつかのミスや記号の不統一も見られた．それらも修正をしたいというのがこの改訂版をつくる動機である．

ファン・デア・ヴェルデン『代数学の歴史』（現代数学社）は訳書であるが，その 271-279 頁にハミルトンの四元数の発見の経緯が他の数学史の本と比べて詳細に書かれている．

私も自著『四元数の発見』で四元数の発見についてハミルトンの論文の解読をした [3]．それで，ヴェルデンの説明と私の解読との比較は四元数に関心をもつ人にとって意味があることだろう．

以下では引用部分が多いので，私の書いた地の部分との区別がつき難くなるが，引用部分は行が数字分だけ下がっている．それでも区別がつき難いので，引用部分にはカギカッコ「　」または『　』を用いてある．

また引用部分に著者が言葉を補ったところは，基本的には著者補足との語を（　）の中に書いてあるが，短い語を補った場合にはいくつかの箇所でその語を省略した．

[*1] 元愛媛大学工学部
[*2] yanotad@earth.ocn.ne.jp

2　ハミルトンの四元数の発見

2.1　ヴェルデンの依拠した文献

まず，ヴェルデンは 1843 年 10 月 16 日にハミルトンが四元数を発見したという事実とその 4 つの元のしたがう乗法の規則を述べた後で，ハミルトンの四元数の発見についての彼の問題としたところをつぎのように述べる．

> 「いかにしてハミルトンはこの問題に到達したか？　彼の問題は何であったか，そしていかにして彼はその解を見出したか？　われわれはこれらの事柄に “Hamilotn’s Mathematical Papers” (Cambridge Univ. Press, 1963) の第 3 巻に再生されている文書と論文によって知らされている」

としてつぎの 5 つの文書をあげる．

1. ハミルトンのノート (1843 年 10 月 16 日）(Papers 3, pp. 103-105)
2. ジョン・グレーブス (John Garaves）への手紙（1843 年 10 月 17 日）(Papers 3, pp. 106-110)
3. 論文「四元数論と関連する虚量の新種について」(On a New Species of Imaginary Quantities Connected with the Theory of Quatantities) Proceedings of the Irish Academy, 1843.11) (Papers 3, pp. 111-116)
4. 『四元数の講義』(Lectures on Quarternions) の序文 (Papers 3, pp. 117-155, 特に 142-144)
5. ハミルトンの息子への手紙　(1865 年の死の少し前）(Papers 3, pp. xv-xvi)

ヴェルデンはいう．

> 「これらの文書において，われわれはハミルトンの各々の段階を正確にたどることができる．この例外的な場合において，われわれは，一人の数学者の心の中に何が進行しようとするのか—彼が自分自身に一つの問題を課すとき，彼が段々とその解に近づくとき，そしてついに一種の閃光の一撃によって彼が問題を解けるように変形するとき—を観察することができる」

上で「この例外的な場合において」とあるのは，普通には数学者は自分の数学的な発見をどのように考えたかを語らないのが慣例となっているのに，私たちにとって幸いなことにハミルトンは自分の手の内を上の文献で明らかにしてくれる．それが，例外的だというのであろう．

2.2　積 ij の取扱い

四元数の発見について，ヴェルデンの述べるところを続けてみよう．

> 『ハミルトンは複素数の幾何学的表現を知り，かつ使ったが，発表した論文の中では好んで複素数の定義を実数の対 (a, b) として提示した．今や彼はつぎの問題を自分に課した．「対 (a, b) への類似において数の三元数 (a, b, c) はいかに掛けられるかを見い出せ[*3]」』

ここでヴェルデンはハミルトンが死の少し前に書いた，彼の息子への手紙を引用している．

しかし，私はヴェルデンの問題提起のしかたに違和感をもつ．ハミルトンは複素数における虚数単位 i の意味を追求して，虚数単位 i を使わない複素数の表現を求めており，そのために実数の対 (a, b) を考えたのであろう．だ

[*3] 訳書（原著）での三つ組 (triplet) の代わりに，このエッセイでは用語「三元数」を便宜的に使う．

が，実数の対として複素数を表すときでさえもその乗法の規則は虚数単位 i の乗法規則なしには求められない．すなわち，

$$(a,b)(x,y) = (ax - by, bx + ay) \tag{2.1}$$

という乗法規則を虚数単位 i を用いないで複素数の乗算として，公理のように与えることができるけれども，それは

$$(a+ib)(x+iy) = (ax - by) + i(bx + ay) \tag{2.2}$$

という表式なしでは求めることができない．すなわち，$i^2 = -1$ という規則なしでどうにもこうにもならないのである．もちろん，それを

$$(0,1)(0,1) = (-1,0) = -(1,0) \tag{2.3}$$

と実数の対を用いて表すことはできるが，あまり発見法的ではない．

だから，私はヴェルデンが「数の三元数 (a,b,c) はいかにかけられているかを見い出せ」という問題設定は間違ってはいないが，代数的に演算規則を求めたと考えると，あまり正しくはないのではないかと思う．むしろ複素数の幾何学的表現と類似の表現を三元数 (a,b,c) に求めたという考えをとりたい．ヴェルデンも上の引用では「ハミルトンは複素数の幾何学的表現を知り，かつ使った」と書いているが，その後の代数的記述に重点が置かれているような印象をもった．これはヴェルデンの本の読者を誤った方向に導くかもしれない．

