

数学・物理通信

9 卷 1 号 2019 年 3 月

編集 新関章三・矢野 忠

2019 年 3 月 18 日

目次 (Contents)

1. 管楽器で使用するリードの固有振動 (4)		
	世戸憲治	2
2. 微分方程式における興味ある問題 (1)		
—真珠湾攻撃の問題—		
	世戸憲治	10
3. 小倉百人一首の統計解析と暗記法		
	高木富士夫	16
4. 分岐点の定義 (新版)		
	矢野 忠	21
5. 編集後記		
	新関章三	26
1. Characteristic Oscillation of a Reed for Wind Instruments (4)		
	Kenji SETO	2
2. Interesting Problems in Differential Equation (1)		
—A Problem of the Attack on Pearl Harbor—		
	Kenji SETO	10
3. A Statistical Analysis and Mnemonics of the Ogura Hyakunin Isshu		
	Fujio TAKAGI	16
4. Definition of Branch Point (New Version)		
	Tadashi YANO	21
5. Editorial Comments		
	Shozo NIIZEKI	26

管楽器で使用するリードの固有振動 (4)

世戸 憲治 *

Characteristic Oscillation of a Reed for Wind Instruments (4)

Kenji SETO*

1 はじめに

これまでに、「管楽器で使用するリードの固有振動」というタイトルで3編のものを書いてきた。これらはいずれも剪断歪みを小さいものとして無視した解析を行ってきた。そのためか、固有振動の振動数がかなり高いところにでてしまう。もし、これに剪断歪みも考慮した解析をすると、固有振動はもう少し低いところにでるはずと考えられる。という訳で、今回は剪断歪みを取り入れた解析を試みる。

2 方程式の導入とその解法

2.1 方程式の導入

リードを作る材質の Young 率を E , Poisson 比を ν , 体積密度を ρ , 剛性率を G として, 線形弾性挙動を仮定する。リードの振動部分の長さを ℓ , 厚さを h とするが, この h は固定端からの距離の関数として考える。実際には, あとで, リードの厚さ h は先端に行くに従い一様に薄くなるものとする。

リードの固定端を原点として, 先端方向に向かって座標 x をとる。いま, 座標 x , 時刻 t におけるリードの変位を $V(x, t)$ とする。また, この時点でのリードの軸方向の傾き角を $\theta(x, t)$ とすると, 線形近似では

$$V_x = \theta \quad (2.1)$$

と書ける。ここに V に付けた添え字はその変数での微分を表す。剪断歪みを考慮したときは, この軸方向の傾き角 θ と断面の傾き角とは一般に異なるものになることを注意する。ここでは, この断面の傾き角を $\phi(x, t)$ とする。これら2つの角度の差 $\theta - \phi$ が剪断歪み角となる (図1参照)。この図では, θ と ϕ の違いはあまりない

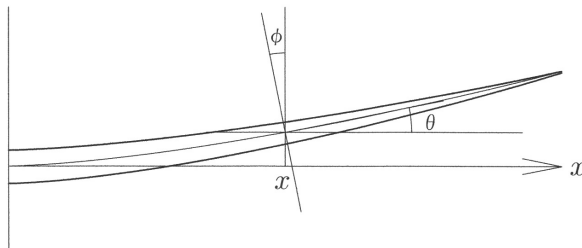


図1 角度 $\theta(x, t)$ および $\phi(x, t)$

ように見えるが, 実際には僅かの差があることをお断りしておく。

* 北海学園大学名誉教授

E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

波動方程式は, Lagrangian $\mathcal{L}$ とその作用積分 $\mathcal{I}$

$$\mathcal{L} = \int_0^\ell (T - U_1 - U_2) dx, \quad \mathcal{I} = \int \mathcal{L} dt \quad (2.2)$$

から変分原理によって導かれる. ここに, T , U_1 , U_2 は, それぞれ, 単位長さあたりの運動エネルギー, 曲げ歪みエネルギー, 剪断歪みエネルギーであり, リードの幅を a として,

$$T = \frac{1}{2} \rho V_t^2 ah, \quad U_1 = \frac{1}{2} D ah^3 \phi_x^2, \quad U_2 = \frac{1}{2} G ah(\theta - \phi)^2 \quad (2.3)$$

と表わされる. ここに, U_1 に表れる D は, Young 率 E , Poisson 比 ν を用いて,

$$D = \frac{E}{12(1 - \nu^2)} \quad (2.4)$$

で定義される材料定数である. この (2.2) 式から, V と ϕ を独立変数とした変分原理に従って, Euler-Lagrange 方程式を求めると, まず, V の変分から,

$$\rho h V_{tt} = G \partial_x [h(V_x - \phi)] \quad (2.5)$$

となり, および ϕ の変分から,

$$D \partial_x [h^3 \phi_x] + G h(V_x - \phi) = 0 \quad (2.6)$$

を得る. 以下, この V と ϕ に関する 2 元連立微分方程式を解くことになる.

初めに, (2.6) 式を x で微分したものと (2.5) 式とから G の付く項を消去すると,

$$\rho h V_{tt} = -D \partial_x^2 [h^3 \phi_x] \quad (2.7)$$

となるが, この式は後で, 固有関数の規格化のときに役に立つ. つぎに, この (2.5) 式を x で x から ℓ まで積分すると,

$$\int_x^\ell \rho h(x') V_{tt}(x', t) dx' = -G h(V_x - \phi) \quad (2.8)$$

となる. ここで, リードの厚さ h はその先端部でゼロになるものとし, $h(\ell) = 0$ を用いた. この式から ϕ を求めると,

$$\phi = V_x + \frac{1}{G h} \int_x^\ell \rho h V_{tt} dx' \quad (2.9)$$

となり, これを (2.6) 式に代入すると V のみを含む方程式

$$\left[1 - \frac{D}{G} \partial_x h^3 \partial_x \frac{1}{h} \right] \int_x^\ell \rho h V_{tt} dx' = D \partial_x [h^3 V_{xx}] \quad (2.10)$$

を得る. ここで, 左辺にある x 微分は積分の方まで作用することに注意する. この式の両辺を x で微分すると,

$$\left[1 + \frac{D}{G} \partial_x^2 h^3 \partial_x \frac{1}{h} \int_x^\ell dx' \right] \rho h V_{tt} = -D \partial_x^2 [h^3 V_{xx}] \quad (2.11)$$

となるが, この式はもし, 左辺括弧中の 2 項目が存在しなければ, 前回の論文で求めた波動方程式と同じもので, 今回は, 剪断歪みを考慮したためにこの面倒な 2 項目が入ってくる.

つぎに, これら方程式を解くときの境界条件について述べておく. リードの付け根は, 埋め込み固定端として,

$$V(0, t) = 0, \quad \phi(0, t) = 0 \quad (2.12)$$

とする。前回は、剪断歪みを考慮していなかったため、 $V_x(0, t) = 0$ という条件が付いた。しかし、今回は剪断歪みを考慮しているため、一般には、 $V_x(0, t) \neq 0$ であり、その代わり、断面の傾き角 ϕ がゼロという条件に変わることを注意する。

また、リードの先端部では、曲げモーメント、および、剪断力がゼロでなければならないので、

$$Dah^3\phi_x\Big|_{x=\ell} = 0, \quad \partial_x[Dah^3\phi_x]\Big|_{x=\ell} = 0 \quad (2.13)$$

となる。しかし、これらの条件は $h(\ell) = 0$ の仮定のもとに自動的に満たされるので、特に条件として考慮する必要はない。

2.2 変数の無次元化と変数分離

ここで、数式簡素化のため変数の無次元化をする。まず、速度の次元を持つ c と時間の次元を持つ τ を

$$\sqrt{\frac{D}{\rho}} = c, \quad \frac{\ell}{c} = \tau \quad (2.14)$$

と導入してから、リードの長さ ℓ を長さの単位、 τ を時間の単位として、各変数を

$$x/\ell \rightarrow x, \quad h/\ell \rightarrow h, \quad V/\ell \rightarrow V, \quad t/\tau \rightarrow t \quad (2.15)$$

と無次元化したものに置き換える。

さらに、変数 V も、変数 ϕ も同じ時間依存性を持つものとし、かつ、時間部分については三角関数で表わされるものとして、変数分離形

$$V(x, t) = X(x) \sin(\omega t), \quad \phi(x, t) = \Phi(x) \sin(\omega t) \quad (2.16)$$

