

数学・物理通信

9 卷 10 号 2020 年 2 月

編集 新関章三・矢野 忠

2020 年 2 月 3 日

目次 (Contents)

1. 鍵盤打楽器の固有振動 (3)

世戸 憲治 2

2. 「Ostrogradski の不安定性」入門

江沢康生 12

3. Pauli 行列の導出

矢野 忠 20

4. 編集後記

新関章三, 矢野 忠 31

1. Characteristic Oscillations of Keyboard Percussion (3)

Kenji SETO 2

2. An Introducton to the Ostrogradski Instability

Yasuo EZAWA 12

3. Derivation of Pauli Matrices

Tadashi YANO 20

5. Editorial Comments

Shozo NIIZEKI and Tadashi YANO 31

鍵盤打楽器の固有振動 (3)

世戸 憲治 *

Characteristic Oscillations of Keyboard Percussion (3)

Kenji SETO*

1 はじめに

これまで、鍵盤打楽器の固有振動について、波動方程式を解析的に解くという立場で、扱ってきた。初めの「鍵盤打楽器の固有振動 (1)」(「数学・物理通信」9 巻 8 号) では、鍵盤を厚さ一様の棒状にしたときの固有振動を解析し、また、「同題 (2)」(9 巻 9 号) では、鍵盤の厚さを段差付きで変えた場合の固有振動を解析した。このときの解析では、パラメータのとり方次第で、第 1, 第 2 高調波の振動数を基本振動数のほぼ整数倍にすることが可能であることが示された。

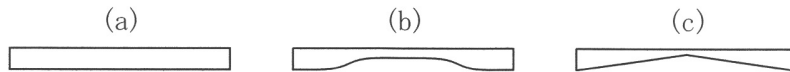


図 1 厚さ一定の鍵盤 (a), 厚さに変化を持たせた実際の鍵盤 (b), 直線的に厚さを変えたもの (c)

今回は、図 1(c) に示すように、鍵盤の中央部から端に向かって直線的に厚さが変化する場合を解析する。このモデルは実際の鍵盤の形とはかなりかけ離れたものになるが、解析解がきれいに求められる例としてそれなりの価値があるものと思われる。このときの解は、「管楽器で使用されるリードの固有振動 (1)」(「数学・物理通信」8 巻 9 号) で示したように、厚さが直線的に変化する棒の固有振動の問題は Bessel 関数を用いて解くことができる。今回はこの応用として、Bessel 関数を用いた解析を進める。結論としては、第 1, 第 2 高調波のみならず、計算したかぎりでは第 9 高調波までの振動数を、基本波のほぼ整数倍にすることに成功した。

2 方程式の導入とその解法

2.1 方程式の導入

鍵盤の長さを 2ℓ , 幅を a とするが、その厚さ h は図 1(c) に示すように、鍵盤の中央を原点として、長さ方向に x 軸をとったとき、

$$h(x) = h_0 \left(1 + \alpha \frac{|x|}{\ell} \right) \quad (2.1)$$

と表されるものとする。ここに α は、厚さの変化を決めるための無次元のパラメータで、鍵盤の中央部の厚さは h_0 , 両端での厚さは $h_0(1 + \alpha)$ となる。

* 北海学園大学名誉教授

E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

ここで用いる波動方程式は、前回と同じ Bernoulli-Euler 梁のものを使う。すなわち、点 x , 時刻 t における鍵盤の面に対し垂直方向の変位を $V(x, t)$ としたとき、

$$\rho a h(x) V_{tt}(x, t) = -\partial_x^2 [EI(x) V_{xx}(x, t)], \quad I(x) = \frac{ah(x)^3}{12} \quad (2.2)$$

とする。ここに、変位 V に付けた添え字はその変数での微分を表す。また、 ρ は鍵盤の体積密度、 E は Young 率、 $I(x)$ は断面 2 次モーメントでこの第 2 式で定義する。

この方程式に、鍵盤の両端 ($x = \pm \ell$) は完全自由端として、そこでの曲げモーメント $M = EIV_{xx}$ をゼロ、また、剪断力 $Q = \partial_x(EIV_{xx})$ もゼロとして、

$$M = EI(x)V_{xx} \Big|_{x=\pm\ell} = 0, \quad Q = \partial_x [EI(x)V_{xx}] \Big|_{x=\pm\ell} = 0 \quad (2.3)$$

という境界条件を課す。また、 $x = 0$ の点は、方程式の接点となるので、そこで鍵盤は折れ曲がっていないという接続条件、

$$\lim_{x \rightarrow +0} V(x, t) = \lim_{x \rightarrow -0} V(x, t), \quad \lim_{x \rightarrow +0} V_x(x, t) = \lim_{x \rightarrow -0} V_x(x, t), \quad (2.4)$$

および、この点で曲げモーメント M と剪断力 Q が連続という接続条件

$$\lim_{x \rightarrow +0} EI(x)V_{xx}(x, t) = \lim_{x \rightarrow -0} EI(x)V_{xx}(x, t), \quad \lim_{x \rightarrow +0} \partial_x [EI(x)V_{xx}(x, t)] = \lim_{x \rightarrow -0} \partial_x [EI(x)V_{xx}(x, t)] \quad (2.5)$$

を課すことになる。

方程式を解く前に、数式簡素化のため変数の無次元化をしておく。そのため、速度の次元を持つ c と時間の次元を持つ τ を

$$c = \sqrt{\frac{E}{12\rho}}, \quad \tau = \frac{\ell}{c} \quad (2.6)$$

として導入しておく。ここで、 ℓ を長さの単位、 τ を時間の単位として、 x, h_0, V, t を、改めて

$$x/\ell \rightarrow x, \quad h_0/\ell \rightarrow h_0, \quad V/\ell \rightarrow V, \quad t/\tau \rightarrow t \quad (2.7)$$

とおき直す。この変換で方程式 (2.2) は、

$$h(x)V_{tt}(x, t) = -\partial_x^2 [h(x)^3 V_{xx}(x, t)] \quad (2.8)$$

と無次元化されたものになる。ここで、(2.1) 式に替わって新しく定義された無次元の厚さ $h(x)$ は

$$h(x) = h_0(1 + \alpha|x|) \quad (2.9)$$

である。境界条件の (2.3) 式はこの無次元化で、

$$V_{xx}(x, t) \Big|_{x=\pm 1} = 0, \quad \partial_x [h(x)^3 V_{xx}(x, t)] \Big|_{x=\pm 1} = 0, \Rightarrow V_{xxx}(x, t) \Big|_{x=\pm 1} = 0 \quad (2.10)$$

となる。ここで、この第 1 式、第 2 式は (2.3) 式から直接でるものであるが、この第 2 式は第 1 式を用いると第 3 式に変形されることに注意する。さらに、接続条件の (2.4) 式はそのままであるが、(2.5) 式は、

$$\lim_{x \rightarrow +0} V_{xx}(x, t) = \lim_{x \rightarrow -0} V_{xx}(x, t), \quad \lim_{x \rightarrow +0} \partial_x [h(x)^3 V_{xx}(x, t)] = \lim_{x \rightarrow -0} \partial_x [h(x)^3 V_{xx}(x, t)] \quad (2.11)$$

となる。この第 2 式は、第 1 式を用いても、 $\lim_{x \rightarrow +0} V_{xxx} = \lim_{x \rightarrow -0} V_{xxx}$ とはならないことに注意する。

2.2 固有値と固有関数

方程式 (2.8) を解くにあたり，変位 $V(x, t)$ を変数分離形とし，時間依存部分は三角関数として，

$$V(x, t) = X(x) \sin(\omega t + \delta) \quad (2.12)$$

と仮定する．ここに ω は無次元化された角振動数， δ は位相角である．これで，方程式 (2.8) は，

$$h(x)\omega^2 X(x) = \frac{d^2}{dx^2} [h(x)^3 X_{xx}(x)], \quad h(x) = h_0(1 + \alpha|x|) \quad (2.13)$$

と 1 変数 x のみを含むものとなる．この方程式を境界条件 (2.10) 式からでる

$$X_{xx}(x) \Big|_{x=\pm 1} = 0, \quad X_{xxx}(x) \Big|_{x=\pm 1} = 0 \quad (2.14)$$

および，接続条件 (2.4) (2.11) 式からでる

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} X(x) &= \lim_{x \rightarrow -0} X(x), & \lim_{x \rightarrow +0} X_x(x) &= \lim_{x \rightarrow -0} X_x(x), \\ \lim_{x \rightarrow +0} X_{xx}(x) &= \lim_{x \rightarrow -0} X_{xx}(x), & \lim_{x \rightarrow +0} \frac{d}{dx} [h(x)^3 X_{xx}(x)] &= \lim_{x \rightarrow -0} \frac{d}{dx} [h(x)^3 X_{xx}(x)] \end{aligned} \quad (2.15)$$

の下に解くことになる．

この方程式 (2.13) は，前出の「管楽器で使用するリードの固有振動 (1)」「付録」で示したように，Bessel 関数を用いて解くことが可能である．まず，この方程式において， x から y への変数変換

$$y = \frac{\omega}{h_0 \alpha^2} (1 + \alpha|x|) \quad (2.16)$$

を実行すると，方程式は

$$yX = \frac{d^2}{dy^2} \left[y^3 \frac{d^2}{dy^2} X \right] \quad (2.17)$$

となる．このとき，元の方程式 (2.13) は x の符号反転に対し不変なので， x の正負にかかわらず，同じ式に変換されることに注意する．一方，1 次の Bessel 関数，および，1 次の変形 Bessel 関数が満たす方程式は，独立変数を z ，従属変数を $f_{(\pm)}$ とすると，