しかし，そのことはともかく，ヴェルデンの主張を続けて聞いてみよう．

> 「複素数 $a+ib$（と）の類似でハミルトンは彼の三元数を [はじめは]
>
> $$a + ib + jc \tag{2.4}$$
>
> と書いた．彼はその基本単位 $1, i, j$ を空間内の単位長さの互いに垂直な「有向成分」として視覚化した．後にハミルトン自ら（用）語「ベクトル」(vector) を使った．彼は
>
> $$(a + ib + jc)(x + iy + jz) \tag{2.5}$$
>
> のような積を同じ空間内のベクトルとして表そうと試みた．彼は要請した．
>
> 第一に，項に項をかけることが可能であること　（第一の要請：著者補足）
>
> 第二に，積のベクトルの長さは因子の長さの積に等しいこと　（第二の要請：著者補足）
>
> 彼はこの（第二の：著者補足）規則を「絶対値の法則」(law of moduli) と呼んだ」

ヴェルデンは「彼（ハミルトン：著者補足）はその基本単位 $1, i, j$ を空間内の単位長さの互いに垂直な「有向成分」として視覚化した」と書いている．

これは何を意味しているのであろうか．

ハミルトンが数の三元数を考えるようになったきっかけは平面上の点を表す，複素数の $a+bi$ に対して，空間内の一点を表すために

$$a + bi + cj \tag{2.6}$$

を対応して考えたことは事実だろうが，複素数の幾何学的な表現との類似を手がかりとして三元数の性質を追及したと思う（ [3] p.13-27 を参照）．

複素数において虚数単位 i は実軸上の単位 1 を $90^\circ = \pi/2$ だけ反時計方向に回転させる．そうすると

$$1i = i \tag{2.7}$$

i にもう一度 i をかければ，

$$ii = -1 \tag{2.8}$$

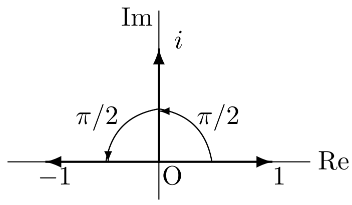

図 1　i と $i^2 = -1$ の図形表示

となる（図 1 参照）．

ハミルトンは複素平面に垂直な別の平面上の別の虚数単位 j があることに気づいた（図 2 参照）．このとき空間内の点は $a + bi + cj$ と表されるだろう．この新しい虚数単位 j の発見が四元数への研究の出発点になっていると思う． これが，ヴェルデンが「彼（ハミルトン：著者補足）はその基本単位 $1, i, j$ を空間内の単位長さの互いに垂

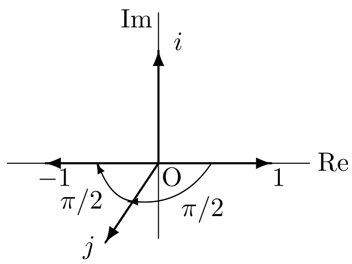

図 2　j と $j^2 = -1$ の図形表示

直な「有向成分」として視覚化した」と述べたことは図 1, 2 をみれば，一目瞭然であろう．図 2 では有向線分 1, i, j は明らかに互いに直交している．もっとも [4] でも図 1, 2 は描かれてはおらず，文章で述べられているだけである[*4]．

つづいて上の引用文ではいわゆる三元数のしたがうべき要請を二つ書いてある．文章で書いてあるので，わかりづらいが，

> 第一の要請は計算において分配則が成り立つことを意味している．
> 第二の要請は絶対値の法則 $|uv| = |u||v|$ を表している．

すなわち，第二の要請は

$$u = a + ib + jc, \tag{2.9}$$
$$v = x + iy + jz, \tag{2.10}$$
$$w = (a + ib + jc)(x + iy + jz) \tag{2.11}$$

とするとき，すなわち，$w = uv$ のとき，

$$|w| = |u||v| \tag{2.12}$$

が成り立つことを意味する．

[*4] ハミルトンの原文はつぎのようである．Since $\sqrt{-1}$ is in a certain well-known sense, a line perpendicular to the line 1, it seemed natural that there should be some other imaginary to express a line perpendicular to the former ; and because the rotation from this to this also being doubed conducts to -1, it ought also to be a square root of negative unity, though not to be confounded with the former. Calling the old root, as Germans often do, i, and the new one j, I inquired what laws ought to be assumed for multiplying together $a + ib + jc$ and $x + iy + jz$.

ところが，三元数 (a, b, c) では実はこの式（絶対値の法則）は一般には成立しない．誤解を招かないためか，ヴェルデンはこの式を書き表すことを省略している．

話を先へと続けよう．

> 「今日，われわれはこの二つの要請はただ次元 1, 2, 4, 8 の空間にだけ満たされることを知っている．これは，まもなく見るように，アドルフ・フルヴィッツによって証明された．したがって，3 次元におけるハミルトンの試みは失敗に終わった．彼の深い着想は 4 次元へ移行することだった．
>
> 彼の最初の試みについて，われわれは文書からもっと知ることができる．少なくとも数 $a + bi$ に対して「絶対値の法則」を満たすために，ハミルトンは通常の複素数に対するように（四元数に対して：著者補足）$ii = -1$ とおき，まったく同様に $jj = -1$ とおいた．しかし，何が ij であって，何が ji であったか？」