を仮定する。ここに ω は無次元化した角振動数である。また、これまで述べてこなかったリードの厚さ h については、これを x の 1 次式とし、

$$h(x) = h_0(1 - x) \quad (2.17)$$

とする。以上の置き換えをすると、(2.6) (2.7) (2.9) (2.10) の 4 式は、それぞれ、

$$X_x = \Phi - \frac{\alpha h_0^2}{1 - x} \frac{d}{dx} [(1 - x)^3 \Phi_x] \quad (2.18)$$

$$\frac{\omega^2}{h_0^2} (1 - x) X = \frac{d^2}{dx^2} [(1 - x)^3 \Phi_x] \quad (2.19)$$

$$\Phi = X_x - \frac{\alpha \omega^2}{1 - x} \int_x^1 (1 - x') X(x') dx' \quad (2.20)$$

$$-\frac{\omega^2}{h_0^2} \left[1 - \alpha h_0^2 \frac{d}{dx} (1 - x)^3 \frac{d}{dx} (1 - x)^{-1} \right] \int_x^1 (1 - x') X(x') dx' = \frac{d}{dx} [(1 - x)^3 X_{xx}] \quad (2.21)$$

となる。この式の中で α は、 D と剛性率 G の比で、

$$\alpha = D/G \quad (2.22)$$

と定義した。リードを作る材質が、もし、等方性であれば、剛性率 G は Young 率 E と Poisson 比 ν で表わされ、 $G = E/[2(1+\nu)]$ となるので、(2.4) の D の定義式から、 α は Poisson 比 ν のみを用いて

$$\alpha = \frac{1}{6(1-\nu)} \quad (2.23)$$

となる。しかし、リードを作る草は長さ方向に筋が入っているので等方性とは言えないが、現在のところこれに代わる確信あるデータが見つけれないので、この式をそのまま使うことにする。

以後、剪断歪みを取り入れた効果は、すべてこの α が担うことになる。仮に、 $\alpha = 0$ とすると、ここでの式はすべて、前回の剪断歪みを無視したときのものと一致する。

2.3 固有値・固有関数

X に対する方程式 (2.21) を解くにあたって、これを $1-x$ の冪級数展開の形を仮定する。すなわち、

$$X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (1-x)^k \quad (2.24)$$

において、方程式に代入すると、係数 C_k 間の関係式

$$(k+1)(k+2)^2(k+3)C_{k+2} = \frac{\omega^2}{h_0^2} [1 - \alpha h_0^2 (k+1)(k+3)] C_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.25)$$

を得る^{*1}。これから係数 C_k を求めるとき、 C_0 から始める系列と、 C_1 から始める系列の2つの系列が存在する。 $C_0 = 1 + \alpha h_0^2$ 、 $C_1 = 0$ として求めた解を、 $F(x)$ と書くことにして、

$$F(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=0}^r [1 - \alpha h_0^2 (2k-1)(2k+1)]}{(2r+1)!(2r)!} \left[\frac{\omega}{h_0} (1-x) \right]^{2r} \quad (2.26)$$

と求められる。また、 $C_0 = 0$ 、 $C_1 = \omega/(2h_0)$ としたときの解を $G(x)$ とすると、

$$G(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=0}^r [1 - \alpha h_0^2 (2k)(2k+2)]}{(2r+2)!(2r+1)!} \left[\frac{\omega}{h_0} (1-x) \right]^{2r+1} \quad (2.27)$$

と求められる。前回は、これらの解が Bessel 関数を用いて表わすことができたが、剪断歪みを考慮した今回は無理である。

ここで、(2.12) の境界条件を使う。この式は、変数分離した形で書くと、

$$X(0) = 0, \quad \Phi(0) = 0 \quad (2.28)$$

となる。この第1式を満たすため、(2.21) 式の解 X を、 $F(x)$ と $G(x)$ を重ね合わせた

$$X(x) = F(x)G(0) - F(0)G(x) \quad (2.29)$$

と選ぶことにする。また、この第2式を満たすには、 $x=0$ とした (2.20) 式から

$$\Phi(0) = X_x(0) - \alpha \omega^2 \int_0^1 (1-x') X(x') dx' = 0 \quad (2.30)$$

^{*1} ここでは、(2.10) 式を無次元化、および、変数分離した (2.21) 式を用いてこの係数間の関係式を導いた。これは、(2.11) 式と同じく無次元化、変数分離した式から出発しても同じ結果が得られる。

を解くことになる。この X として (2.29) 式を用い、(2.26) (2.27) を使って計算していくが、一度にそれをするのは大変なので、まず、この式の X の部分に F を入れたものと G を入れたものを、それぞれ、先に作っておくと、

$$\begin{aligned} F_x(0) - \alpha\omega^2 \int_0^1 (1-x')F(x')dx' &= - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Pi_{k=0}^r [1 - \alpha h_0^2 (2k-1)(2k+1)]}{(2r+3)!(2r+1)!} \left(\frac{\omega}{h_0}\right)^{2r+2} \\ G_x(0) - \alpha\omega^2 \int_0^1 (1-x')G(x')dx' &= -\frac{1}{2} \frac{\omega}{h_0} - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Pi_{k=0}^r [1 - \alpha h_0^2 (2k)(2k+2)]}{(2r+4)!(2r+2)!} \left(\frac{\omega}{h_0}\right)^{2r+3} \end{aligned} \quad (2.31)$$

となる。この結果から、 X として (2.29) 式を用いたときの (2.30) 式は、

$$\begin{aligned} \Phi(0) = -G(0) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Pi_{k=0}^r [1 - \alpha h_0^2 (2k-1)(2k+1)]}{(2r+3)!(2r+1)!} \left(\frac{\omega}{h_0}\right)^{2r+2} \\ + F(0) \left[\frac{1}{2} \frac{\omega}{h_0} + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Pi_{k=0}^r [1 - \alpha h_0^2 (2k)(2k+2)]}{(2r+4)!(2r+2)!} \left(\frac{\omega}{h_0}\right)^{2r+3} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

となる。この式から ω の値が固有値として決まる。この意味でこの式が固有値方程式である。このときの固有値を、正の小さい方から、 ω_i , ($i = 1, 2, 3, \dots$) とし、これに対応する関数 X を $X(x, \omega_i)$, ($i = 1, 2, 3, \dots$) とし固有関数とする。

2.4 固有関数の規格化

固有値とは限らない 2 個の ω を考え、これらを ω, ω' とする。また、これらに対応する関数 X, Φ を $X(x, \omega), X(x, \omega')$ および、 $\Phi(x, \omega), \Phi(x, \omega')$ とする。これらは (2.18) (2.19) 式を満たしているものとする。以下、式が冗長になるのを避けるため、

$$K(x, \omega) = \frac{d}{dx} [(1-x)^3 \Phi_x(x, \omega)] \quad (2.33)$$

と関数 K を定義することにして、これら 2 つの ω に対応する (2.19) 式を書いておくと、

$$\frac{\omega^2}{h_0^2} (1-x)X(x, \omega) = K_x(x, \omega), \quad \frac{\omega'^2}{h_0^2} (1-x)X(x, \omega') = K_x(x, \omega') \quad (2.34)$$

となる。この第 1 式に $X(x, \omega')$ を掛け、第 2 式に $X(x, \omega)$ を掛けてから、辺々を引き算すると、

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2 - \omega'^2}{h_0^2} (1-x)X(x, \omega)X(x, \omega') &= \frac{d}{dx} [X(x, \omega')K(x, \omega) - X(x, \omega)K(x, \omega')] \\ &\quad - [X_x(x, \omega')K(x, \omega) - X_x(x, \omega)K(x, \omega')] \end{aligned} \quad (2.35)$$

となるが、この右辺最後の太括弧中の $X_x(x, \omega), X_x(x, \omega')$ に (2.18) 式を使うと、相殺が起こり、

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2 - \omega'^2}{h_0^2} (1-x)X(x, \omega)X(x, \omega') \\ = \frac{d}{dx} [X(x, \omega')K(x, \omega) - X(x, \omega)K(x, \omega')] - [\Phi(x, \omega')K(x, \omega) - \Phi(x, \omega)K(x, \omega')] \\ = \frac{d}{dx} [X(x, \omega')K(x, \omega) - X(x, \omega)K(x, \omega') - \Phi(x, \omega')(1-x)^3 \Phi_x(x, \omega) + \Phi(x, \omega)(1-x)^3 \Phi_x(x, \omega')] \end{aligned} \quad (2.36)$$