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} - \frac{1}{z^2} \pm 1 \right] f_{(\pm)}(z) = 0 \quad (2.18)$$

となる．ここに，複号は同順で，プラスは通常の Bessel 関数，マイナスは変形 Bessel 関数を表す．この式の従属変数を $f_{(\pm)}(z)/z$ とすると，

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{3}{z} \frac{d}{dz} \pm 1 \right] \frac{f_{(\pm)}(z)}{z} = 0 \quad (2.19)$$

となるが，さらに，独立変数を z から， y に

$$z = 2\sqrt{y} \quad (2.20)$$

と変えると，

$$\left[y \frac{d^2}{dy^2} + 2 \frac{d}{dy} \pm 1 \right] \frac{f_{(\pm)}(2\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} = 0 \quad (2.21)$$

と変形される．ここで，このプラス，マイナス 2 つある微分演算子を重ねて積の形にしてしまうと，

$$\left[\left(y \frac{d^2}{dy^2} + 2 \frac{d}{dy} \right)^2 - 1 \right] \frac{f_{(\pm)}(2\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} = 0 \quad (2.22)$$

となる．ここで，この微分演算子の部分を書き換えると，

$$\left(y \frac{d^2}{dy^2} + 2 \frac{d}{dy}\right)^2 = y^2 \frac{d^4}{dy^4} + 6y \frac{d^3}{dy^3} + 6 \frac{d^2}{dy^2} = \frac{1}{y} \frac{d^2}{dy^2} \left[y^3 \frac{d^2}{dy^2} \right] \quad (2.23)$$

となるので，(2.22) 式は

$$y \cdot \frac{f_{(\pm)}(2\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} = \frac{d^2}{dy^2} \left[y^3 \frac{d^2}{dy^2} \left(\frac{f_{(\pm)}(2\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} \right) \right] \quad (2.24)$$

と書き換えられる．これは，まさに (2.17) 式を再現しているので，この方程式 X の 4 個の独立解は，1 次の第 1 種，第 2 種 Bessel 関数 J_1 , N_1 ，および，1 次の第 1 種，第 2 種変形 Bessel 関数 I_1 , K_1 で求められ，

$$X = \frac{J_1(2\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}, \quad \frac{N_1(2\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}, \quad \frac{I_1(2\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}, \quad \frac{K_1(2\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} \quad (2.25)$$

となる．先に述べたように，方程式 (2.13)，境界条件 (2.14)，接続条件 (2.15) は，すべて， x の符号反転に対し不変なので，この解 X としては，偶関数の場合と奇関数の場合があり得る．以下では，数式簡素化の観点から，変数 x と z の関係を，(2.16) (2.20) 式より

$$z = 2\sqrt{y} = 2\sqrt{\frac{\omega}{h_0\alpha^2}(1 + \alpha|x|)} \quad (2.26)$$

とし，Bessel 関数の変数としてはこの z を使うことにする．そのうえで，(2.25) 式の線形結合として定義される偶関数の解を， A , B , C , D を適当な係数として，

$$F(x) = A \frac{J_1(z)}{z} + B \frac{N_1(z)}{z} + C \frac{I_1(z)}{z} + D \frac{K_1(z)}{z} \quad (2.27)$$

とおき，奇関数の解を

$$G(x) = \text{sgn}(x) \left[A \frac{J_1(z)}{z} + B \frac{N_1(z)}{z} + C \frac{I_1(z)}{z} + D \frac{K_1(z)}{z} \right] \quad (2.28)$$

とおくことにする．ここで， $G(x)$ に含まれる sgn は符号関数である．また，これら関数で同じ係数 A , B , C , D を用いたが，これは無用に変数を増やさないためで，もちろん，一般には異なるものである．

これら関数に境界条件 (2.14) の 2 本の式，および，接続条件 (2.15) の 4 本の式，合計 6 本の条件を課すことになる．このうち，境界条件 (2.14) の 2 本の式は必ず課すべき条件となるが³，接続条件 (2.15) の 4 本の式については，すべてが条件となる訳ではない．例えば， $F(x)$ については，この定義から， F と F_{xx} が偶関数となるので， $x=0$ ですでに連続になっている．また， F_x と $(d/dx)[h^3 F_{xx}]$ は奇関数となるので，これらが³ $x=0$ で連続になるには，その値がその点でゼロでなければならない．同様に， $G(x)$ については， G_x と $(d/dx)[h^3 G_{xx}]$ が偶関数になるので， $x=0$ ですでに連続になっているが， G と G_{xx} は奇関数になるので， $x=0$ で連続になるにはその点でこれらの値がゼロでなければならない．

以上をまとめると，偶関数 $F(x)$ に対する条件式は，

$$F_{xx}(1) = 0, \quad F_{xxx}(1) = 0, \quad F_x(0) = 0, \quad \frac{d}{dx}[h(x)^3 F_{xx}] \Big|_{x=0} = 0 \quad (2.29)$$

となり^{*1}，また，奇関数 $G(x)$ に対する条件式は，

$$G_{xx}(1) = 0, \quad G_{xxx}(1) = 0, \quad G(0) = 0, \quad G_{xx}(0) = 0 \quad (2.30)$$

^{*1} この (2.29) の最後の式に表れる微分は，微分の分配則を使って崩したくなるが，そうすると後の計算がかえって面倒になる．また，境界条件のときは， $x = \pm 1$ で $F_{xx} = 0$ だったので， $(d/dx)[h(x)^3 F_{xx}] \Big|_{x=\pm 1} = 0$ から $F_{xxx} = 0$ が³でるが³， $x=0$ での接続条件のときは， F_{xx} はその点でゼロとは限らないので， F_{xxx} も一般にはゼロとはならないことに注意する．

となる．ここで，関数 F, G は偶奇性が決まっているので，正負の x に対する条件は，事実上， x 正のみで課すことによりことに注意する．この後は，これらの式に $F(x), G(x)$ の定義式 (2.27) (2.28) を当てはめてることになる．その際，Bessel 関数に関する微分公式 (岩波全書「数学公式Ⅲ」)

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n \left(\frac{J_\nu(z)}{z^\nu}\right) &= (-1)^n \frac{J_{\nu+n}(z)}{z^{\nu+n}}, & \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n \left(\frac{N_\nu(z)}{z^\nu}\right) &= (-1)^n \frac{N_{\nu+n}(z)}{z^{\nu+n}}, \\ \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n \left(\frac{I_\nu(z)}{z^\nu}\right) &= \frac{I_{\nu+n}(z)}{z^{\nu+n}}, & \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n \left(\frac{K_\nu(z)}{z^\nu}\right) &= (-1)^n \frac{K_{\nu+n}(z)}{z^{\nu+n}} \end{aligned} \quad (2.31)$$

が必要になる．ここで実際に使うのは， $\nu = 1, n = 1, 2$ の場合である．さらに，(2.29) の最後の式を処理するには，この他に，

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n (z^\nu J_\nu(z)) &= z^{\nu-n} J_{\nu-n}(z), & \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n (z^\nu N_\nu(z)) &= z^{\nu-n} N_{\nu-n}(z), \\ \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n (z^\nu I_\nu(z)) &= z^{\nu-n} I_{\nu-n}(z), & \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n (z^\nu K_\nu(z)) &= (-1)^n z^{\nu-n} K_{\nu-n}(z) \end{aligned} \quad (2.32)$$

も必要になる．ここで，実際に使うのは $\nu = 3, n = 1$ の場合である．なお，(2.29) の最後の式を処理するとき，そこに含まれる $h(x)$ を，(2.9) (2.16) (2.20) 式より，

$$h(x) = \frac{(h_0 \alpha)^2}{4\omega} z^2 \quad (2.33)$$

と z で表しておく．後は， x 微分と z 微分の関係を， $x > 0$ の範囲で，

$$\frac{d}{dx} = \frac{dy}{dx} \frac{d}{dy} = \frac{\omega}{h_0 \alpha} \frac{d}{dy} = \frac{\omega}{h_0 \alpha} \frac{dz}{dy} \frac{d}{dz} = \frac{2\omega}{h_0 \alpha} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right) \quad (2.34)$$

と求めておく．これは，ちょうど，(2.31) (2.32) の微分公式が使える形になる．結果を書く前に，数式簡素化のため， $x = 0, x = 1$ における z の値を，(2.26) 式より，

$$z(0) = 2\sqrt{\frac{\omega}{h_0 \alpha^2}} = k, \quad z(1) = \gamma k, \quad (\gamma = \sqrt{1 + \alpha}) \quad (2.35)$$

と定義しておく．これだけの用意をしたうえで，(2.27) 式の $F(x)$ に (2.29) の条件式を適用すると，

$$\begin{aligned} AJ_3(\gamma k) + BN_3(\gamma k) + CI_3(\gamma k) + DK_3(\gamma k) &= 0 \\ AJ_4(\gamma k) + BN_4(\gamma k) - CI_4(\gamma k) + DK_4(\gamma k) &= 0 \\ AJ_2(k) + BN_2(k) - CI_2(k) + DK_2(k) &= 0 \\ AJ_2(k) + BN_2(k) + CI_2(k) - DK_2(k) &= 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