上の引用部分の前半は現在知られている事実であり，ハミルトンの推論とは直接に関係がない．後半部分はヴェルデンの本の原文を読んでいないのでよくはわからないが，訳がどうもしっくりとは来ない．それで試みに（四元数に対して）を著者が補足してみた．

ここから以降は絶対値の法則を指導原理として，ij の取り扱いかたをいろいろ試みている．

この「ij の取り扱いかた」に焦点をあてながら，ヴェルデンの述べることを見てみよう．

まず，ハミルトンは第 1 段階では $ij = ji$ を仮定して，検討を進める．

> 「最初に，ハミルトンは $ij = ji$ と仮定し，そして計算した：
>
> $$(a + bi + cj)(x + yi + zj) = (ax - by - cz) + i(ay + bx) + j(az + cx) + ij(bz + cy) \tag{2.13}$$
>
> さて，彼は（自分自身に：著者補足）尋ねた：ij でもってなすべきことは何か？それは形式 $\alpha + \beta i + \gamma j$ をもつか？」

すわなち，$ij = \alpha + \beta i + \gamma j$ が成り立つかどうかを自問している．ここで，α, β, γ は実数である．

この第 1 段階の一つの帰結として，$(ij)^2 = 1$ の場合の検討をする．

> 『**（第一の試み）** ハミルトンはジョン・グレーブスへの手紙の中で書いている：「その平方（すなわち ij の平方：$(ij)^2$）は $= 1$ であると思われるかもしれない．なぜなら，$i^2 = j^2 = -1$ であり，これはわれわれに $ij = 1$ または $ij = -1$ をとらせるように誘うからである．しかし，どちらの仮定でも
>
> $$\text{積の係数の平方の和} = \text{因子の対応する（係数の：著者補足）平方の和の積} \tag{2.14}$$
>
> が成り立たないだろう」』

文章で書かれた式はわかりにくいので，式に表してみると，$ij = ji$ を仮定すれば，まず

$$(ij)^2 = i^2 j^2 = (-1)(-1) = 1 \tag{2.15}$$

であるから，

$$ij = \pm 1 \tag{2.16}$$

が得られる．これがパラグラフの前段の述べることである．

後段は絶対値の法則 $|uv| = |u||v|$ に関係した検討であり，(2.14) は絶対値の条件，$|uv|^2 = |u|^2 |v|^2$, のことである．(2.14) の左辺を代数的に表せば，「積の係数の平方の和」とは $ij = \pm 1$ としたとき，(2.13) の右辺から

$$[ax - by - cz \pm (bz + cy)]^2 + (ay + bx)^2 + (az + cx)^2 \tag{2.17}$$

が得られるであろう．ここで $(bz + cy)$ の前の符号 $\pm$ はもちろん $ij = 1$ のとき $+$ をとるが，$ij = -1$ のとき $-$ をとる．

また (2.14) の右辺の「因子の対応する（係数の）平方の和の積」とは (2.13) の左辺から，$a+ib+jc$ に対する $a^2+b^2+c^2$ と $x+iy+jz$ に対する $x^2+y^2+z^2$ の積 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$ が得られるであろう．

したがって，(2.14) は，

$$[ax-by-cz\pm(bz+cy)]^2+(ay+bx)^2+(az+cx)^2=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \tag{2.18}$$

と表される．しかし，この (2.18) は正しい式ではない．すなわち，絶対値の条件は成立しない．したがって，$ij=\pm1$ のとき (2.13) は成立しない．

第 2 段階ではもっとも単純な場合 $(a+ib+jc)^2$ に立ち返って，$ij=0$ の可能性を検討している．すなわち，

> 『（第二の試み）ハミルトンは最も単純な場合
>
> $$(a+ib+jc)^2=(a^2-b^2-c^2)+2iab+2jac+2ijbc \tag{2.19}$$
>
> を考察した．彼は（(2.19) の：著者補足）右辺の $1,i,j$ の係数の平方の和を計算し，
>
> $$(a^2-b^2-c^2)^2+(2ab)^2+(2ac)^2=(a^2+b^2+c^2)^2 \tag{2.20}$$
>
> を見出した．したがって，と彼は言った，「もしわれわれが ij を含んでいる項をすっかり削除すれば（すなわち $ij=0$ を仮定すれば：著者補足)，絶対値の条件は満たされる．そして，それ以上のこと，すなわち，$a^2-b^2-c^2,2ab,2ac$ が正確に「平方点」(square-point) の座標であることが，平面内の点に対するワレン氏の法則 (Mr. Warren's rule) のわずかな拡張によって，空間内で推論される．・・・実際，もしわれわれがそれ自身の平面において x の正の半軸から点 a,b,c の動径ベクトルへの回転を平方するならば，われわれは $a^2-b^2-c^2,2ab,2ac$ へと描かれた動径ベクトルへの方向に到達する」』

文章がわかりやすくないが，複素数の場合を考える．$a+ib=r\mathrm{e}^{i\theta}$ と極座標で表せば，$(a+ib)^2=r^2\mathrm{e}^{2i\theta}$ となる．ここで，$r=|a+ib|,\tan\theta=b/a$ であるから，$r^2=|a+ib|^2$ であり，$(a+ib)^2$ の x 軸の正の方向からの偏角は θ の 2 倍の 2θ となっている．点 a,b,c の動径ベクトルとは $a+ib+jc$ を意味し，その平方点とは $(a+ib+jc)^2$ を意味する．その平方点の座標は $(a^2-b^2-c^2,2ab,2ac)$ である．もちろん，ここで $ij=0$ が仮定されている．しかし，$ij=0$ はなんだか落ち着きがわるいとハミルトンは感じた．