となる．これを x で 0 から 1 まで積分すると，右辺はただちに積分され，上限値と下限値の差となるが，上限値は， K にも含まれる $(1-x)^3$ のためにすべて消え，下限値だけが残る，

$$\int_0^1 (1-x)X(x, \omega)X(x, \omega')dx = \frac{-h_0^2}{\omega^2 - \omega'^2} \left[X(0, \omega')K(0, \omega) - X(0, \omega)K(0, \omega') \right. \\ \left. - \Phi(0, \omega')\Phi_x(0, \omega) + \Phi(0, \omega)\Phi_x(0, \omega') \right] \quad (2.37)$$

となる．ここで，関数 $X(x, \omega)$, $X(x, \omega')$ が (2.29) 式を満たすように作られているものとする，右辺括弧中の 1 項目，2 項目が消え，

$$\int_0^1 (1-x)X(x, \omega)X(x, \omega')dx = \frac{h_0^2}{\omega^2 - \omega'^2} \left[\Phi(0, \omega')\Phi_x(0, \omega) - \Phi(0, \omega)\Phi_x(0, \omega') \right] \quad (2.38)$$

となる．さらに，境界条件の (2.30) 式が満たされて， ω , ω' が固有値 ω_i , ω_j になるときを考える．もし， $\omega_i \neq \omega_j$ ならば，右辺はゼロとなるので，異なる固有値同士の固有関数の直交性が導かれる．また，同じ固有値になるときは，この式は 0/0 の不定形になるので，先に， $\omega' = \omega_i$ としてから，その後， $\omega \rightarrow \omega_i$ の極限をとる．結果として，固有関数の直交性の式

$$\int_0^1 (1-x)X(x, \omega_i)X(x, \omega_j)dx = N_i^2 \delta_{i,j}, \quad N_i^2 = -\frac{h_0^2}{2\omega_i} [\partial_\omega \Phi(0, \omega)]_{\omega=\omega_i} \Phi_x(0, \omega_i) \quad (2.39)$$

を得る．ここに， N_i は規格化定数で， $X(x, \omega_i)/N_i$ が規格化された固有関数となる．なお，左辺の積分にはリードの厚さを x の 1 次式としたため，重み関数 $(1-x)$ が付くことに注意する．

なお，この規格化定数に表れる $\Phi_x(0, \omega_i)$ を X で表すには，(2.20) 式を x で微分してから $x = 0$ とおくと，

$$\Phi_x(0, \omega_i) = X_{xx}(0, \omega_i) - \alpha \omega_i^2 \int_0^1 (1-x')X(x', \omega_i)dx' \quad (2.40)$$

となる．ここで， $X(0, \omega_i) = 0$ を用いた．さらに，この積分の部分に，(2.30) 式を使うと，より簡単化され，

$$\Phi_x(0, \omega_i) = X_{xx}(0, \omega_i) - X_x(0, \omega_i) \quad (2.41)$$

となる．

3 数値計算例

これまでの結果に基づいて数値的にあたってみる．ここでは，前回のデータに従って，リードの長さ ℓ , 最大厚さ h_0 , および，無次元化した h_0 を以下のようにとる．

$$\ell = 3.8 \times 10^{-2} \text{m}, \quad h_0 = 2.2 \times 10^{-3} \text{m}, \quad \text{無次元化した } h_0 \text{ は, } h_0 = 0.0579 \quad (3.1)$$

となる．さらに，(2.14) 式に従った速度 c , 時間 τ を，

$$c = 1.452 \times 10^3 \text{m/s}, \quad \tau = 2.616 \times 10^{-5} \text{s} \quad (3.2)$$

ととる．これらは前回のもと同じ数値である．また，ここでは，Poisson 比 ν と (2.23) 式で表される α の値を

$$\nu = 0.2, \quad \alpha = \frac{1}{6(1-\nu)} = 0.2083 \quad (3.3)$$

とする．この設定で固有値方程式 (2.32) を数値的に解いてみると，初めの 10 個は

$$\omega_i = 0.307, \quad 0.877, \quad 1.727, \quad 2.855, \quad 4.255, \quad 5.924, \quad 7.854, \quad 10.039, \quad 12.472, \quad 15.145 \quad (3.4)$$

となる．これは無次元化された角振動数なので，これを τ で割り，さらに 2π で割って，振動数 n_i にすると，

$$n_i[\text{kHz}] = \frac{\omega_i}{2\pi\tau} = 1.869, \quad 5.338, \quad 10.511, \quad 17.371, \quad 25.892, \quad 36.041, \quad 47.783, \quad 61.076, \quad 75.878, \quad 92.079 \quad (3.5)$$

となる．この最小の値 1.869kHz は，「リードの固有振動」の第 1 回目で書いた値の最小値 1.872kHz とほとんど変わらずほんの少し減少しただけである．また，10 番目の値 92.079kHz は前回の 77.993kHz に比べ逆に増加している．

以下の図 2 に，これら固有値に対応する固有関数 $X(x, \omega_i)$ を初めの 5 個分だけを示す．これらの固有関数は (2.39) 式にしたがって規格化してある．図中の i はモード番号（固有値番号）であり，これら固有関数はモード番号と同じ個数のゼロ点を持つ．このグラフも，前回のものとほとんど変わらない．

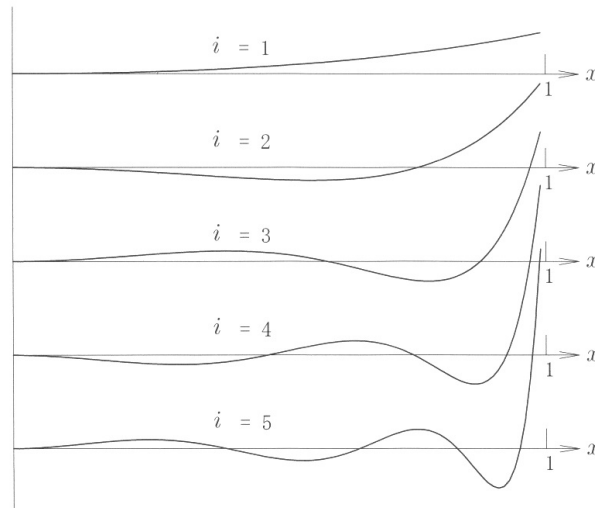


図 2 固有関数 $X(x, \omega_i)$

4 おわりに

「管楽器で使用するリードの固有振動」というタイトルで，今回のものを含めこれまでに 4 編のものを書いてきた．初めのものは，リードの厚さを座標の 1 次式と仮定して解いたもので，このときの解は 1 次の Bessel 関数で表された．2 番目のものは，リードの厚さを座標の 2 次式で表わされるものとして解いたもので，このときは解を得るためにリードをその厚さがゼロになる前のところで切断するしかなかった．3 番目のものは，一般次の Bessel 関数が解となるように，リードの厚さの他にその密度も座標の関数とした．これら 3 つは，すべて，剪断歪み変形を無視したもので，この剪断歪みを考慮したのは今回が初めてである．「はじめに」のところで書いたようにこの剪断歪みを入れたのは，これを入れたことで，リード全体の柔らかさが増し，固有振動の振動数がより下がることを期待してのことである．しかし，数値的に計算してみた結果はすでに示したように前回の剪断歪みを無視した解析とほとんど同じ結果で終わってしまった．この剪断歪みを入れた効果がどれほどかということは，(2.22) 式で定義する α の値にかかっている．この値はつぎの (2.23) 式で示すように元来がそれほど大きくはなれない量であるので，初めから期待薄だったのかもしれない．

方程式 (2.11) から考えると、前にも述べたように、剪断歪みを入れた効果は、この式左辺括弧中の 2 項目にある。この項は V_{tt} を一度積分してから、 x で 3 度微分しているので、大まかに言うと、 x で 2 度微分したことになる。 x での 2 度微分は曲率と考えられるが、モード番号が小さい固有関数は曲率も小さいので、この剪断歪みを入れた効果はあまりでないのかもしれない。逆に言うと、この剪断歪みを入れた効果を見るには、モード番号の大きい方を見た方が良いことになる。しかし、残念ながらモード番号が大きいところは、数値計算の誤差も大きくなり、実際に試した結果では、この剪断歪みを入れた効果を確かめるまでには至らなかったというのが、事実である。

[謝辞]

今回も、京都大学名誉教授の中西襄先生にこの原稿を見ていただき、たくさんのコメントをいただきました。先生に心から感謝いたします。

微分方程式における興味ある問題 (1)

—真珠湾攻撃の問題—

世戸 憲治 *

Interesting Problems in Differential Equation (1)