となり，同様に，(2.28) 式の $G(x)$ に (2.30) の条件式を適用すると，

$$\begin{aligned} AJ_3(\gamma k) + BN_3(\gamma k) + CI_3(\gamma k) + DK_3(\gamma k) &= 0 \\ AJ_4(\gamma k) + BN_4(\gamma k) - CI_4(\gamma k) + DK_4(\gamma k) &= 0 \\ AJ_1(k) + BN_1(k) + CI_1(k) + DK_1(k) &= 0 \\ AJ_3(k) + BN_3(k) + CI_3(k) + DK_3(k) &= 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

となる．これらの式はすべてイコールゼロの形をしているので，係数 A, B, C, D がすべてゼロにならないためには，その係数行列式の値がゼロでなければならない．すなわち，(2.36) 式から行列式を

$$A_F(k) = \begin{vmatrix} J_3(\gamma k) & N_3(\gamma k) & I_3(\gamma k) & K_3(\gamma k) \\ J_4(\gamma k) & N_4(\gamma k) & -I_4(\gamma k) & K_4(\gamma k) \\ J_2(k) & N_2(k) & -I_2(k) & K_2(k) \\ J_2(k) & N_2(k) & I_2(k) & -K_2(k) \end{vmatrix} \quad (2.38)$$

と定義したとき,

$$\Lambda_F(k) = 0 \quad (2.39)$$

でなければならない. これから, $\gamma = \sqrt{1+\alpha}$ を与えられたものとして, k の値が固有値として求まる. k の値が決まると, (2.35) の第 1 式から角振動数 ω の固有値も決まる.

同様に, (2.37) 式から行列式を

$$\Lambda_G(k) = \begin{vmatrix} J_3(\gamma k) & N_3(\gamma k) & I_3(\gamma k) & K_3(\gamma k) \\ J_4(\gamma k) & N_4(\gamma k) & -I_4(\gamma k) & K_4(\gamma k) \\ J_1(k) & N_1(k) & I_1(k) & K_1(k) \\ J_3(k) & N_3(k) & I_3(k) & K_3(k) \end{vmatrix} \quad (2.40)$$

と定義したとき,

$$\Lambda_G(k) = 0 \quad (2.41)$$

から k , および, ω の値が固有値として決まる.

これら固有値 k は飛び飛びに決まるであろう. (2.39) (2.41) 式から求まる固有値をまとめて, 小さい方から k_n , ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) とする. この個々の k_n につき, (2.36), あるいは, (2.37) 式で $A = 1$ とおき, これら 4 本の式の中の任意の 3 本から残りの係数 B , C , D を決めることができる. そのときの関数 $F(x)$, $G(x)$ を固有値 k_n 依存性を明記することにして $F(x, k_n)$, $G(x, k_n)$ と書き, 固有関数と呼ぶ. ただし, これらは正規化された固有関数ではない.

2.3 固有関数の正規化

2 個の固有値を k_n , $k_{n'}$ とする. このとき, n と n' の偶奇性が違えば, 元になる関数の偶奇性も異なると考えられる. ここで, 例えば, n が偶数, n' が奇数とした場合, それらの関数 $F(x, k_n)$ と $G(x, k_{n'})$ の積に重みの $h(x)$ を付けた積分が

$$\int_{-1}^1 h(x) F(x, k_n) G(x, k_{n'}) dx = 0 \quad (2.42)$$

となることは, $h(x)$ が偶関数なので, 当然のことである. したがって, 固有関数の直交性を求めるときは, 偶関数同士, あるいは, 奇関数同士の積分を考えるとよい. 以下では, 偶関数同士の場合を考えることにする.

ここで, 固有値とはかぎらない 2 個の k を k , k' とし, それらに属する関数を $F(x, k)$, $F(x, k')$ とする. これら関数は (2.13) 式を満たし,

$$\omega^2 h(x) F(x, k) = \frac{d^2}{dx^2} [h(x)^3 F_{xx}(x, k)], \quad \omega'^2 h(x) F(x, k') = \frac{d^2}{dx^2} [h(x)^3 F_{xx}(x, k')] \quad (2.43)$$

が成り立っている. ここで, k と ω , および, k' と ω' は (2.35) 第 1 式の関係にある. この第 1 式に $F(x, k')$ を掛け, 第 2 式に $F(x, k)$ を掛けて, 辺々を引き算すると,

$$\begin{aligned} & (\omega^2 - \omega'^2) h(x) F(x, k) F(x, k') \\ &= \frac{d}{dx} \left[F(x, k') \frac{d}{dx} [h(x)^3 F_{xx}(x, k)] - F(x, k) \frac{d}{dx} [h(x)^3 F_{xx}(x, k')] \right. \\ & \quad \left. + h(x)^3 F_x(x, k) F_{xx}(x, k') - h(x)^3 F_x(x, k') F_{xx}(x, k) \right] \quad (2.44) \end{aligned}$$

となる。この式の両辺を x で -1 から 1 まで積分するが、そのとき、関数 F は (2.26) (2.27) 式で見るように x の正負で異なる定義になるので、積分の方も

$$\int_{-1}^1 \rightarrow \int_{-1}^{-0} + \int_{+0}^1 \quad (2.45)$$

と各区分に分ける必要がでてくる。このとき、接続条件である (2.15) 式が成立しているものとする、 $x = 0$ のところで $F, F_x, F_{xx}, (d/dx)[h^3 F_{xx}]$ が各々連続になるので、そこでの境界値は相殺され、形式的には -1 から 1 までの積分としてよい。結果は、

$$\begin{aligned} (\omega^2 - \omega'^2) \int_{-1}^1 h(x) F(x, k) F(x, k') dx \\ = \left[F(x, k') \frac{d}{dx} [h(x)^3 F_{xx}(x, k)] - F(x, k) \frac{d}{dx} [h(x)^3 F_{xx}(x, k')] \right. \\ \left. + h(x)^3 F_x(x, k) F_{xx}(x, k') - h(x)^3 F_x(x, k') F_{xx}(x, k) \right]_{-1}^1 \end{aligned} \quad (2.46)$$

となる。ここで、さらに、境界条件 (2.29) の第 1 式が成立するものとする、 $F_{xx}(\pm 1, k) = F_{xx}(\pm 1, k') = 0$ となるので、

$$\int_{-1}^1 h(x) F(x, k) F(x, k') dx = \frac{h(1)^3}{\omega^2 - \omega'^2} \left[F(x, k') F_{xxx}(x, k) - F(x, k) F_{xxx}(x, k') \right]_{-1}^1 \quad (2.47)$$

となる。ここで、 $(d/dx)[h(x)^3 F_{xx}(x)]|_{x=\pm 1} = h(1)^3 F_{xxx}(\pm 1)$ となることを用いた。さらに、この式右辺の大括弧中は奇関数であることから

$$\int_{-1}^1 h(x) F(x, k) F(x, k') dx = \frac{2h(1)^3}{\omega^2 - \omega'^2} \left[F(1, k') F_{xxx}(1, k) - F(1, k) F_{xxx}(1, k') \right] \quad (2.48)$$

となる。ここで、最後の条件である (2.29) の第 2 式が成立して、 k, k' が固有値 $k_n, k_{n'}$ になると、右辺大括弧中がゼロとなるので、もし、 $k_n \neq k_{n'}$ のときは、異なる固有値に属する固有関数同士の直交性が

$$\int_{-1}^1 h(x) F(x, k_n) F(x, k_{n'}) dx = 0, \quad n \neq n' \quad (2.49)$$

と求められる。同じ固有値になるときは、(2.48) 式の右辺は $0/0$ の不定形となるので、先に $k' = k_n$ とおき、その後で、 $k \rightarrow k_n$ の極限をとる。すなわち、(2.35) の第 1 式を用いて ω を k で表し、l'Hopital の定理を使うと固有関数の直交性の式

$$\int_{-1}^1 h(x) F(x, k_n) F(x, k_{n'}) dx = N_{F,n}^2 \delta_{n,n'}, \quad N_{F,n}^2 = \frac{8h_0(1+\alpha)^3}{\alpha^4 k_n^3} \left[\partial_k F_{xxx}(1, k) \right]_{k=k_n} F(1, k_n) \quad (2.50)$$

を得る。ここに、 $N_{F,n}$ は正規化定数で、 $F(x, k_n)/N_{F,n}$ が正規化された固有関数となる。

同様に、奇関数 $G(x, k_n)$ 同士の直交式

$$\int_{-1}^1 h(x) G(x, k_n) G(x, k_{n'}) dx = N_{G,n}^2 \delta_{n,n'}, \quad N_{G,n}^2 = \frac{8h_0(1+\alpha)^3}{\alpha^4 k_n^3} \left[\partial_k G_{xxx}(1, k) \right]_{k=k_n} G(1, k_n) \quad (2.51)$$