第 3 段階ではハミルトンは $ij+ji=0$ の可能性を検討している．

> 『(第三の試み）ハミルトンは，彼が第二の試みの中で仮定した $ij=0$ は，その後，彼にとってまったく正しいとは思えなくなったと，報告している．彼はグレーブスへの手紙の中で書いている：
>
> 「したがって，$ij=0$ と空想するようにしばらくの間は誘惑された私を見てくれ．しかし，これは奇妙かつ落ち着かなく思われた．そして，私は「よけいな」(de trop) なものだった項の同じ削除が，私にとってより不快さが少ないように思われる仮定，すなわち，$ji=-ij$ によって得られるにちがいないということを感知した．それゆえ，私は k が 0 であるか否かをたずねることを私自身に保留しつつ，$ij=k,ji=-k$ とした」』

すなわち，i と j との積の順序に注意して，$ji=-ij=-k$ として計算すれば，

$$\begin{aligned}(a+ib+jc)^2&=a^2-b^2-c^2+2iab+2jac+ijbc+bcji\\&=a^2-b^2-c^2+2iab+2jac+ij(bc-bc)\\&=a^2-b^2-c^2+2iab+2jac+k(bc-bc)\\&=a^2-b^2-c^2+2iab+2jac\end{aligned}$$

となる．このとき，(2.20), すなわち，絶対値の条件が成り立つ．

第4段階では積の因数を $a+ib+jc$ と $x+ib+jc$ とわずかに一般化して，ハミルトンは $k=ij$ の係数が 0 となるかどうかを検討する．

『(第四の試み) もう少し一般的に，ハミルトンは $a+ib+jc$ と $x+ib+jc$ をかけた．グレーブスへの手紙の中で，ハミルトンは結論づける：
「k の係数はやはり消える（すなわち 0 となる：著者補足），そして

$$ax-b^2-c^2, \quad (a+x)b, \quad (a+x)c \tag{2.21}$$

は「積の点」(product-point) の正確な座標であることが容易に見出せる：単位の線から点 a,b,c の動径ベクトルへの回転が，それ自身の平面内で同じ単位線の線からのもう一つの因子の点 x,b,c の動径への回転に加えられ，先に言及した積の点の動径に導くという意味において，そして，後者の動径ベクトルは長さにおいて前者二つの積である．$ij=-ji$ の確認，しかし，いぜんとして k の値についての情報なし』

式のまざった文章がわかり難いが，単位の線から点 a,b,c の動径ベクトルへの回転とは式で表せば，$a+ib+jc$ であり，単位線の線からの x,b,c の動径への回転とは式で表せば，$x+ib+jc$ である．積の点の動径ベクトルは長さにおいて前者二つの積であるとは，つぎの式で表される．

$$\begin{aligned}(a+ib+jc)(x+ib+jc) &= (ax-b^2-c^2)+i(a+x)b+j(a+x)c+ij(bc-bc)\\ &= (ax-b^2-c^2)+i(a+x)b+j(a+x)c\end{aligned} \tag{2.22}$$

であるから，

$$(a^2+b^2+c^3)(x^2+b^2+c^2)=(ax-b^2-c^2)^2+(a+x)^2(b^2+c^2) \tag{2.23}$$

が成り立つ．すなわち，絶対値の条件が成り立つ．この場合にも $k=ij$ の前の係数は 0 となっている．したがって，k の値についての情報はこの場合にも得られなかった．

3 第四の次元への跳躍

前節の話を続けよう．

『この勇気づけられる結果の後，ハミルトンは彼自身に言った (グレーブスへの手紙，Hamilton’s Papaers 3, p107)．
「大胆に試みよ，そうすれば二つの三元数の一般的な積が」(“Try boldly, then the general product of two triplets.”) 彼は計算した：

$$(a+ib+jc)(x+iy+jz)=(ax-by-cz)+i(ay+bx)+j(az+cx)+k(bz-cy) \tag{3.1}$$

彼は $k=0$ とおくように試みた．そしてたずねた：「絶対値の法則は満たされているか？」いいかえれば：

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax-by-cz)^2+(ay+bx)^2+(az+cx)^2 \tag{3.2}$$

が成り立つか？その答えは：否，第一の式は $(bz-cy)^2$ だけ第二の式を超える（すなわち，(3.2) の左辺は右辺よりも $(bz-cy)^2$ だけ大きい：著者補足)．しかし，とハミルトンはいう．もしわれわれが前のように

$$ij=k, ji=-k \tag{3.3}$$

と認めるならば，これ（$(bz-cy)^2$：著者補足）はちょうど積 $(a+ib+jc)(x+iy+jz)$ の展開（(3.1) の右辺：著者補足）における k の係数の平方の和である』

つまり，(3.2) は成り立たず，正しくは

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax-by-cz)^2+(ay+bx)^2+(az+cx)^2+(bz-cy)^2 \tag{3.4}$$