—A Problem of the Attack on Pearl Harbor—

Kenji SETO*

1 はじめに

私がこれまでに「数学・物理通信」に発表してきたことは、そのほとんどが、微分方程式に関することである。今回は、私が若いときに勉強した微分方程式のうち、いまだに強い印象を持って、ときおり思い出してしまうものについて紹介することにする。それは、いまの平和な時代に大変物騒な話で申しわけないが、「真珠湾攻撃」の問題というものである。この問題は、「飛行機から目標点に向かって爆弾を投下するとき、いつ投下しても爆弾が必ず目標点に命中するようにするには、飛行機がどのように飛べばよいか、その軌跡を求めよ」という問題である。ただし、飛行機の速さはつねに一定とし、爆弾は飛行機からみて初速度ゼロ、つまり、静止系でいうと、その速さは飛行機の飛ぶ速さと同じで、その方向も飛行機が飛ぶ方向とする。また、簡単化のため、爆弾に作用する空気抵抗は無視するものとする。」という問題である。この「真珠湾攻撃」については、「おわりに」のところで簡単に述べる。

2 方程式の導入とその解法

飛行機が飛ぶ軌跡を求めるため、水平に x 軸、鉛直上方に y 軸をとる。飛行機の飛ぶ軌跡を $y = y(x)$ とし、その速さは一定値の v とする。いま、点 (x, y) で飛行機から爆弾を投下するものとする、この点における飛行機の上向き角度を θ とすると、

$$y' = \tan \theta \quad (2.1)$$

の関係が成立する。この点で投下された爆弾の方は、水平速度 $v \cos \theta$ 、鉛直速度 $v \sin \theta$ を持つので、重力加速度を g とし、時刻 t における座標を (P, Q) とすると、

$$P = v \cos(\theta)t + x, \quad Q = v \sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 + y \quad (2.2)$$

となる。爆弾を投下する目標点を原点の $(0, 0)$ とすると、ある時刻 t で、 $P = 0$, $Q = 0$ となるので、

$$v \cos(\theta)t + x = 0, \quad v \sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 + y = 0 \quad (2.3)$$

* 北海学園大学名誉教授

E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

となる。この第1式から t を求めて第2式に代入し、(2.1) 式を用いて θ を消去した形で書くと、

$$-xy' - \frac{1}{2} \frac{g}{v^2} x^2 (1 + y'^2) + y = 0 \quad (2.4)$$

という方程式を得る。これは y' の2乗を含む非線形微分方程式なので、一見難しそうに見えるが、以下のようにするとその厳密解を求めることが可能である。その前に、式簡略化のため、長さの次元を持つ定数 ℓ を

$$\frac{g}{v^2} = \frac{1}{\ell} \quad (2.5)$$

と導入し、また、

$$y' = p \quad (2.6)$$

とおくことにして、この (2.4) 式を

$$y = xp + \frac{x^2}{2\ell} (1 + p^2) \quad (2.7)$$

と書いておく。この式を x で微分すると、

$$\frac{dp}{dx} \left(1 + \frac{x}{\ell} p\right) + \frac{1}{\ell} (1 + p^2) = 0 \quad (2.8)$$

となるが、ここで、発想の転換をし、 x を p の関数、すなわち、 $x = x(p)$ と考えて、この式を、

$$\frac{dx}{dp} + \frac{p}{1 + p^2} x = -\frac{\ell}{1 + p^2} \quad (2.9)$$

と変形する。この式は x に関し、非同次線形微分方程式なので、定数変化法で解を求めることが可能となる。初めに、右辺をゼロとして解くと、 C を積分定数として、

$$x = \frac{C}{\sqrt{1 + p^2}} \quad (2.10)$$

となり、つぎに、 C を変数として、方程式に代入すると、

$$\frac{dC}{dp} = -\frac{\ell}{\sqrt{1 + p^2}} \quad (2.11)$$

となるので、これから、 x_0 を積分定数として、

$$C = x_0 - \ell \log(p + \sqrt{1 + p^2}) \quad (2.12)$$

となる。これを (2.10) 式に戻して、 x は

$$x = \frac{x_0 - \ell \log(p + \sqrt{1 + p^2})}{\sqrt{1 + p^2}} \quad (2.13)$$

と求められる。この式から、 x_0 は $p = 0$ となるとき x の値である。この x を (2.7) 式に代入すると、 y が p の関数として

$$y = \frac{x_0 - \ell \log(p + \sqrt{1 + p^2})}{\sqrt{1 + p^2}} p + \frac{1}{2\ell} \left[x_0 - \ell \log(p + \sqrt{1 + p^2}) \right]^2 \quad (2.14)$$

と求められる。これで x と y の関係が p をパラメータとして求められたことになる。

これで厳密解は求められたが、この (2.13) (2.14) 式は複雑すぎて、これから飛行機の飛ぶ軌跡がどうなるかは容易には見えてこない。一つ分かることは、 $x = 0$ のとき、 y もゼロとなるので、必ず原点を通る曲線になることである。これは、 $p = \sinh(x_0/\ell)$ のところで起こる。

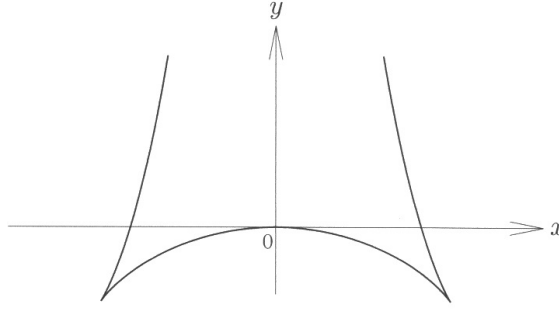


図1 $x_0 = 0, -6 \leq p \leq +6$

それ以上のことはなかなか見えてこないもので、試しに、 $x_0 = 0$ のときの曲線を数値的に求めて描いてみると、図1のようになる。この図は p の値を -6 から $+6$ まで変化させて描いたもので、図中の太実線で示した右側の最上点が $p = -6$ で、そこから p の値が大きくなるにつれ、グラフは下に下がってきて、 p がおよそ -1.5 のところで、急に折れ曲がりが生じ尖点（カusp）となる。この点では y の1階微分の p は連続であるが、2階微分の dp/dx は不連続となる。そこからなだらかに上がりながら $p = 0$ で原点をとおり、ここから下がって、およそ $p = 1.5$ のところで再び尖点となり、あとは上昇して $p = 6$ で左側の最上点に達する。この図で分かるとおり、1個の x の値に2個の y の値が対応する2価関数になっているので、飛行機が飛ぶ軌跡にも2通りの方法が存在することになる。なお、この場合の曲線が折れ曲がる点は、(2.8) 式から考えて、曲率の dp/dx が無限大となる

$$1 + \frac{x}{\ell} p = 0 \quad (2.15)$$

で起こる。この式に $x_0 = 0$ とした (2.13) 式を代入して p を求めると、およそ $p = \pm 1.5088$ となる。

このグラフはあくまで $x_0 = 0$ としたときであるが、 x_0 がゼロでないときはどうなるであろうか。このときは極大となる位置、すなわち、 $p = 0$ となる点は (2.13) (2.14) 式から

$$x = x_0, \quad y = \frac{x_0^2}{2\ell} \quad (2.16)$$

となるので、極大となる位置は、 x_0 が負で大きくなるにつれ、左上方向にずれていき、また、正で大きくなるときは、右上方向にずれていくことになる。

ここで、実際の値に即して、飛行機が飛ぶ軌跡を求めてみよう。まず、 ℓ の値であるが、これは (2.5) 式から $\ell = v^2/g$ となるので、飛行機の速さ v が必要となる。この当時の飛行機の速さは、最速といわれる機種の最大値で 600 km/h 程度であるが、実際の戦闘時にどれくらいの速さをだしているのかはよく分からない。爆弾を投下するときは目標を定めなくてはならないので、かなりの程度速度は落とさなくてはならないだろう。ここでは、仮にこの値を、 $v = 250$ km/h とし、また、 $g = 9.8$ m/s² とし、

$$v = 250,000/3,600 \text{ m/s} \cong 69.444 \text{ m/s}, \quad \ell = v^2/g \cong 492.095 \text{ m} \quad (2.17)$$

と取ることとする。

初めに、目標点の近くで飛行機を上昇させる例を挙げる。つぎの図2は、

$$x_0 = -500 \text{ m} \quad (2.18)$$

とし、 p については、0.6 から 4 まで変化させて飛行機の軌跡を太実線で描いたものである。なお、参考のために p が -30 から 0.6 までのグラフを薄い灰色で描いておいた。また、図の中で、点線で示したものは、 $p = 1.5$ および $p = 2.5$ のときに爆弾を投下するものとして、その爆弾が飛ぶ軌跡を示したものである。確かに、いつ投下しても目標点の原点に到達していることが分かる。