も得られ、 $N_{G,n}$ が正規化定数となる。

2.4 数値計算例

以下では数式処理ソフト Maxima を使って、(2.39) (2.41) で定義する固有値方程式 $\Lambda_F(k) = 0$, $\Lambda_G(k) = 0$ を解いてみる． $\Lambda_F(k) = 0$ から求めた解を小さい方から $k_0, k_2, k_4, \dots$ と偶数番号を付け、また、 $\Lambda_G(k) = 0$ から求めた解を小さい方から $k_1, k_3, k_5, \dots$ と奇数番号を付ける．証明はしていないが、こうして求めた固有値の大小関係は、 $k_0 < k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < \dots$ となる．また、鍵盤の厚さを決める (2.9) 式に含まれる α は、鍵盤の中央部よりも端の方が厚くなる時は正であるが、逆に端の方が中央部よりも薄くなる時は負となる．しかし、この値は (2.16) 式で見るように分母にも含まれるのでゼロであってはならない．結局、 α のとり得る範囲は、 -1 より大きく、かつ、ゼロでないとなる．ここでは、 $\alpha = -0.50, -0.75, 0.25, 0.50, 0.75$ の 5 通りに対し、Maxima を使って求めた固有値 k_n の値を $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ の 6 個について小数 4 桁の精度で挙げると、

$$\begin{array}{llllll}
 \alpha = -0.50 & \text{に対し} & k_n = & 9.3436, & 14.1388, & 19.4555, & 24.5928, & 29.9568, & 35.1952 \\
 \alpha = -0.75 & \text{に対し} & k_n = & 6.2808, & 8.8463, & 11.9471, & 14.8231, & 17.9503, & 20.9392 \\
 \alpha = 0.25 & \text{に対し} & k_n = & 19.0865, & 32.7773, & 46.1900, & 59.6504, & 72.9516, & 86.3425 \\
 \alpha = 0.50 & \text{に対し} & k_n = & 9.6266, & 17.0181, & 24.1261, & 31.2505, & 38.2341, & 45.2975 \\
 \alpha = 0.75 & \text{に対し} & k_n = & 6.4712, & 11.7359, & 16.7331, & 21.7183, & 26.5793, & 31.5109
 \end{array} \quad (2.52)$$

という値になる．この数値で見るように α の値が、負の側で大きくなると、 k_n の値は小さくなるが、 α が正になると k_n の値は一気に大きくなり、また、 α が大きくなるにつれ k_n は、小さくなっていく．これは α の値が大きくなると振動する部分の質量が増えるので振動し難くなるためと考えられる．

固有値 k_n が決まると (2.35) の第 1 式から、 ω_n が

$$\omega_n = \frac{h_0 \alpha^2}{4} k_n^2 \quad (2.53)$$

と決まるが、これから、高調波の振動数の基本波に対する比は

$$\frac{\omega_n}{\omega_0} = \left(\frac{k_n}{k_0} \right)^2 \quad (2.54)$$

となる． k_n は 1 個のパラメータ α のみで決まるので、この比の値も α のみで決まることになる．(2.52) 式からこの比の値を求めてみると、 $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ につき、

$$\begin{array}{llllll}
 \alpha = -0.50 & \text{に対し} & \omega_n/\omega_0 = & 1, & 2.2897, & 4.3356, & 6.9276, & 10.2791, & 14.1884 \\
 \alpha = -0.75 & \text{に対し} & \omega_n/\omega_0 = & 1, & 1.9837, & 3.6181, & 5.5698, & 8.1677, & 11.1142 \\
 \alpha = 0.25 & \text{に対し} & \omega_n/\omega_0 = & 1, & 2.9491, & 5.8565, & 9.7672, & 14.6087, & 20.4641 \\
 \alpha = 0.50 & \text{に対し} & \omega_n/\omega_0 = & 1, & 3.1251, & 6.2809, & 10.5382, & 15.7744, & 22.1411 \\
 \alpha = 0.75 & \text{に対し} & \omega_n/\omega_0 = & 1, & 3.2890, & 6.6862, & 11.2637, & 16.8700, & 23.7110
 \end{array} \quad (2.55)$$

という値になる．ここで、重要なことは、高調波の振動数が一番低い基本波の整数倍になることである．もし、そうでないときは、鍵盤から不協和音がでてしまう．この中で、整数倍に近いのは、 $\alpha = -0.75$ のときの第 1 高調波の振動数は基本波のほぼ 2 倍になっている．もう一つは、 $\alpha = 0.25$ のときの第 1 高調波、第 2 高調波の振動数が基本波のほぼ、3 倍、6 倍になっている．

α の値をもう少し小刻みに変化させてみるとより整数倍に近い値がでるかもしれない．そこで、 $\alpha = 1/3 = 0.333\dots$ として固有値方程式を解いてみると、

$$\begin{array}{llllll}
 k_n = & 14.3569, & 24.9057, & 35.1689, & 45.4690, & 55.6163, & 65.8499 \\
 \omega_n/\omega_0 = & 1, & 3.0093, & 6.0005, & 10.0301, & 15.0066, & 21.0372
 \end{array} \quad (2.56)$$

となって、実に、第1高調波から第5高調波まで、ほぼ、3倍、6倍、10倍、15倍、21倍と整数に近い値になる。

ここで、ピアノの中央「ラ」の音(440Hz)をだすための鍵盤サイズを求めてみよう。ここでは、基本波のみを問題とするので、(2.53)式で $n=0$ とし、 α として、(2.56)式を求めた $\alpha=1/3$ 、および、そこでの k_0 を用いることにして、

$$\omega_0 = \frac{h_0}{36} k_0^2 \quad (2.57)$$

となる。これは無次元化された角振動数なので、元に戻すには、まず、 h_0 を元の h_0/ℓ とし、(2.6)式で定義した時間の単位 $\tau = \ell/c$ で割る必要がある。さらに、 2π で割ることで振動数 ν となる。すなわち、振動数は

$$\nu = \frac{h_0 c}{36 \times 2\pi \ell^2} k_0^2 \quad (2.58)$$

となるので、これから ℓ を求め2倍して鍵盤の長さにとると、

$$2\ell = \frac{k_0}{3} \sqrt{\frac{h_0 c}{2\pi \nu}} \quad (2.59)$$

となる。後は、 h_0 と c を決めなければならない。ここでは、鍵盤中央部の一番薄いところでの厚さ h_0 を、適当ではあるが、

$$h_0 = 1\text{cm} = 0.01\text{m} \quad (2.60)$$

とし、速度 c は鍵盤を松材で作るものとして、ネットで調べた Young 率 E 、および、密度 ρ

$$E = 10,790\text{MPa}, \quad \rho = 0.63\text{g/cm}^3 = 630\text{kg/m}^3 \quad (2.61)$$

から、(2.6)式で定義した速度 c は

$$c = \sqrt{\frac{E}{12\rho}} = 1,194.675\text{m/s} \quad (2.62)$$

となる。これら、 h_0 、 c の値、および、振動数 $\nu = 440\text{Hz}$ 、 $k_0 = 14.3569$ を (2.59) 式に代入して、鍵盤の長さが

$$2\ell = \frac{14.3569}{3} \sqrt{\frac{0.01 \times 1,194.675}{2\pi \times 440}} = 0.31458\text{m} = 31.458\text{cm} \quad (2.63)$$

ともっともらしい値が得られる。この長さの値は「鍵盤打楽器の固有振動(1)」で、厚さが一様で1cmとして求めたときの値30.97cmと、ほぼ同じで、それより僅かに大きい。また、このときの鍵盤の厚さは、中央部の一番薄いところを1cmとしたが、両端の一番厚いところでは、(2.1)式より、

$$h(\ell) = h_0(1 + \alpha) = 1.333 \cdots \text{cm} \quad (2.64)$$

となる。

最後に固有関数も数値的に求めておこう。(2.36)あるいは、(2.37)式で $A=1$ とおき、 k を n 番目の固有値 k_n としてから、各式の第1、第3、第4の3本の式を用いて残りの係数 B, C, D を Maxima で求めると固有関数 $F(x, k_n)$ あるいは、 $G(x, k_n)$ が求められる。その後、前節の正規化係数 $N_{F,n}$ 、 $N_{G,n}$ を求めて正規化された固有関数にする。このときのグラフを、以下の図2に示す。

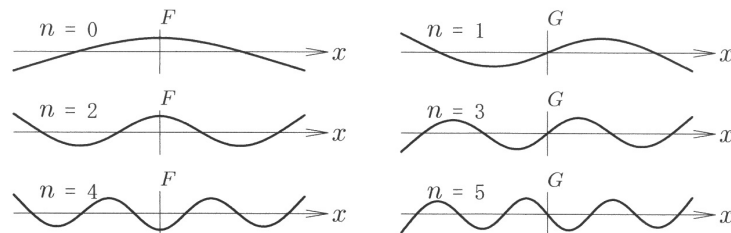


図2 固有関数 $F(x, k_n)$, ($n=0, 2, 4$), $G(x, k_n)$, ($n=1, 3, 5$), $\alpha=1/3$ の場合

このグラフは、4 種の Bessel 関数 J_1 , N_1 , I_1 , K_1 を用いて描かれたものだが、一見したところでは、前回の三角関数、双曲線関数を用いて描かれたものとほとんど変わらない。また、今回数値計算をしていて気づいたことであるが、この図を描くのに Bessel 関数 I_1 , K_1 からの寄与はほとんどなく、99% は J_1 , N_1 からの寄与で決まってしまうことである。

3 おわりに

今回の一番の成果は、(2.56) 式で示した、 $\alpha = 1/3$ のとき、高調波の振動数が基本波のほぼ整数倍になることである。意味はないかもしれないが、この続きで、 $n = 6, 7, 8, 9$ の場合もだしてみると、

$$\begin{aligned} k_n &= 75.9868, & 86.1984, & 96.3302, & 106.5248 \\ \omega_n/\omega_0 &= 28.0126, & 36.0445, & 45.0196, & 55.0527 \end{aligned} \quad (3.1)$$