が成り立っている．すなわち，(3.1) の左辺は 2 つの三元数の積であったが，右辺はもはや三元数では表せないで四元数となっている．

『そして，今や問題全体に新しい方向を与える閃光が来る．グレーブスへの手紙の中で，ハミルトンは書いている：「三元数を計算するためには空間の「第四の次元」(fourth dimension) を認めなければならないという考えが私に起こってきた．

すなわち，代数学へとパラドックスを移して，別の第三の記号 k を認めなければならない．それは i とも j とも同じではなく，被乗数が i で，乗数が j の積 $ij=k$ である．したがって，私は「四元数」(quaternions) へと導かれた．これは

$$a+ib+jc+kd \tag{3.5}$$

または

$$(a,b,c,d) \tag{3.6}$$

と表される（この箇所はハミルトンの手紙の原文から著者（矢野）が改訳）」[*5]』

「つぎにハミルトンはなぜ彼が

$$ik=iij=-j,\quad kj=ijj=-i,\quad ki=j,\quad jk=i \tag{3.7}$$

そして最後に

$$k^2=ijij=-iijj=-1 \tag{3.8}$$

のように考えたかという理由を説明している」

以上の引用部分については説明の必要はなかろう．要するに，一般の 2 つの三元数の積はもう三元数の範囲に収まらないことをハミルトンは発見した．

『彼（ハミルトン：著者補足）が石の上に彼の基本公式を刻んだと同じ日（すなわち四元数発見の当日：著者補足）に書かれたノートブックには，彼のアディアの経過がつぎのように一層詳細に説明された：「私は，今もその思考の順序を覚えていると信じている．方程式 $ij=0$ は

$$(ax-b^2-c^2)^2+(a+x)^2(b^2+c^2)=(a^2+b^2+c^2)(x^2+b^2+c^2) \tag{2.23}$$

という事情によって勧められた[*6]．したがって私は

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax-by-c)^2+(ay+bx)^2+(az+cx)^2 \tag{3.2}$$

ということが真でないかどうか試みた（調べた：著者改変）．しかし，この方程式がそれを真とするためには第二の式（(3.2) の右辺：著者補足）への $(bz-cy)^2$ の加算が必要であることがわかった．このことは ij を無視するなと私に強いた．そして，それが新しい虚数 k に等しいにちがいないということを私に示唆した」』

[*5] ハミルトンの手紙の原文はつぎのようである．And here there dawned on me the notion we must admit, in some sense, a *fourth dimension* of space for the purpose of calculating with triplets; or transferring the paradox to algebra, must admit a *third* distinct imaginary symbol k, not to be confounded with either i or j, but equal to the product of the first as multiplier, and the second as multiplicand; and therefore was led to introduce *quaternions*, such as $a+bi+cj+kd$, or (a,b,c,d).

[*6] 前の引用部分と首尾一貫するように，この原文と訳文の部分の式の記号を変更してある．

前にも述べたように，(3.1) から導かれる式は (3.2) ではなく，

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = (ax-by-cz)^2+(ay+bx)^2+(az+cx)^2+(bz-cy)^2 \tag{3.4}$$

である．したがって，この事実から４つ目の元 k の存在をハミルトンは認めざるをえなかった．

> 『下線を引かれた（用）語「強いた」(forced) と「示唆された」(suggested) によって，ハミルトンは二つの精神的経験の間の隔たりを強調する．第一は論理的結論の強制だった．それは計算から直ちに出て来た：われわれは $ij=0$ とおくことはできない．というのはそのとき絶対値の法則は成り立たないだろうからである．第二の経験は運河での閃光の中で彼にやって来た洞察だった*7．すなわち，$ij=k$ が新しい虚数単位であると考えられるべきであるという着想だった．ハミルトンがここで提示しているものは彼自身の思考の深い心理的分析である』

私は $ji=-ij$ から $ij=k$ また $ji=-k$ と新しい第三の虚数単位 k が導入されるべきだという点のギャップがあったらしいということには，あまり気がついていなかった．この点にヴェルデンは心理的にギャップがあったというふうに理解している．多分そうなのであろうとは思うが，また一方ではそれがほぼ同時にハミルトンに起こった可能性もあるという気がしている．

4 おわりに

以上，ハミルトンの四元数の発見についてのファン・デア・ヴェルデンの記述を追いかけてきた．いままでにこれほどくわしい四元数の発見の経緯を記述した数学史の文献をハミルトン自身の文献以外に見かけたことがない．

ただ，ヴェルデンの説明はわかり難いところもある．しかし，三元数の偏角についての議論を含めてハミルトンの四元数にいたる発見の道筋は小著『四元数の発見』 [5] で詳しく述べたので，ここでくり返す必要はないであろう．

(2018.10.16)

参考文献

[1] 矢野　忠，四元数（補遺 4），数学・物理通信 6 巻 10 号 (2016.12) 14-20
[2] ファン・デア・ヴェルデン（加藤明史　訳），『代数学の歴史』（現代数学社，1994. 9） 271-279
[3] 矢野　忠，『四元数の発見』（海鳴社，2014）13-48
[4] W. R. Hamilton, Phil. Mag. 3rd series 25 (1844) 489-495
[5] 矢野　忠，『四元数の発見』（海鳴社，2014）28-48

*7 ローマ・カナル（運河）に沿ってハミルトンが彼の妻と歩いていたときに，最後の四元数の発想をつかんだ．

Ａｔｉｙａｈの夢

浅田　明*[1]

Dream of Atiyah

Akira Asada

1　はじめに

Atiyah が微細構造定数を計算し，その副産物としてリーマン予想を証明したというニュースが伝えられ，一部で話題になったようである．

Atiyah. M.F.: The fine structure constant, submitted to Proc. Roy. Soc.A 2018.