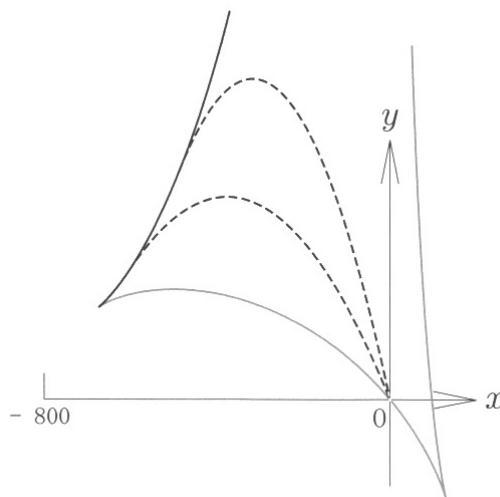


図 2 $x_0 = -500$ m, $0.6 \leq p \leq 4$

もう一つの方法は、図 2 に示した薄い灰色の線の部分を利用することである。つぎの図 3 は、 x_0 の値を図 2 のときと同じ $x_0 = -500$ m とするが、 p の値を 0 から -1.2 の範囲で描いたものである。この図の場合は、飛行機の軌跡と爆弾の軌跡がほとんど重なってしまうため、爆弾の軌跡は描いていない。見て分かるとおりこのまま飛んで行くと自分も爆弾の目標点に衝突してしまう。これは大戦末期に行われた特攻隊方式である。しかし、この方式は、爆弾を投下した瞬間に飛行機を上昇させれば自分は死なずにすむので、良い方法と言えるかもしれない。実際、真珠湾攻撃のときは、目標点の近くで飛行機を急降下させ爆弾を投下したらすぐに飛行機を上昇させるということが行われたらしい。この方が、図 2 に示す方法よりも、目標を狙いやすいのかもしれない。しかし、相手に近づくだけに、相手からも攻撃されやすいことは確かであろう。実際は、そのときの状況に応じてこの図 2 の方法と図 3 の方法の両方が使われたということらしい。

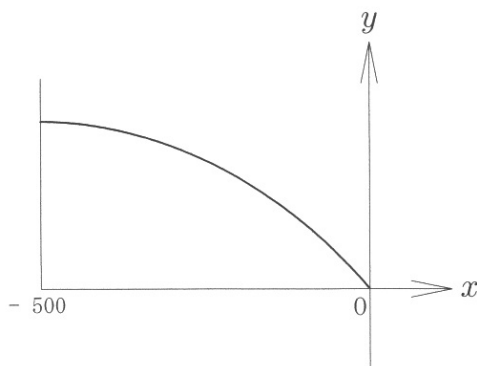


図 3 $x_0 = -500$ m, $-1.2 \leq p \leq 0$

3 おわりに

ここで、「真珠湾攻撃」について簡単に述べておく。これは、1941 年 12 月 8 日に、日本海軍が、航空機、潜航艇を使って、ハワイのオアフ島真珠湾にあるアメリカ海軍基地に奇襲攻撃を加えたもので、アメリカ側に多大な損害を与えたものである。この攻撃によって、太平洋戦争が勃発したと言われるものである。このとき、日本海軍の方から参加した航空機は 189 機であるが、アメリカ側の損害をみると、沈没艦 6 隻、損傷艦 13 隻、航空機の爆破 231 機、死者 2,345 人、負傷者 1,347 人、計 3,692 人を出したといわれる。特に、戦艦アリゾナは、攻撃に使われた 800kg 爆弾が船の火薬庫で爆発したため、この船だけで 1,177 人の死者をだしている。このとき、レーダーなるものはすでにアメリカ側には存在したが、いまのような誘導装置の付いた迎撃ミサイルは存在しない時代で、アメリカ側は攻撃されるままになってしまった。これは、アメリカ側が日本の攻撃力を軽く見て油断していたことがその一因とも言われる。後ほど、この「真珠湾攻撃」を題材にした映画が作られ、それを見たことがあるが、そのときの飛行機の飛び方を見るとまさに図 2 に示すように目標点の近くで上向きに上がって行くものであった。ある程度上がると宙返りをして元の出発点に戻り、再び上昇しながら爆弾を投下していくということをくり返すものであった。

話変わって、微分方程式 (2.4) は非線形微分方程式なので、これが解けてしまったのは、この式がよほど特殊なものだったのかと思っていた。しかし、例によって、これを中西襄先生に見ていただいたところ、この方程式は Legendre 変換で解ける一般的なものの一つであるということを、教えていただいた。以下に、この Legendre 変換による方法を簡単に述べることにする。まず、この場合の (x, y) から (X, Y) への Legendre 変換を

$$X = y', \quad Y = y - xy' \quad (3.1)$$

とする。この Y を x で微分すると、

$$\frac{dY}{dx} = -x \frac{dX}{dx}, \quad \text{となるが、ここで、} \quad \frac{dY}{dx} = \frac{dX}{dx} \frac{dY}{dX}, \quad \text{と書き換えると、} \quad \frac{dY}{dX} = -x \quad (3.2)$$

となる。これらの変換式を用いて、(2.4) 式を、 (X, Y) 系に書き換えると、

$$2\ell Y = \left(\frac{dY}{dX}\right)^2 (1 + X^2), \quad \text{これから} \quad \frac{dY}{dX} > 0 \text{ として、} \quad \sqrt{2\ell Y} = \frac{dY}{dX} \sqrt{1 + X^2} \quad (3.3)$$

となる。これはすぐに変数分離でき、

$$\frac{1}{\sqrt{1 + X^2}} dX = \frac{1}{\sqrt{2\ell Y}} dY \quad (3.4)$$

となって、積分して両辺に ℓ を掛けると、

$$\ell \log(X + \sqrt{1 + X^2}) - x_0 = \sqrt{2\ell Y} \quad (3.5)$$

となる。 x_0 は積分定数である。この右辺を (3.3) の第 3 式に代入し、(3.2) 式を用いて $dY/dX = -x$ とすると、 x が X の関数として

$$x = \frac{x_0 - \ell \log(X + \sqrt{1 + X^2})}{\sqrt{1 + X^2}} \quad (3.6)$$

と求められる。これは、(2.6) 式と (3.1) 式から $X = p$ なので、(2.13) 式と同じものである。また、 y の方は (3.1) の第 2 式から $y = Y + xX$ であるから、(3.5) (3.6) 式より、

$$y = \frac{x_0 - \ell \log(X + \sqrt{1 + X^2})}{\sqrt{1 + X^2}} X + \frac{1}{2\ell} \left[x_0 - \ell \log(X + \sqrt{1 + X^2}) \right]^2 \quad (3.7)$$

となる．これは (2.14) 式そのものである．

[謝辞]

今回も，京都大学名誉教授の中西襄先生にこの原稿を見ていただき，たくさんのコメントをいただきました．特に，「おわりに」のところに書いた (2.4) 式を Legendre 変換を用いて解く方法は先生から教わったものです．先生に心から感謝いたします．

小倉百人一首の統計解析と暗記法

高木富士夫^{*1}

A Statistical Analysis and Mnemonics of the Ogura Hyakunin Isshu

Fujio TAKAGI^{*2}

1 はじめに

小倉百人一首は鎌倉時代初期に歌人の藤原定家が編んだ歌集である。天智天皇（7世紀）から順徳院（13世紀）までの有名歌人100人の短歌を1人1首ずつ採ったものであるが、必ずしも各作者の代表歌を選んだというわけではなく、単に定家が晩年に好んだ歌を集めた歌集であるというのが大方の説らしい。

ところで小倉百人一首は江戸時代初期から歌カルタとして一般庶民の間でも広く知られるようになった。これには何か特別の理由があるのだろうか。定家が没した鎌倉時代初期と江戸時代初期の間は360年以上離れている。したがって定家がカルタ取りというゲームに適した組み合わせの歌を意図して選んだとは思えない。にもかかわらず、小倉百人一首はカルタ取りに適した特徴を備えているように思える。このような奇妙な感覚が小倉百人一首の統計解析を試みようと思った動機である。