となって、これもほぼ整数倍とみることができる。しかも、この高調波の振動数の基本波に対する比は、 $n = 0$ から始めると、1 倍、3 倍、6 倍、10 倍、15 倍、21 倍、28 倍、36 倍、45 倍、55 倍、となって、その階差が、2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 となるので、この比の一般項は三角数 $\omega_n/\omega_0 = (n+1)(n+2)/2$ となる。ここまでくると、何か、神秘的な法則性があるのでは、とまで思ってしまうが、実際はどうなのであろうか。

[謝辞]

今回の計算がこれほどまでに解析的にことが進んだのは、初めに紹介したように、「管楽器で使われるリードの固有振動 (1)」を書いたときに、京都大学名誉教授の中西襄先生に、ここで扱った 4 階の微分方程式 (2.13) が Bessel 関数を用いて解けることを教えていただいたおかげである。この点で、先生に心から感謝申し上げる。

また、先生に今回の原稿を見てもらったところ、この「おわりに」のところで書いた三角数というのは、50 年ほど前に、Bethe-Salpeter 方程式における Wick-Cutkosky モデルの研究をやっていたことがあるが、そのときも、固有値に三角数がでてきたので、解析的に同じ事情になっているのではというご指摘をいただいた。私は昔のことですっかり忘れていたが、先生はよく覚えておられることに感心してしまう。しかし、今回のものは厳密解ではなく、近似的にでてきた三角数なので、これを結びつけるのは至難のわざになりそうである。

「Ostrogradski の不安定性」 入門

江沢 康生^{*1}

An introduction to the Ostrogradski Instability

Yasuo EZAWA^{*2}

1 はじめに

系のラグランジアンが一般化座標の 2 階以上の時間微分を含む理論は高階微分の理論といわれる。このような理論の正準形式は Ostrogradski による方法 (以下では Ost 法という)[1] が標準的と考えられている。この方法は、当然ながら、系が平坦な空間にある場合に定式化された。数学的には高階微分方程式を解く場合に、未知数を増やして微分の階数を下げるというよく用いられる方法である。我々はこの方法をアインシュタイン重力理論を一般化した $f(R)$ 型重力理論 (R は Ricci のスカラー曲率) に拡張した [2]。ところで、Ost 法にはハミルトニアンに底がないという、Ostrogradski の不安定性と言われる問題があることが知られている。文献 [3] により解説がある。しかし、我々は [2] ではこの問題を扱わなかった。ここでは、この問題を宇宙論との関係で、考えてみたい。§2、§3 でこの問題についての [3] の解説を古典論、量子論に分けて紹介する。文献 [3] では系が縮退していない (速度位相空間から位相空間への写像の逆がある場合 ; 縮退がない場合) を扱っているが、§4 では縮退がある場合を紹介する。§5 では、宇宙論への応用を $f(R)$ 型重力理論について考える。§6 では、まとめを与える。

2 Ost 法の問題について

2.1 古典論

この問題の [3] の解説の概要は以下のようなものである。

簡単のため、自由度が 1 の場合、すなわち、ラグランジュ形式で一般化座標が 1 個 x の場合を考える。ラグランジアン L は x の n 階微分 $x^{(n)}$ までを含むとする ;

$$L = L(x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}). \quad (2.1)$$

ラグランジュ方程式は

$$\sum_{i=0}^n \left(-\frac{d}{dt} \right)^i \frac{\partial L}{\partial x^{(i)}} = 0 \quad (2.2)$$

となる。これは $2n$ 階の微分方程式であり、解は $2n$ 個の積分定数で指定される。すなわち、系の状態は $2n$ 個の変数

$$(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n-1)}) \quad (2.3)$$

で指定される。従って、速度位相空間 (状態空間) は (2.3) を座標とする $2n$ 次元空間である。

^{*1} 元愛媛大学理学部

^{*2} ytar@hi2.enjoy.ne.jp

2.1.1 正準形式

位相空間の座標を $(X_1, \dots, X_{n-1}, X_n; P_1, \dots, P_n)$ とすると

$$X_i \equiv x^{(i-1)}; \quad P_i \equiv \sum_{j=i}^n \left(-\frac{d}{dt}\right)^{j-i} \frac{\partial L}{\partial x^{(j)}}, \quad (2.4)$$

と定義される。ここで、 P_1 は x の時間微分としては $x^{(2n-1)}$ まで含む。また、特に

$$P_n = \frac{\partial L}{\partial x^{(n)}} = \frac{\partial}{\partial \dot{X}_n} L(X_1, \dots, X_n, \dot{X}_n). \quad (2.5)$$

従って、速度位相空間の座標 (2.3) を用いて Ostrogradski 変換は

$$\begin{aligned} & \{(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n-1)}; L(x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}))\} \\ & \rightarrow \{(X_1, X_2, \dots, X_n; P_1, \dots, P_n); H(X_1, \dots, X_n; P_1, \dots, P_n)\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

ここで、ハミルトニアン H は通常のように

$$H \equiv \sum_{i=1}^n P_i \dot{X}_i - L \quad (2.7)$$

と定義される。

2.1.2 非縮退の場合

(2.5) が $\dot{X}_n$ について解ける場合は非縮退 (non-singular) とされる。このとき；

$$\dot{X}_n \equiv f(X_1, \dots, X_n; P_n). \quad (2.8)$$

と記す。右辺に含まれる運動量は P_n のみであることを注意。そうすると

$$\begin{cases} P_n = \frac{\partial L}{\partial x^{(n)}} & \text{at } x^{(i-1)} = X_i (i = 1 \dots, n), x^{(n)} = f, \\ L = L(X_1, \dots, X_n; f). \end{cases} \quad (2.9)$$

(2.7) を書き直すと

$$H = \sum_{i=1}^{n-1} P_i X_{i+1} + P_n f - L(X_1, \dots, X_n; f). \quad (2.10)$$

(2.10) は $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ については linear $\Rightarrow H$ は底なし。このことは **Ostrogradski** の不安定性と言われる。

2.1.3 変分原理

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L, \quad \delta L = \delta \left(\sum_{i=1}^{n-1} P_i X_{i+1} + P_n f - H \right). \quad (2.11a)$$

よって

$$\delta S = \sum_{i=1}^n \left[P_i \cdot \delta X_i \right]_{t_1}^{t_2} + \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\left(\dot{X}_i - \frac{\partial H}{\partial P_i} \right) \delta P_i - \left(\dot{P}_i + \frac{\partial H}{\partial X_i} \right) \delta X_i \right]. \quad (2.11b)$$

境界条件を

$$\delta X_i(t_1) = \delta X_i(t_2) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.12)$$

とすると $\delta X_i, \delta P_i$ は独立だから $\delta S = 0$ より

$$\dot{X}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial X_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.13)$$

従って、正準方程式が成立する。

物理量 $F(X_i, P_j)$ の変化率

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial X_i} \dot{X}_i + \frac{\partial F}{\partial P_i} \dot{P}_i \right) = \{F, H\}_{PB}. \quad (2.14)$$

PB はポアソン括弧を表す。従って

$$\frac{dH}{dt} = 0. \quad (2.15)$$

これはエネルギーが保存されることを示す。

2.2 正準変換

変数変換

$$(X_i, P_i) \rightarrow (X'_i, P'_i) \equiv (P_i, -X_i) \quad (2.16)$$

が正準変換であることは知られている。即ち、次の関係がある；

$$\{X'_i, P'_j\}_{PB} = \{P_i, -X_j\}_{PB} = -\{P_i, X_j\}_{PB} = \{X_j, P_i\}_{PB} = \delta_{ij}. \quad (2.17)$$

このときハミルトニアンは (2.10) を用いて

$$H = - \sum_{i=1}^{n-1} P'_{i+1} X'_i + X'_n \cdot f' - L(-P'_1, \dots, -P'_n; f'). \quad (2.18)$$

ここで

$$f' = f(-P'_1, \dots, -P'_n; X'_n). \quad (2.19)$$

よって、 P'_i についての振る舞いは L の関数形による。

上のことは、適当な正準変換をすれば Ost 不安定性が避けられることがあることを意味するのであろうか。通常、最初のラグランジアンは実験から予測される対称性を取り入れた変数を用いて決められる。変換後の変数を用いた予言の検証はうまくできるであろうか。高階微分理論で記述される現象を見出すことをしなければならないが。

3 正準量子化

正準量子化は通常のように正準変数の対 (X_i, P_j) に対して

$$[X_i(t), P_j(t)] = i\delta_{ij} \quad (3.1)$$

のようになされる。古典論における不安定性は $P_i X_{i+1}$ の項から出るので正準量子論でも問題は解決しない。

3.1 振動子の例

エネルギー値 (準位) に底がないことへの処方振動子の場合に考えてみよう。

3.1.1 ラグランジュ形式

ラグランジアンが

$$L = -\frac{\epsilon m}{2\omega^2} \ddot{x}^2 + \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2} x^2, \quad (3.2)$$

で与えられる場合を考えよう。運動方程式は

$$\frac{\epsilon}{\omega^2}x^{(4)} + \ddot{x} + \omega^2x = 0, \quad (3.3)$$

となり、一般解は

$$\begin{cases} x(t) = C_+ \cos(k_+ t) + S_+ \sin(k_+ t) + C_- \cos(k_- t) + S_- \sin(k_- t), \\ k_{\pm} \equiv \omega \sqrt{\frac{1 \mp \sqrt{1-4\epsilon}}{2\epsilon}}. \end{cases} \quad (3.4)$$