Atiyah, M.F.: The Riemann hypothesis, preprint (5pp)..

しかし，リーマン予想の証明は以下に説明するように容易に誤りであることが示される．この誤りは微細構造定数の計算の中の議論とも関連するので，上記の「論文」が実際に出版されるかどうかは疑問である（リーマン予想のほうは出版されないだろう）．

Atiyah のこれらの「論文」の基礎は Todd function と名付られた関数 $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ で，この関数の像が全複素平面であり，いくつかの性質を持つ（証明はほとんどない）．特に， $f(s), g(s)$ が定数項のない幂級数であれば

$$T[(1+f(s))(1+g(s))] = T[1+f(s)+g(s)] \tag{1}$$

となる, ということがリーマン予想の証明の鍵になっている．また $T[1] = 1$ とされている．しかし，$g(s) = -f(s)$ ととれば,

$$T[(1+f(s))(1-f(s))] = T[1-f(s)^2] = T[1] = 1$$

となり，ここで $f(s) = \mathrm{e}^s - 1$ とすれば（ $(\mathrm{e}^s-1)^2$ はすべての複素数を表すから)， 多くの人が Todd 関数は定数 1 になることを指摘している．これから Atiyah の議論が ($\zeta(s)$ が $1/2+ib$ の形の零点をもてば, $T(\zeta(s+b)) = 1$ となり， $\zeta(s)$ が定数になる）は無意味になり，リーマン予想は証明されていない．

これから Todd 関数（の定義，性質）には問題があるのではないかと疑われ，微細構造定数の計算にも疑念がわく．しかし，微細構造定数の計算では Atiyah の提出した計算式が既知の結果を再現していることと，この計算を通じて表明された Atiyah の「哲学」(Atiyah の「プラトン的」な夢）は示唆的なので無視するには惜しい気がする．以下ではそれについて理解できていない所も多いが，リーマン予想の証明が間違いだったので理解できていないのは間違いの所為かもしれないと甘えた考えでの，あらい紹介と感想を述べる．随分不十分な話ですが，御容赦下さい．

2　Atiyah の微細構造定数の計算

Atiyah は「数学的」に微細構造定数（の逆数 $\aleph$）が

$$\aleph = \lim_{n\to\infty, j\to\infty} 2^{-2n} B^n_{k(j)}, \tag{2}$$

であることを導き，数値計算で

$$\aleph = 137.035999\cdots,$$

と知られている結果と一致することを示した（小数以下１２桁まで計算したと書いているが，ここまでしか書かれていない）．ただし，B_k^n は高次ベルヌーイ多項式で，トッド多項式 T_k とは

$$T_k(c_1,\ldots,c_k) = \frac{(-1)^k}{n!}B_k^n(\gamma_1,\ldots,\gamma_n), \quad k \le n,$$

の関係がある．トッド多項式はベルヌーイ関数 $Q(s) = \dfrac{s}{1-e^{-s}}$ を用いて $\prod_{i=1}^m Q(\gamma_i s)$ のテーラー展開での s について $k-$ 次の項の係数を $\gamma_1,\ldots,\gamma_m$ の基本対称式 $c_1,\ldots,c_k$ の多項式として表したものである．特に B_k^n はここで $\gamma_1 = \cdots \gamma_m = 1$ とおいたものである．

Atiyah はこの結果を（物理的用語は使うが）フォン・ノイマンの II 型作用素の仕事とヒルツェブルフの乗法列の仕事を基礎として数学だけで導いている（何故（２）が微細構造定数の逆数であるかの物理的説明はない）．

以下この手続きの大筋を紹介する．最初に $\mathrm{End}(\mathbb{C}^2)$ の無限積の弱閉包とし $A(\mathbb{C}) \cong A \otimes \mathbb{C}$, A は II-1 型フォン・ノイマン代数，を導入する　（弱位相を入れているために元のヒルベルト空間の基底 $(z_1, z_2, \ldots)$ の内積を $(z_i, z_j) = 2^{-2^i}\delta_{ij}$ と入れ替える．この入れ替えでの 2 は別の数にしてもよく，その選びかたが（２）の収束の速さを決める）．こうすれば $\mathrm{End}(\mathbb{C}^2)$ のトレースが $A(\mathbb{C})$ のトレースに拡大される．特に $A(\mathbb{C})$ のセンター $C(A) \cong \mathbb{C}$ に 2×2 行列の固有値のそれぞれを対応させる写像を $t_\pm$, $T = t_-^{-1} \circ t_+$ としてトッド関数 T が定義されているが，この定義は不明確な気がする．特に具体的な形が不明確だと思う．

Atiyah によれば $A(\mathbb{C})$ はヒルツェブルフ代数（これも不明確だが，$n-$ 次元多様体のコホモロジー環のトッド写像のよる像？）の極限（の弱閉包）として $A(\mathbb{C})$ が得られると主張して，（多分）これからトッド関数は領域 $1/4 < \Re s < 3/4, |\Im s| < a$ で多項式（これは区分的に多項式と解釈する必要がある）だと The Riemann Hypothesis の初めに書いている．しかし証明はない．