2 初音統計

カルタとりとは、五、七、五、七、七の合計三十一文字から成る短歌が書かれた読み札を、詠み手が上の句から下の句まで通して読む間に、それに対応する下の句だけが書かれた取り札を早い者勝ちで取るというゲームである。従って上の句を読んでいる間に、できるだけ早く、対応する下の句は何かを判断しなければならない。よく知られた「むすめふさほせ」という言葉は、上の句の第1音（初音と呼ぶことにする）を知っただけで、下の句が一意に確定する7首の短歌を覚えるためのおまじないである。例えば、読み手が「むー」と読み始めたら、すかさず「霧立ちのぼる秋の夕暮れ」という下の句が書かれた札を取ればよい。初音が「む」の歌は「村雨の露もまだひぬ榎の葉に」を上の句とする1首しかない。

これとは逆に下の句の可能性が最大になる初音は「あ」である。可能な下の句は17もある。つまり「あ」で始まる歌は17首もある。一般に音 a を初音とする歌の数を $f(a)$ とすると、小倉百人一首の場合、多い順に

^{*1} 元東北大学大学院理学研究科、元石巻専修大学理工学部

^{*2} ftakagi@jeans.ocn.ne.jp

$$\begin{aligned}
f(\text{あ}) &= 17 \\
f(\text{な}) &= 8 \\
f(\text{わ}) &= 7 \\
f(\text{こ}) &= f(\text{お}) = f(\text{た}) = 6 \\
f(\text{み}) &= 5 \\
f(\text{よ}) &= f(\text{や}) = f(\text{は}) = f(\text{か}) = 4 \\
f(\text{い}) &= f(\text{ち}) = f(\text{ひ}) = f(\text{き}) = 3 \\
f(\text{つ}) &= f(\text{ゆ}) = f(\text{も}) = f(\text{う}) = f(\text{し}) = 2 \\
f(\text{む}) &= f(\text{す}) = f(\text{め}) = f(\text{ふ}) = f(\text{さ}) = f(\text{ほ}) = f(\text{せ}) = 1
\end{aligned} \tag{2.1}$$

となる。以上の27音以外の音で始まる歌はない。例えば、え、く、て、、などで始まる歌はない。濁音、半濁音で始まる歌もない。

3 暗記法

この結果から小倉百人一首の暗記法を思い付く。まず上の27音を初音とする歌がそれぞれ何首あるのかを覚える。そのためには、次のような横溝正史の八つ墓村を想起させるおどろおどろしい歌を覚えるのが便利である。

穴は凍った
見よ八墓
市退き
露も憂し
娘房干せ

初音が「あ」の歌は17首もあるから、これを暗記するのが最も大変である。続いて初音が「なわこお(っ)た」の歌はそれぞれ8首、7首、6首、6首、6首あると暗記する。ただし「穴は凍った」の「は」をここでは「わ」という音に対応させている。「こお(っ)た」が6, 6, 6だから覚えやすい。次の「みよやはか」は、「よ」は4とこじつけて、「よ、や、は、か」の4つを初音とする歌はいずれも4首あると覚える。「よ」の一つ手前の「み」は6と4の間だから5首あると覚える。あとは楽で、「いちひき」が各3首、「つゆもうし」が各2首、「むすめふさほせ」は各1首。

小倉百人一首の百首の歌の第1句には、同じ語または語句が対で現れる場合が多数ある。例えば「朝ぼらけ」が2回現れる。「天の原」と「天つ風」で、「天」が対を成す。これらを以下に全部列記する。対を成す語または語句と、かっこ内にそれに続く部分を示す。

{秋(風に)、秋(の田の)}、{朝ぼらけ(有明の月と)、朝ぼらけ(宇治の川霧)}
{会(ひみての)、会(ふことの)}、{天(つ風)、天(の原)}、{有(明の)、有(馬山)}
{嘆(きつつ)、嘆(けとて)}、{難波(江の)、難波(渦)}
{我が(庵は)、我が(袖は)}、{忘(らるる)、忘(れじの)}
{わたの原(漕ぎいでて)、わたの原(八十島かけて)}
{心(あてに)、心(にも)}
{世の中(は)、世の中(よ)}、{夜(もすがら)、夜(をこめて)}

これらの対を含む歌を対で覚えて、初音数統計を表す前記の歌と組み合わせると、百首を暗記するのに便利である。例えば、「あ」で始まる歌は17首もあるが、そのうち対を成す歌は、上に示したように5対10首もある。残り7首は対を成さない。

4 五、七、五、七、七 各句の初音構造

ここまで初音と言ってきたのは、三十一文字から成る和歌の最初の音を指し、第1句の初音と言ってもいい。第1句の初音は、あいうえお50音の表の上で、表1のように分布している。ここで*印で指定される”あ行”は子音のない純粋母音{あ、い、う、え、お}を指す。これに対して例えばKで指定される行すなわち”か行”の音は{か、き、く、け、こ}である。以下同様。

第1句の初音統計						
	あ	い	う	え	お	計
*	17	3	2	0	6	28
K	4	3	0	0	6	13
S	1	2	1	1	0	5
T	6	3	2	0	0	11
N	8	0	0	0	0	8
H	4	3	1	0	1	9
M	0	5	1	1	2	9
Y	4	...	2	...	4	10
R	0	0	0	0	0	0
W	7	...	...	...	...	7
計	51	19	9	2	19	100

表1. 第1句の初音統計

表1から読み取れる、行についての特徴は

- 1) あ行の初音が最も多い。
 - 2) 次いで、か行、た行、や行の順に多い。
 - 3) ら行の初音は皆無である。すなわち初音が“ら、り、る、れ、ろ”のいずれかである歌は1首もない！
- 一方、列については
- 4) 初音が”あ列音”すなわち”あ、か、さ、た、な、は、ま、や、ら、わ”のいずれかである歌が過半数の51首ある。

カルタ取りというゲームの観点からいえば、第1句の初音が特に重要であるが、第2句、第3句、第4句、第5句の初音についても同様のデータを取ってみると、面白いことが分かる。

5) 第2, 3, 4, 5句のいずれの場合も、第1句と同様に、あ行を初音とする歌が最も多い。特に第5句の場合、初音があ行の歌が31首もある。そのうち、初音が”あ”の歌が15首ある。

6) 一方、第1句も含めて、ら行の初音を持つ歌は1首もない！

今の所、他に特記すべきことはないので、第2句から第5句までの初音分布の表を示すのは省略する。

第1句から第5句までを通して、ら行の初音を持つ歌は皆無であることを発見したとき、これは面白いと思った。なおインターネットで検索してみたら、先行する類似の統計分析があった。[1] ただし、この文献では、上の句と下の句の初音ということで、第1句と第3句の初音のみ、分析されている。第1句でも第3句でも、ら行

音は皆無であることは、そこに示されている表を見れば一目瞭然であるが、著者は特に指摘していない。

5 百人一首に’ら行初音’の歌が皆無なのは偶然か？

最初に注意したいのは、百人一首において、ら行音自体は頻繁に現れるということである。例えば「明けぬれば 暮るるものとは 知りながら なほ恨めしき 朝ぼらけかな」という歌には、ら行音が7個も出てくる。しかし、どの歌においても何故か各句の先頭にだけは出てこない！何か特別の理由があるのではないかと考えたくなる。そこでとりあえず、”ら行”でインターネット検索してみると、すぐに関連記事が出てきた。[2] によると、日本語において、ら行音で始まる単語は、ほぼすべて、◎外来語、◎られる、らしい、などの付属語、◎りりりーん、るんるんなどの少数の擬声語、のいずれかに該当する、と述べられている。というわけで、小倉百人一首において、ら行の初音が皆無なのは偶然ではないということになる。

6 近代短歌におけるら行初音の例

我が国の近代以降の短歌に注目すると、ら行音を初音とする短歌は、割合としては少ないけれど、それほど珍しいわけでもないということが分かる。例えば小高賢が編集した近代短歌集には、次のような歌が出てくる。[3]