$C_{\pm}, S_{\pm}$ は積分定数で初期値 $x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0, x_0^{(3)}, x_0^{(4)}$ で表せる。

3.1.2 正準形式

一般化座標と共役運動量はそれぞれ

$$X_1 \equiv x, \quad X_2 \equiv \dot{x}; \quad P_1 = m\dot{x} + \frac{\epsilon m}{\omega^2}x^{(3)}, \quad P_2 = -\frac{\epsilon m}{\omega^2}\ddot{x}. \quad (3.5)$$

また

$$A \equiv \ddot{x} = -\frac{\omega^2}{\epsilon m}P_2, \quad L = -\frac{\epsilon m}{2\omega^2}A^2 + \frac{m}{2}X_2^2 - \frac{m\omega^2}{2}X_2^2 - \frac{m\omega^2}{2}X_1^2. \quad (3.6)$$

ハミルトニアンは

$$\begin{cases} H = P_1 X_2 - \frac{\omega^2}{2\epsilon m}P_2^2 - \frac{m}{2}X_2^2 + \frac{m\omega^2}{2}X_1^2 \\ = \frac{m}{2}\sqrt{1-4\epsilon}k_+^2(C_+^2 + S_+^2) - \frac{m}{2}\sqrt{1-4\epsilon}k_-^2(C_-^2 + S_-^2). \end{cases} \quad (3.7)$$

これはマイナスモードのエネルギーが確かに負であることを示している。

3.2 量子論の「改良」

古典論のエネルギーに底がないことは正準量子論でも改良されなかった。すなわち、基底状態はない。この状況をおもったらしい状況に「改良」出来ないであろうか。

次のような「空の」状態 $|\Omega\rangle$ (波動関数は $\Omega(X_1, X_2)$ とする) を考える。

正エネルギー、負エネルギーの消滅演算子を α_+, α_- とする；

$$\alpha_+|\Omega\rangle = \alpha_-|\Omega\rangle = 0. \quad (3.8)$$

これらの消滅演算子を求めるために、一般解 (3.4) を書き直すと

$$x(t) = \frac{1}{2} \left[(C_+ + iS_+)e^{-ik_+t} + (C_+ - iS_+)e^{ik_+t} + (C_- + iS_-)e^{-ik_-t} + (C_- - iS_-)e^{ik_-t} \right]. \quad (3.9)$$

消滅演算子とこれらの係数との関係は

$$\alpha_+ \approx C_+ + iS_+, \quad \alpha_- \approx C_- - iS_- \quad (3.10)$$

(3.9) の $x(t)$ およびその 3 階までの微分係数から消滅演算子は次のように求まる；

$$\begin{cases} \alpha_+ \approx \frac{mk_+}{2}(1 + \sqrt{1-4\epsilon})X_1 - iP_1 - k_+P_2 - \frac{im}{2}(1 - \sqrt{1-4\epsilon})X_2 \\ \alpha_- \approx \frac{mk_-}{2}(1 - \sqrt{1-4\epsilon})X_1 + iP_1 - k_-P_2 + \frac{im}{2}(1 + \sqrt{1-4\epsilon})X_2. \end{cases} \quad (3.11)$$

(3.10)、(3.11) で近似は定数因子による。 $|\Omega\rangle$ の波動関数 $\Omega(X_1, X_2)$ は (3.8)、(3.11) から次のように得られる；

$$\Omega(X_1, X_2) = N \exp \left[-\frac{m\sqrt{1-4\epsilon}}{2(k_+ + k_-)}(k_+ k_- X_1^2 + X_2^2) - im\sqrt{\epsilon} X_1 X_2 \right]. \quad (3.12)$$

(3.12) は確かに規格化可能で、波動関数の条件を満たす。ヒルベルト空間の (規格化された) 完全系は

$$|N_+, N_-\rangle = \frac{(\alpha_+^\dagger)^{N_+} (\alpha_-^\dagger)^{N_-}}{\sqrt{N_+!} \sqrt{N_-!}} |\Omega\rangle. \quad (3.13)$$

ハミルトニアンのは作用は

$$H|N_+, N_-\rangle = (N_+ k_+ N_- k_-) |N_+, N_-\rangle \quad (3.14)$$

となる。よって、古典論の負エネルギーモードは負エネルギー状態に対応する。従って

『古典論と同様に、ハミルトニアンの値には下限がない。』

4 縮退

4.1 運動方程式

系が縮退している場合には (3) は $\dot{X}_n$ について解けないで、位相空間における拘束条件 (1 次拘束条件；運動量の定義、i.e. 一般化されたルジャンドル変換、から生じる) を与える；

$$\phi(X_i, P_j) = 0, \quad (4.1)$$

とする。ただし、 P_j は P_n のみが含まれる [4]。よって

$$P_n = \Phi(X_i). \quad (4.1)'$$

拘束系に対する変分原理の復習；非縮退の場合と同様に

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\dot{X}_i - \frac{\partial H}{\partial P_i} \right) \delta P_i - \left(\dot{P}_i + \frac{\partial H}{\partial X_i} \right) \delta X_i \right] dt = 0.$$

ところが、拘束条件 (4.1) のため、 $\delta X_i, \delta P_i$ は独立ではないので正準運動方程式 (2.13) は成立しない。しかし、(4.1) の変分から

$$\delta \phi = \frac{\partial \phi}{\partial X_i} \delta X_i + \frac{\partial \phi}{\partial P_i} \delta P_i = 0. \quad (4.2)$$

(4.2) に任意関数 $v(X_j, P_j)$ を掛けて δS の被積分関数から引くと

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\dot{X}_i - \frac{\partial H}{\partial P_i} - v \frac{\partial \phi}{\partial P_i} \right) \delta P_i - \left(\dot{P}_i + \frac{\partial H}{\partial X_i} + v \frac{\partial \phi}{\partial X_i} \right) \delta X_i \right] dt = 0. \quad (4.3)$$

ここで、 v を $\delta P_i, \delta X_i$ の係数のどれか 1 つが 0 となるように決めると、他の変分は独立になるから、結局全ての係数が 0 となる。すなわち

$$\dot{X}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i} + v \frac{\partial \phi}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = - \left(\frac{\partial H}{\partial X_i} + v \frac{\partial \phi}{\partial X_i} \right). \quad (4.4)$$

いま

$$H_T \equiv H + v\phi, \quad (4.5)$$

とおくと、運動方程式は次の形に表せる；

$$\dot{X}_i = \{X_i, H_T\}_{PB}, \quad \dot{P}_i = -\{P_i, H_T\}_{PB}. \quad (4.6)$$

4.2 ハミルトニアン「構造」

(2.5) が $\dot{X}_n$ について解けないとき

$$\frac{\partial^2 L}{(\partial x^n)^2} = 0, \quad (4.7)$$

が成り立つ*3。よって

$$L = L|_{\dot{X}_n=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_n} \dot{X}_n. \quad (4.8)$$

従って、ハミルトニアンは次のように表せる

$$H = H_0 + v\varphi. \quad (4.9)$$

ここで

$$H_0 \equiv \sum_{i=1}^{n-1} P_i \dot{X}_i - L|_{\dot{X}_n=0}, \quad v \equiv \dot{X}_n, \quad \varphi \equiv P_n - \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_n}. \quad (4.10)$$

このとき

$$\begin{cases} \{X_i, H\}_{PB} = \{X_i, H_0\}_{PB} + \{X_i, v\varphi\}_{PB} = \frac{\partial H_0}{\partial P_i} + v \frac{\partial \varphi}{\partial P_i} = \dot{X}^i, \\ \{P_i, H\}_{PB} = \{P_i, H_0\}_{PB} + \{P_i, v\varphi\}_{PB} = \frac{\partial H_0}{\partial P_i} + v \frac{\partial \varphi}{\partial P_i} = -\dot{P}_i, \end{cases} \quad (4.11)$$

となる。これと (4.5)、(4.6) を比べると、次の対応がある

$$H_T \leftrightarrow H, \quad H \leftrightarrow H_0$$

このようなことから、 H_0 を正準 (canonical) ハミルトニアンということがある [4]。

5 宇宙論への応用

$f(R)$ 型重力理論で宇宙を記述する場合を考えよう。アインシュタインの重力理論では、未知の物質の導入が必要だったり、量子論にも問題がありそうである (古典論では通常は部分積分で境界項を除き、高階微分理論ではなくする)。ここでは、宇宙は宇宙原理を満たす一様等方宇宙で、更に平坦な場合とする。このとき、作用積分は

$$S = \int d^4x \mathcal{L}_G = \int d^4x \sqrt{-g} f(R). \quad (5.1)$$

R は Ricci スカラー曲率。計量テンソルは

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \sum_{k=1}^3 (dx^k)^2, \quad (5.2)$$

と表せる。このとき R は

$$R(t) = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 \right), \quad H \equiv \frac{\dot{a}}{a}; \text{ Hubble parameter.} \quad (5.3)$$

*3 自由度が N の系の場合、 $L = L(x_i, \dot{x}_i, \dots, x_i^{(n)}), (i = 1, 2, \dots, N)$ と表せるが $P_i^n \equiv \frac{\partial L}{\partial x_i^{(n)}}(x_i, \dot{x}_i, \dots, x_i^{(n)})$ が $x_i^{(n)}$ について