Atiyah は II-1 型フォン・ノイマン環の中では形式的に無限次元であっても有限「次元」になるから，$T(a)$ は a の繰り込みだと主張する．そして

$$T(1) = 1, \quad T(\pi) = \aleph, \quad T(\gamma) = \beth, \quad T(w) = i,$$

と書いて $\aleph$ が π の繰り込み，また

$$\frac{\beth}{\gamma} = \frac{\aleph}{\pi}, \tag{3}$$

が成立すると主張している　（γ はオイラー定数，w は $T(w) = i$ で決まる数とされている）．Atiyah は T と 4 元数 $\mathbb{H}$ との関係を考察し，T は $\mathrm{Proj}(A^2)$ の反インボリューション $*$ の座標表示であり，w による掛け算作用素であると主張している．$\mathbb{H}$ と T や微細構造定数との関係は Atiyah の「哲学」からはかかせないが，微細構造定数の具体的計算には役立っていない気がする．

$\beth$ は

$$2\beth = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{j=n} 2^{-j}(1 - \int_{1/j}^{j} \log_2 x dx) \tag{4}$$

で与えられると主張しているがきちんとした説明はない（(3),(4) から $\aleph$ が計算できるハズだが，π, γ の数値がいるから実用的とは思えない）．

(2) は $A(\mathbb{C})$ がヒルツェブルフ代数の極限であることを利用して導いている．思想としてはアルキメデスの正多角形を利用しての π の近似を π_n として $T(\pi_n)$ を $\aleph$ の近似として計算しようというもので，それなりに妥当な気がする．ただ $\aleph$ が微細構造定数の逆数であるということを納得させる物理的理由づけはない．

3　Atiyah の夢

微細構造定数の計算が数学の枠内で行われたことについて，Atiyah は「これまでもそういう例はあり，数学からのアイデアが多くの物理の問題で有効であることは自身の仕事でも経験したと書き，数学と物理の一致は決して証明されないだろうがますますもっともらしくなっている」　と書き，150 年まえに Maxwell がすでにそう言っていると　Harman, P.M.: The Natural Phylosophy of James Clerk Maxwell , Cambridge 1998 を引用している．

Atiyah は微細構造定数の計算は円周率のアルキメデスによる計算とその本性を明らかにしたオイラーの公式, $e^{2\pi i} = 1$, が複素数 $\mathbb{C}$ を必要としたことをモデルに非可換体 $\mathbb{H}$ を基礎にして計算を行ったと説明する．実際の計算では $\mathbb{H}$ を使う必要はなさそうだが，以下に紹介する Atiyah の夢ではこの関連はかかせない．

具体的には Atiyah は real division algebra が可換な $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ と非可換な $\mathbb{H}$, そして非結合なケイレー数（８元数） $\mathbb{O}$ の４種しかないのに対応して

1. 電弱相互作用　は $\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$ から
2. 強い相互作用　は $\mathbb{H}$ から
3. 重力 は $\mathbb{O}$ から

来ていると主張（？）する．こうなると夢というより妄想に近い気もするが，Atiyah はさらに対応する群は $U(1) \subset H(2) \subset U(3)$ だが，$\mathbb{O}$ が非結合なので重力に対応する群はないという．ただし，対応する無限次元の「群」の候補は提出されている．また対応するフォン・ノイマン環はそれぞれ Ｉ 型，ＩＩ 型，ＩＩＩ 型と予想している．

Atiyah はこの主張にもとづき重力定数の計算（導出）も行おうとしているようだが，リーマン予想の証明が誤りだったのでどうなるかわからない．数学者としてはこの Atiyah の夢についてなんとも言えないが，物理学者の見解を教えてほしい気がする．

ファインマンの教育批判

矢野　忠*[1]

Feynman's Criticism for Education

Tadashi YANO*[2]

1　はじめに

このエッセイは子どもが 20 年以上前に通っていた，愛光学園の校報「インテルノス」 [1] に掲載されたものである.「数学・物理通信」の原稿が不足したので，その埋草としてここに再掲する．再掲にあたっては読みやすいように節に分けた*[3].

もう 20 年以上も昔のことになるが，私が大学院生だったころ，湯川秀樹博士が日本の物理学の将来のことを心配されて，若手の研究者と話がしたいと言われたことがあった．そのとき博士と会見した若手研究者の一人から後日聞いた話では，博士は彼らを前にして，自分の感じている日本の物理学研究の現状について危惧の念を述べられた．しかし，そのとき博士は集まった一同に「しっかり研究しろ」とは一言も言われなかった．その代わりに「君たちは花を見て，美しいと思うかね」と尋ねられた．そこに会した連中が異口同音にもちろん「花は美しいと思う」と答えると「そうかね．それで安心した」と言われて自分の研究室に引き揚げられたという.

湯川博士くらいの大学者ともなれば,「しっかり勉強しろ」とか「よく研究しなさい」などとは人に言わないのだろう.

高校生にとって，大学受験という厳しい関門があり，そこを突破してなんとか大学を卒業しないと一人前ではないような風潮があり，卒業後は ○○ 大学卒業というレッテルが幅を利かすという現実があるかぎり試験のための勉強はなくならない.