炉の薪 よきおとたてて もゆるなり 李太白去り リットン来る 佐佐木信綱

この短歌には、何と、ら行初音が3つも出てくる！ しかし、ら行初音が2つ以上出てくる歌はこれだけで、以下の歌には、それぞれ、ら行初音が1つだけ出てくる。

秋風に 驢馬なく声も さびしきを 夕は雨と なりにけるかな 与謝野鉄幹

狂ひ出でて 欄間を走り 壁伝ふ 心の中に 燃えあまれる火 尾上柴舟

隣室に 書よむ子らの 声聞けば 心に沁みて 生きたかりけり 島木赤彦

砂糖ほしく りんごも欲しく 粉もほしと わが持たぬ物を かぞへつつおる 片山広子

ほととぎす 東雲どきの 乱声に 湖水は白き 波たつらしも 与謝野晶子

やまとちの るりのみそらに たつくもは いづれのてらの うへにかもあらむ 会津八一

蠟燭を 消せば心は 氷のごとく 現身のする 計らひをせず 斎藤茂吉

不尽の山 れいろうとして ひさかたの 天の一方に おはしけるかも 北原白秋

時局のもとに 離合集散する 党人の ごとなり得ば 容易なるべし 土岐善麿

はたらけど はたらけど猶 わが生活 楽にならざり ぢっと手を見る 石川啄木

参考文献

- [1] 笠井易、齋藤実 山梨学院大学経営情報学論集 17巻、p. 23, 2011年
- [2] ウィキペディア、ら行
- [3] 小高 賢 近代短歌の鑑賞77 新書館 2002年 初版

分岐点の定義（新版）

矢野 忠^{*1}

Definition of Branch Point (New Version)

Tadashi YANO^{*2}

1 はじめに

このエッセイはすでに愛媛県数学教育協議会（愛数協）の機関誌「研究と実践」に掲載した [1] の新版である^{*3}。元のエッセイでは私自身が複素関数における分岐点の定義が納得できなかったところをいくつかの書での定義をあげることで説明したが、引用したそれらの書をひよっとしたら、貶めることになったかもしれない。しかし、もちろんそういうつもりはまったくなかった。

このエッセイではもっと直接的に私の納得した分岐点の定義を述べるのが、新版とする第一の理由である。第二の理由として上記の「研究と実践」の読者は大部分が小学校や中学校の先生であり、より広い一般の読者が対象ではなかった。もちろん、これは [2] に収録されたので、より広く一般の読者の目にも触れたかもしれない。しかし、それでもこれらの書を読まれた方は極めて少数であるから、この「数学・物理通信」に掲載することはより広い読者の目に留まることが期待される。

関数論の講義を聴いたのはもうかれこれ 50 数年前のことで、私が教わった及川広太郎先生（元東京大学教授）も何十年か前に亡くなられた。私が教わった当時には先生は若い助教授の先生であった。その後、母校の東京大学に帰られて、教授となられ、60 歳過ぎで亡くなられたと思う。

関数論はこの頃では複素解析と呼ばれるようになっている。学校時代にもまったく熱心でなかったが、その後も真剣に関数論を学んだことはほとんどない。しかし、関数におけるいくつかの概念は物理の本を読むときや研究上の仕事を行うときに必要なことがあって、いくつかのテキストを拾い読みしたことはあった。

その中でなかなか理解ができなかった概念の一つが「分岐点」であった。私のような物わかりの悪いものは世の中にそうたくさんはいないと思うが、それでも私の経験も何らかの役に立つかもしれないから、この分岐点がいくつかのテキストでどのように定義されているか見てみよう。

2 分岐点の定義

まず、代表的なものとして、『数学入門辞典』[3] の分岐点の定義から見てみよう。533 頁につぎのような定義がある。

分岐点 branch point

複素平面の原点を 1 周する $z(t) = re^{it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) に沿って関数 $\sqrt{z}$ の値を追跡していくと、始点 $z(2\pi) = z(0)$ に戻ったときは異なる値 $\sqrt{r}e^{i\pi} = -\sqrt{r}$ に変わっている。

このように、ある関数要素 $(f(z), D)$ を点 z_0 の近傍を 1 周して解析接続した結果、もとと異なる分枝が得られるとき、 z_0 は $(f(z), D)$ が定める解析関数の分岐点であるという。

^{*1} 元愛媛大学工学部

^{*2} yanotad@earth.ocn.ne.jp

^{*3} はじめ改訂版として書き直しをしていたが、引用した文献等がほとんど変わり、大部分を書き変えたので新版となった。

$\sqrt{z}$ はある特別な点（これは実は分岐点である）を除いて 2 価関数であり，2 枚の Riemann シートを用いて 1 価関数とすることができる．普通は実軸上で 0 から ∞ にカットを入れて原点の周りを一周してきたときに 2 枚目の Riemann シートに入り，もう一度 2 枚目の Riemann シートで原点のまわりをもう一周して回ったら，1 枚目の Riemann シートにもどる．こういう点を分岐点というのである．

ところがこれが全く納得できない．原点の周りを 2 回回転したときによくもとの 1 枚目の Riemann シートにもどるということがわからないのではない．そうではなくて，そのような点がなぜ原点であるのかがわからない．

なっとくできないで何十年以上か経ったが，ところが「なんだそうだったのか」と思うような定義にであった．それは愛媛大学工学部で同僚の先輩教授であった，故安倍齊先生の書かれた関数論のテキストであった [4]．

それはきわめて簡潔に書かれていた．定義が述べられているのは「多価関数と Riemann 面」の節で関数 $w^2 = z$ において関数 w が一般には z の 2 価関数であるので，2 枚の Riemann 面の導入により 1 価関数としての取扱いができると述べられた後で

$z = 0$ と $w = 0$ とが， $z = \infty$ と $w = \infty$ とが（それぞれ）1 対 1 に対応し，その他の点の上では Riemann 面は 2 葉となる． $z = 0$ および $z = \infty$ は分岐点と呼ばれる

この定義によってはじめて上に述べたような分岐点の定義の意味がやっと理解できたのであった．すなわち，一般の多価関数においてこの多価性がある特別な点において成り立たないことがある．その点が分岐点だということである．単に言い表し方にすぎないのかもしれないが，この定義によって理解の程度はぐっと進んだ．たとえば，分岐点を求めたいとき，その求め方の手掛かりが得られたことになる．

ところでこの分岐点の理解は安倍齊先生の京都大学での恩師である，小堀憲先生の見解であったのだろうかと思って小堀先生の著書で分岐点の記述を調べてみたが，少なくとも [5] には普通の分岐点の定義であり，安倍先生のような定義ではない．それで安倍先生の分岐点の理解は小堀先生を経由して得たものではないと推測される．

[2] の末尾につぎのように書いておいた．

その後，E.T. ベルの『数学をつくった人びと』 [6] を読んでいたら，リーマンの伝記の箇所に上の安倍先生と同じ分岐点の定義があった．あとがきによれば，ベルの原本の初版は 1937 年だということである (2004.1.12)．

この追加を [2] に書いたが，しかし，ベルの書いた分岐点の説明の中身の引用をしていない．ちょっと長くなるが，この箇所を以下に引用しておこう（以下の引用にあたって記号を変更した：引用者）．

アーベル関数の理論においては，多価関数は必然的につぎのような形で現れてくる． z の n 価関数は， z のいくつかの除外値を除けば， z のそれぞれの値に対して，きっちり n 個の値をとる．つぎに実変数の関数について，多様性あるいは多価性を説明しよう．そのために，例として $y^2 = x$ で定義された x の関数 y を考えよう．この関数は 2 価である．たとえば， $x = 4$ とすると， $y^2 = 4$ だから， $y = 2$ かまたは $y = -2$ である． x に 0 と「無限大 ∞ 」以外のどんな実数を入れても， y は違った二つの値 $\sqrt{x}$ と $-\sqrt{x}$ をとる．この最も単純な例においては， y と x は， $y^2 - x = 0$ という一つの代数方程式で結びつけられている．

さて，この特別な場合からすぐに，一般的状況に進もう．それには x の n 価関数 y として，方程式

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \cdots + P_{n-1}(x)y + P_n(x) = 0 \quad (2.1)$$

で定義された関数を考えるとよい．ここで， $P_i(x)$ は， x の多項式であるとする．この方程式によって y は x の n 価関数として定義される．前の $y^2 - x = 0$ の場合のように， x のいくつかの除外値*4に対しては， y