解けないのは一般化された Hess 行列 $A_{ij} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial x_i^{(n)} \partial x_j^{(n)}}$ が正則でなく rank が $n - r (r > 0)$ の場合で、 r 個の拘束条件が生じる。

([4] 参照)

よって、 $\mathcal{L}_G = a^3(t)f(R(t))$ と表され、ラグランジアンは次のようになる；

$$L_G = \int d^3x \mathcal{L}_G = V a^3 f(R) \equiv V \bar{L}_G, \quad \text{i.e.} \quad \bar{L}_G = a^3 f(R). \quad (5.4)$$

ここで、 $V = \int d^3x$ で、無限大のこともある。この系の力学変数は $a(t)$ だけなので、 $\bar{L}_G$ をラグランジアンとしてよい。

ここで、一般化座標の記号を次のようにする

$$a \equiv X_1, \quad \dot{a} \equiv X_2. \quad (5.5)$$

スカラー曲率は次のようになる

$$R = 6 \left(\frac{\dot{X}_2}{X_1} + H^2 \right), \quad H \equiv \frac{X_2}{X_1} \quad (5.6)$$

(2.5)、(2.4) より

$$\begin{cases} P_2 \equiv \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{X}_2} = 6(X_1)^2 f'(R) \\ P_1 \equiv \sum_{j=1}^2 \left(-\frac{d}{dt} \right)^{j-1} \frac{\partial \bar{L}}{\partial X^{(j)}} = -36 \left(X_1 \ddot{X}_2 + X_2 \dot{X}_2 - 2H(X_2)^2 \right) f''(R). \end{cases} \quad (5.7)$$

(5.7) の第 1 式から

$$R = f'^{-1}(P_2/6(X_1)^2) \equiv \phi(P_2/6(X_1)^2). \quad (5.8)$$

よって

$$\dot{X}_2 = X_1 \left(\frac{1}{6} \phi(P_2/6(X_1)^2) - H^2 \right). \quad (5.9)$$

また、第 2 式から

$$-\frac{P_1}{36f''(R)} = X_1 \ddot{X}_2 + X_2 \dot{X}_2 - 2H(X_2)^2 = X_1 \ddot{X}_2 + X_2 \left(\frac{1}{6} X_1 \phi - 3H X_2 \right).$$

よって

$$\ddot{X}_2 = - \left[\frac{1}{36} \frac{P_1}{X_1 f''(\phi)} + X_2 \left(\frac{1}{6} \phi - 3H^2 \right) \right]. \quad (5.10)$$

ハミルトニアンは次のように表せる；

$$\bar{H}_G = P_1 \dot{X}_1 + P_2 \dot{X}_2 - \bar{L}_G = P_1 X_2 + P_2 X_1 \left(\frac{1}{6} \phi - H^2 \right) - X_1^3 f(R) \quad (5.11)$$

右辺で、 P_1 は第 1 項にのみ含まれる。従って、ハミルトニアンに下限はない。(5.1) は一般の時空に対しては、縮退した系となるが、宇宙原理を採用して、計量テンソルを (5.2) に採ると、自由度 1 の非縮退系となる (拘束条件を全て解いたことと同じ)。

縮退した一般の時空の場合 (すべての拘束条件は溶けない場合) も興味深い。

6 おわりに

高階微分理論における Ostrogradski の不安定性について、Woodard の解説 [3] を基に紹介し、宇宙論への応用例を取り上げた。後者については量子論には触れなかった。この例の量子論について、Wheeler-DeWitt 方程式を導くには、(5.2) の右辺第 1 項に lapse 関数 $N(t)$ を含めたほうが良い。一般の時空の場合には、我々は標準的

と思われる研究 ([2] の 3 番め) をしたが、この研究では不安定性については触れなかった。他にも不安定性の問題の研究はなされているが、未だ open な部分が多いと思われる [6]。

また、物理学の基礎的な理論は Ostrogradski の不安定性を持たないという制限をつけるとよいのではないかと考える人もいる。ニュートンの運動方程式、マックスウェル方程式、アインシュタイン方程式はそうなっているのではないかというのである。

さらに、演算子の積の順序も関係することも考えられる。この関係についてはこれまで研究されてないと思われる。Ost 法を用いない場合の積の順序については我々はいくつかの例について調べたので [5]、この場合についても今後調べようと思っている。

この場合はもちろん量子論なので、Wheeler-DeWitt 方程式を出すには、(5.2) の右辺第 1 項にラプラス関数 $N(t)$ の 2 乗を入れたほうが良いであろう。

参考文献

- [1] Ostrogradski M., *Mem. Acad. Sci. St. Petersburg*, **VI** 4(1850), 385
- [2] Ezawa Y., Iwasaki H., Ohkuwa Y., Watanabe S., Yamada N. and Yano T.,
Class. Quantum Grav., **23**(2006), 3205 ; *Nuovo Cim.*, **125B**(2010), 1039
Ezawa Y. and Ohkuwa Y., “The Equivalence Theorem in the Generalized Gravity of
 $f(R)$ -type Gravity and Canonical Formalism” in a book “Advances in
Quantum Theory”(2012), ed. Cotaescu I. I. (InTech Open Access Publisher);
arXiv:1204.2396[gr-qc]
Ohkuwa Y. and Ezawa Y., *Eur. Phys. J. Plus*, **130**(2015), 77; arXiv:1412.4475[gr-qc]
- [3] Woodard R.P., *Scholarpedia*, **10**(2015), 32243; arXiv:1506.02210[hep-th]
- [4] Saito Y., Sugano R., Ohta T., Kimura T., *J.Math.Phys.*, **30**(1989), 1122
- [5] Ohkuwa Y., Faizal M., Ezawa Y., *Ann. Phys.*, **365**(2016), 54; *ibid.* **384**(2017), 105
- [6] Deser S., Tekin B., *Phys.Rev.*, **D67**(2003), 084009; *ibid.* **D75**(2007), 084032
arXiv:hep-ph/0212292
Bender C.M., Mannheim P.D., *Phys.Rev.Lett* ,**100**(2008), 110402
arXiv:0706.0207[hep-th]
Chen T., Fasiello M., Lim E. A., Tolly A.J., *JCAP*, **1302**
arXiv:1209.0583[hep-th]
Motohashi H. and Suyama T. *Phys.Rev.*, **D91**(2015), 085009;
arXiv:1411.3721[physics.class-ph]

Pauli 行列の導出

矢野 忠^{*1}

Derivation of Pauli Matrices

Tadashi YANO^{*2}

1 はじめに

小著『四元数の発見』 [1] の「四元数と SU(2)」の章を書いたときに、Pauli 行列の求め方についての文献をあげたが、その求め方については述べなかった。これは Pauli 行列はよく知られたものであり、いまさらその導出をいちいち述べる必要はないだろうと、そのときは思ったからであった。

しかし、よく考えてみれば、世の中に事実としてはよく知られているが、その導出法がどうだったかあまり知らないものもある。この Pauli 行列もその一つかもしれないと思いはじめた。

それでこのエッセイでは朝永振一郎『角運動量とスピン』 [2] にしたがって、Pauli 行列を求めてみよう。

2 スピン角運動量の交換関係

量子力学での軌道角運動量ベクトル $\mathbf{L}$ の成分 L_x, L_y, L_z の間には

$$L_x L_y - L_y L_x = i\hbar L_z, \quad (2.1)$$

$$L_y L_z - L_z L_y = i\hbar L_x, \quad (2.2)$$

$$L_z L_x - L_x L_z = i\hbar L_y \quad (2.3)$$

の交換関係が存在する。

電子のスピン角運動量を $\mathbf{s}$ と表し、そのそれぞれの成分を s_x, s_y, s_z とする。この s_x, s_y, s_z の間にも (2.1)-(2.3) と同様な交換関係

$$s_x s_y - s_y s_x = i\hbar s_z, \quad (2.4)$$

$$s_y s_z - s_z s_y = i\hbar s_x, \quad (2.5)$$

$$s_z s_x - s_x s_z = i\hbar s_y \quad (2.6)$$

が存在する^{*3}。

電子のスピン角運動量の 2 乗 s^2 は

$$s^2 = s(s+1)\hbar^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \hbar^2 \quad (2.7)$$

が成立する。ここで、 $s = \frac{1}{2}$ であり、また (2.7) の $\hbar := \frac{h}{2\pi}$, h = Planck 定数 である^{*4}。

^{*1} 元愛媛大学工学部

^{*2} yanotad@earth.ocn.ne.jp

^{*3} 軌道角運動量には古典的対応があるが、スピン角運動量には古典的対応がない。だから、手がかりとして軌道角運動量のみたす交換関係と同じ交換関係がスピン角運動量に存在すると仮定するのはもっともであろう。

^{*4} 電子にスピン角運動量が必要とされたのは Na 原子の光の D 線が 2 重の線からできているという発見に起因している。詳しい説明は [3] を参照せよ。電子スピンの固有値 s の大きさ ($\hbar$ を除いた) は、スペクトルの本数 $2s+1=2$ から $s=1/2$ と求められる。

s_z の固有値は $\pm\frac{1}{2}\hbar$ であるから

$$s_z^2 = \frac{1}{4}\hbar^2 \quad (2.8)$$

である。同様に

$$s_x^2 = \frac{1}{4}\hbar^2, \quad (2.9)$$

$$s_y^2 = \frac{1}{4}\hbar^2 \quad (2.10)$$

も成立する。

電子のスピン角運動量の 2 乗 $\mathbf{s}^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2$ とスピン角運動量の各成分 s_x, s_y, s_z との間に成り立つ交換関係とその固有状態について述べておこう。