2　ファインマンの教育批判

ところで，試験のための勉強についてのきわめて先鋭的な批判はアメリカの天才的な物理学者ファインマンの言説に見られる．ファインマンは最近出版された自伝『ご冗談でしょう，ファインマンさん』 [2] の中で彼のブラジルでの経験をつぎのように述べている.

ファインマンはあるときブラジルで教師になろうと志す学生に物理学を教えていたが，彼は学生が「何もかも丸暗記はしているのに，その内容をさっぱり理解していない」ことに気がついた．彼は言う.「誰も何も本当には理解していないのに，ただひたすら試験にパスし，つぎにくる者もまた試験にパスできるように教えるという自己増殖的なこの（ブラジルの教育）システムの中でどのようにして真の教育ができるだろうか」

これは，約 40 年前のブラジルの大学教育について述べたものであるが，これは日本での私たちの行っている教育に残念ながらまだぴったりあてはまるのではあるまいか．私も長年にわたり，物理学を学び，教えてきたが，ファインマンのこの批判は自分のこととして骨身にこたえた．彼が「何もかも丸暗記はしているのに，その内容はさっぱり理解していない」というとき，ブラジルの学生には我々のいう普通の意味での理解がないというのではな

*[1] 元愛媛大学工学部
*[2] yanotad@earth.ocn.ne.jp
*[3] 同じ学園に子どもさんが通っていた元同僚のある先生はこの文章を 2 回読んだと言われた．それほど意味があるかどうかはわからない.

かろう．そうではなくて，実例に即した．具体的な状況の下での理解が欠如しているというのだ．このような理解がなされなければ，いかに試験をうまくパスしようとも，それは本当に理解したとは言えませんよというのがファインマンの真意であろう．

3　丸暗記は悪いのか

以上，試験のための勉強についての先鋭的な批判の一つとして，ファインマンの意見を紹介した．しかし，この批判を暗記がいけないととるとすれば，やはり盾の一面しか見ていないことになろう．「何もかも丸暗記しているのに $\cdots$」と言うが，丸暗記することが果たして悪いのだろうか．この疑問が生じても不思議はない．物事がわかってくるためには，頭の中に何らかの形でそれが入っていなければならないことは確かのようだ．よく数学者などは「わからないこと」を頭の中で「飼いならす」という．

わからないことを一時間でも，二時間でも一日でも一か月でもまたは数年間でも「飼いならし」ているうちに，ひょっとそれがわかってくることがある．そのような「飼いならし」を丸暗記と呼んでいいのかどうかはわからないが，それが一種の記憶であることはまちがいない．ともかく，暗記することが一概に悪いとは言えない．

大学の基礎教育課程（以前の教養課程）程度の数学には全く苦しまなかった数学達者（本当は計算達者？）な連中が数学らしい数学（それとて一世紀前の数学かな）に苦しむようになって数学の先生のところへ行ってどのように勉強したらよいでしょうとお伺いをたてると，きまって講義ノートを一字一句丸暗記しなさいと言われる．そんな小学生みたいなことができるかと腹を立てて帰ってくるのだけれども，凡人にはそれと同じようなことをしないとやはり数学はわかってこないらしい．

いや凡人だけではないらしい．日本の代表的な数学者の一人小平邦彦さんもどこかでそんなことを書いておられる．確かに丸暗記はしないまでも，丸暗記するくらいに勉強すれば，はじめは全く頭に受けつけてくれなかった事柄が少しづつ頭の中のどこかに落ち着いてくるような気がする．それはまだ十分に理解されて心底わかったという気にはまだならないとしても．

4　私たちはどう考えるべきなのか

こういうふうに考えてくると，ファインマンの批判を「暗記はいけない」ととるとすれば，それはいきすぎとなるだろう．そこで我々はファインマンの批判の真意を「現象や法則を学んだとき具体的な事物や状況に即してそれを理解しようとする意志を持て」ととるべきではなかろうか．

要するに，ファインマンのいうような物事のより深い理解に達するために私たちのできることは，一つは学習という各自の行為においてファインマン流のやり方で理解を深めようと意識的に努力することであり，もう一つは学校という教育の場において教師が単に事実を教授するだけでなく，その事実を具体的な状況の下に実例を挙げてかつ経験的な感覚にも訴えながら，教授しなければならないということである．

5　おわりに

私たちはファインマンから教育のあり方について重要なヒントをもらった．それを実践するのは学生であり，教師である私たちなのだ．

参考文献

[1] 矢野　忠，ファインマンの教育批判，「校報　インテルノス (inter nos)」1987 年 1 学期号（創刊号）(1987.7.26)（愛光学園，1987）17-18
[2] R. P. ファインマン（大貫昌子　訳），『ご冗談でしょう，ファインマンさん』 II （岩波書店，1986） 36-49

編集後記

あっという間に今年も師走となりました．

今号も立派な論文が集まり，一安心しております．すべて数学関係の論文といっても，よろしいような内容です．しかも内容が興味深いものであり，このサーキュラーにふさわしいものだと思っております．

編集者も純粋数学の立場から，一つの論文を準備しておりますが，体調の問題もあって，論文の完成が遅れております．次回にはなんとか間に合うように努力中です．

その内容はべき級数の収束半径に関するものですが，その中に Cauchy-Hadamard の公式があり，それが Cauchy の公式からどのような形で発展したものか見きわめようとした試みです．

（新関章三）