*4 たとえば， x が y の最高次の係数 $P_0(x) = 0$ の根であるような場合（訳注）

の n 個の値のうち二つあるいはそれ以上が一致してしまうことがある。 x のこれらの除外値は、この方程式で定義された関数の分岐点と呼ばれるものである。

これらのことはすべて、複素数の変数と

$$P_0(z)w^n + P_1(z)w^{n-1} + \cdots + P_{n-1}(z)w + P_n(z) = 0 \quad (2.2)$$

で定義された関数 w (およびそのような関数の積分) にも拡張される。ここで、 $z = x + iy$ は複素変数で x, y は実変数、 $i = \sqrt{-1}$ である。 w の n 個の値は、関数 w の分枝と呼ばれる。ここで、 z の一価関数の表示について述べたことをふり返ってみなければならない。すなわち、変数 $z = x + iy$ が z -平面上で、ある曲線を描くとし、一価関数 $f(z)$ を $u + iv$ という形に表したとしよう。ここで u, v は実変数 x, y の関数である。すると、 z の各値に対して、 u, v のそれぞれについてただ一つの値が対応し、したがって、 z が x, y -平面上で対応する曲線を描くであろう。つまり、 $f(z)$ の描く曲線は、 z の描く曲線によって一意的に決定される。しかし、 w が z の多価関数である場合には、 z の各値に対して (w のいくつかの値が一致してしまう分岐点を除いては：強調は引用者) ちょうど n 個の異なった値が対応するから、($n > 1$ のときには) ただ一枚の w -平面だけでは、関数 w の描く曲線、つまり関数 w の「進路」を表すには不十分なことは明らかである。 $w^2 = z$ で決定される関数の場合のように、 w の二価関数の場合には、二枚の w -平面が必要となるが、まったく同様に n 価関数 (n は有限でも無限でもよい) に対しては、このような w -平面がちょうど n 枚必要になる。

引用部の後半は主にリーマン・シートの必要性を述べているが、それでも引用文の強調部分は分岐点の意味を示している*5。

同書のあとがきによれば、ベルの原本の初版は 1937 年である。また著者 E. T. ベルは元全米数学者協会々長であるということだから、数学の理解もきちんとした方であったと思われるが、それにしてもあまりこういう分岐点の説明はほかには読んだことがなかった。しかし、私には納得のいった説明である*6。

ところが、対数関数の分岐点の場合にはちょっと異なる。というのは $y = \log x$ で実は $x = 0$ では対数関数が定義されていない。これは変数 x を複素数 z に拡張して、 $w = \log z$ としても $z = 0$ では定義されていない*7。

分岐点について、Chun Wa Wong の訳書『物理数学入門 II』に特徴的な説明がある [8]。これは「多価関数とリーマン面」の節のところにあり、リーマン面を複素関数 $w = \sqrt{z}$ に関して導入した後で、次のような説明がある。

こういうわけで多価関数の不連続性を除く解毒剤として複素平面のかわりに多葉リーマン面が登場したのである。切断(カット)は必ず一葉以上のリーマン面に属する点から始まらなければならないか、あるいはその点で終わらなければならない。この点を分岐点という。関数は分岐点で 0 になるか無限大になるかのいずれかである。その場合、関数とその点で一価であるか多価であるかということは問題にならない。

これは上で述べたような複素関数の分岐点の定義とは異なるかもしれないが、ここには分岐点での関数の値が 0 か無限大 ∞ であるという情報が与えられている。こういうはっきりした言明は他ではあまり見たことがない。

同様な記述を Hauser の訳書『複素変数 1』にも見つけた [9]。これも「多価関数」の節にある(以下の引用にあたって語句を一部変更した：引用者)。

z -平面上の領域 A から複素数の集合 B への多価関数 (multiple-valued function) とは、 A の各点 z に B

*5 この一般の分岐点の定義から前の $w^2 = z$ のような特殊な場合がどうやって説明ができるのか私にはまだわかっていない。

*6 ベルと同じ観点からの分岐点の定義は [7] でもされている。

*7 $w = \log z$ を $z = e^w$ と表すとき、 $z = 0$ に対応した複素数 w は存在しない。すなわち、 $w = u + iv$ とすると、 $e^{u+iv} = 0$ から $e^u \cos v = 0$ および $e^u \sin v = 0$ が導かれるが、これらを同時にみたす u, v は存在しない。

の少なくとも1つの点 w を対応させる規則で、 B の2個あるいはそれより多くの w に対応する A の少なくとも1つの z があるものをいう。それはまた1価関数の集まりであるとも考えることもできる。

A から B への n -価関数 (n -valued function) F は、各 z にちょうど n 個の B の点に対応させる多価関数である (ただし、可算個数の点の特別な点を別とする)。だから n -価関数は n 個の1価関数の集まりである。

n -価関数 F の分枝 (branch) f とは、ある領域 D 上で定義された正則な1価関数であって、 D の各点において $f(z)$ が $F(z)$ の値の1つに等しいものである。たとえば、実変数では2価関数 $y = \sqrt{x}$ の分枝は $y = +\sqrt{x}$ と $y = -\sqrt{x}$ とである。

n -価関数 F あるいはその分枝の1つの分岐点 (branch point または winding point) z_0 とは、それに F の少なくとも2つの分枝が同じ値に対応するか、またはそこで無限大に発散する点である。1つの分岐点で出会う分枝の数を分岐点の位数 (order) という*8。たとえば、点 $x = 0$ は2-価の実関数 $y = \sqrt{x}$ の位数2の分岐点である。(以下略)

分岐点とは、関数の多価性が成り立たない点であるとすれば、 $w = \sqrt{z-a}$ とか $w = \log(z-b)$ とかでも関数 w が1価である点 $z = a$ とか $z = b$ である点が分岐点であることがわかる。また、 $w = \sqrt{(z-a)(z-b)}$ でも $z = a, z = b$ が分岐点であることもすぐにわかる。もちろん、これらの関数に、さらに分岐点として無限遠での点は当然つけ加えなければならない。

もっとも、複素解析を深く学んだ人は誰でも分岐点としては $w = (z-a)^{1/p}$ 、 $p =$ 正の整数 であるときはその値が $w = 0$ となる点 $z = a$ であるとか、 $w = \log(z-b)$ の $z = b$ の点が分岐点になるということをご存知であるにちがいない。だが、私のような不勉強者はそういう知識はまったくなかったので、分岐点といわれてわからずとまどうばかりであった。

3 おわりに

以上述べたように、これはあくまで私自身の分岐点の理解の一端を述べたに過ぎない。世の多くの秀才・才媛の方々はどのようなふうに、この分岐点を理解しておられるのだろうか。

ちなみに、高木貞治『解析概論』[10]には分岐点についての一般的な定義はない。しかし、対数的分岐点についての定義は述べられている。一般的な分岐点の定義がないのはこの本が関数論のテキストを目指したものではないことから仕方がないであろう。また名著といわれる吉田洋一『関数論』[11]には分岐点という用語はないが、特異点の一部として取り扱われている。

(1996.9.12)(2003.10.1 改訂) (2018.12.25 三訂)

参考文献

- [1] 矢野 忠, 分岐点の定義, 「研究と実践」(愛数協) No. 58 (1996.6) 22-23
- [2] 矢野 忠, 『数学散歩』(国土社, 2005) 125-127
矢野 忠, 『物理数学散歩』(国土社, 2011) 54-56
- [3] 青本, 上野, 加藤, 神保, 砂田, 高橋, 深谷, 俣野, 室田 編集, 『数学入門辞典』(岩波書店, 2005) 533
- [4] 安倍 斉, 『応用関数論』(森北出版, 1981) 41-42
- [5] 小堀 憲, 『複素解析学入門』(朝倉書店, 1966) 88

*8 分岐点の位数はちがった定義もあり、その場合に位数1とする定義である。

- [6] E. T. ベル, 『数学をつくった人びと』下 (東京図書, 1997) 194
- [7] E. クライツィグ (近藤次郎, 堀素夫 訳), 『複素関数論』(培風館, 2016) 55
- [8] Chun Wa Wong (小林てつ郎, 近 匡 訳), 『物理数学入門 II』(丸善) 127
(注: 小林さんの「てつ」が環境依存の字体でうまく表示できないために「てつ」とひらがなで表した)
- [9] A. A. Hauser, Jr. (柴垣和三雄 訳), 『複素変数 1』(森北出版, 1981) 91
- [10] 高木貞治, 『解析概論』改訂 3 版 (岩波書店, 1961) 238
- [11] 吉田洋一, 『関数論』初版 (岩波書店, 1958)

編集後記

菜の花が満開に咲き、四国の遍路道も春めいてきました。皆様にはご健勝にお過ごしのことと存じます。

今回の9巻1号への原稿の投稿も、物理の方からのものが多く、数学の方からの原稿が少ないのはさびしいかぎりです。なんとか挽回しなければと思いつつ、努力しなければと思ってがんばっております。

Cauchy-Hadamard の定理の級数の収束半径を求める公式の拡張によって新しい系が求められるかと考えていたのですが、ちょっとした勘違いをしていたことに気づきました。それで書き直しをしています。さすがに Hadamard は秀才で、まちがってはいなかったようです。

読者の皆様には今後ともに、ご愛読をお願いします。

(新関章三)