まず (2.4)-(2.6) のスピン角運動量の成分の間の交換関係から、

$$[\mathbf{s}^2, s_x] = [\mathbf{s}^2, s_y] = [\mathbf{s}^2, s_z] = 0 \quad (2.11)$$

が成り立つ。したがって、 $\mathbf{s}^2$ と $s_i, i = x, y, z$ のいずれかの一つとの同時固有状態が存在する。

いまそのいずれかの s_i として s_z をとれば、 $\mathbf{s}^2$ と s_z との同時固有状態が存在する。一度このようにとれば、もう $\mathbf{s}^2$ と s_x との同時固有状態とか、 $\mathbf{s}^2$ と s_y との同時固有状態とかは存在しない。これは (2.4)-(2.6) のスピン角運動量の成分の間の交換関係が存在するからである。

3 s_z の固有関数と s_z の行列

s_z の固有値を $m_s\hbar$ と表し、これを波動関数の変数として用いる。また、 s_z の固有関数を $u(m_s)$ と表す。そうすると

$$s_z u(m_s) = m_s \hbar u(m_s) \quad (3.1)$$

が成り立つ。

m_s は $\frac{1}{2}$ と $-\frac{1}{2}$ の値しかとらないから

$$s_z u\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\hbar u\left(\frac{1}{2}\right), \quad (3.2)$$

$$s_z u\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\hbar u\left(-\frac{1}{2}\right) \quad (3.3)$$

これは s_z をカーネル (核)

$$s_z(m_s, m'_s) = m_s \hbar \delta_{m_s, m'_s} \quad (3.4)$$

をもつ「積分」演算子とみることもできる*5。

ただし、 m_s は連続的な変数ではないので、「積分」の代わりに和を意味する。

$$\begin{aligned} s_z u(m_s) &= \sum_{m'_s} s_z(m_s, m'_s) u(m'_s), \\ &= \sum_{m'_s} m_s \hbar \delta_{m_s, m'_s} u(m'_s), \\ &= m_s \hbar u(m_s) \end{aligned} \quad (3.5)$$

*5 (3.4) からすぐに (3.5) が得られて、これは (3.2), (3.3) をまとめて書いたものとなっている。だから、(3.4) が正しいことがわかる。それでも (3.6) (すなわち (3.4)) の導出がわかりやしくないと感じられるので付録 1 で s_z の別の求め方を述べる。

m_s, m'_s はとびとびの値であるから, m_s, m'_s をそれぞれ行列の行と列を指定する添字と考えることができる.

このとき, カーネル $s_z(m_s, m'_s)$ を

$$s_z(m_s, m'_s) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

と行列の形で表すことができる.

これは (3.4) の m_s, m'_s に $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ を代入すれば,

$$\begin{aligned} s_z(m_s, m'_s) &= \begin{pmatrix} s_z(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & s_z(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \\ s_z(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & s_z(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.7)$$

と求められるからである.

スピン角運動量を (3.7) のような行列とみなせば, 状態を表す関数はベクトルとみなすことができる. すなわち,

$$u(m_s) = \begin{pmatrix} u(\frac{1}{2}) \\ u(-\frac{1}{2}) \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

と表すことができる.

したがって

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(\frac{1}{2}) \\ u(-\frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} u(\frac{1}{2}) \\ -u(-\frac{1}{2}) \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

固有値 $\frac{\hbar}{2}$ に属する固有ベクトルを $\alpha(m_s)$, $-\frac{\hbar}{2}$ に属する固有ベクトルを $\beta(m_s)$ と表せば,

$$s_z \alpha(m_s) = \frac{\hbar}{2} \alpha(m_s) \quad (3.10)$$

$$s_z \beta(m_s) = -\frac{\hbar}{2} \beta(m_s) \quad (3.11)$$

(3.10) の左辺を行列で表せば,

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(\frac{1}{2}) \\ \alpha(-\frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \alpha(\frac{1}{2}) \\ -\alpha(-\frac{1}{2}) \end{pmatrix}$$

となる. これを (3.10) の右辺と等しいとおけば,

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \alpha(\frac{1}{2}) \\ -\alpha(-\frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \alpha(\frac{1}{2}) \\ \alpha(-\frac{1}{2}) \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

であるから,

$$\alpha\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0, \quad (3.13)$$

$$\alpha\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \quad (3.14)$$

が得られる.

これらが正規化されているとすれば,

$$\alpha^*\left(\frac{1}{2}\right) \alpha\left(\frac{1}{2}\right) + \alpha^*\left(-\frac{1}{2}\right) \alpha\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \quad (3.15)$$

が成立するから, これに (3.14) を代入すれば,

$$\left| \alpha\left(\frac{1}{2}\right) \right|^2 = 1 \quad (3.16)$$

が得られる.

したがって

$$\alpha\left(\frac{1}{2}\right) = e^{i\delta}, \delta = \text{実数} \quad (3.17)$$

δ の値は実数ならなんでもよいが, 簡単のために $\delta = 0$ ととれば

$$\alpha\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \alpha\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \quad (3.18)$$

すなわち,

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

となる.

つぎに (3.11) の左辺を行列で表せば

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta(\frac{1}{2}) \\ \beta(-\frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \beta(\frac{1}{2}) \\ -\beta(-\frac{1}{2}) \end{pmatrix}$$

となる. これを (3.11) の右辺と等しいとおけば,

$$\begin{pmatrix} \beta(\frac{1}{2}) \\ -\beta(-\frac{1}{2}) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \beta(\frac{1}{2}) \\ \beta(-\frac{1}{2}) \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

であるから,

$$\beta\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad (3.21)$$

$$\beta\left(-\frac{1}{2}\right) \neq 0 \quad (3.22)$$

が得られる.

正規化されているとすれば,

$$\beta^*\left(\frac{1}{2}\right)\beta\left(\frac{1}{2}\right) + \beta^*\left(-\frac{1}{2}\right)\beta\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \quad (3.23)$$

が成立するから, これに (3.21) を代入すれば,

$$\left|\beta\left(-\frac{1}{2}\right)\right|^2 = 1 \quad (3.24)$$

が得られる.

したがって

$$\beta\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{i\delta}, \delta = \text{実数} \quad (3.25)$$

δ の値を簡単のために $\delta = 0$ ととれば

$$\beta\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \beta\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \quad (3.26)$$

すなわち,

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

となる.

状態ベクトル α と β とは

$$\alpha^* \left(\frac{1}{2} \right) \beta \left(\frac{1}{2} \right) + \alpha^* \left(-\frac{1}{2} \right) \beta \left(-\frac{1}{2} \right) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \quad (3.28)$$

が成り立つから、直交している。

1つの粒子のスピン自由度に対しては、 α と β との2つの固有関数が正規直交完全系をつくっている。
一般に

$$u(m_s) = u \left(\frac{1}{2} \right) \alpha(m_s) + u \left(-\frac{1}{2} \right) \beta(m_s) \quad (3.29)$$

と表される。ここで

$$u \left(\frac{1}{2} \right), u \left(-\frac{1}{2} \right) \quad (3.30)$$

は展開係数である。

4 s_x と s_y とを表す行列

この4節では s_x と s_y とを表す行列を求めよう。このとき

$$s_x = \frac{\hbar}{2} \sigma_x, \quad s_y = \frac{\hbar}{2} \sigma_y, \quad s_z = \frac{\hbar}{2} \sigma_z \quad (4.1)$$

で定義される、 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ を用いるのが便利である。

ここで、 σ_z は (3.6) から

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

で表されている。

(4.1) を (2.4)-(2.6) へ代入すれば

$$\frac{\hbar^2}{4} (\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_x) = i \hbar \frac{\hbar}{2} \sigma_z, \quad (4.3)$$

$$\frac{\hbar^2}{4} (\sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_y) = i \hbar \frac{\hbar}{2} \sigma_x, \quad (4.4)$$

$$\frac{\hbar^2}{4} (\sigma_z \sigma_x - \sigma_x \sigma_z) = i \hbar \frac{\hbar}{2} \sigma_y \quad (4.5)$$

であるから

$$\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_x = 2i \sigma_z, \quad (4.6)$$

$$\sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_y = 2i \sigma_x, \quad (4.7)$$

$$\sigma_z \sigma_x - \sigma_x \sigma_z = 2i \sigma_y \quad (4.8)$$

が得られる。

σ_x と σ_y とを表す行列を求めるために、つぎの3つの関係

$$\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x = 0, \quad (4.9)$$

$$\sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_y = 0, \quad (4.10)$$

$$\sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_z = 0 \quad (4.11)$$

を導き出しておこう。これらを導くには (4.6)-(4.8) を用いる。たとえば、

$$\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_x = 2i \sigma_z$$

を 2 乗すれば,

$$(\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_x)^2 = -4\sigma_z^2$$

となる. これは $\sigma_z^2 = 1$ であることを用いれば

$$\sigma_x \sigma_y \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x \sigma_y \sigma_x - \sigma_x \sigma_y \sigma_y \sigma_x - \sigma_y \sigma_x \sigma_x \sigma_y = -4$$

となる. さらに

$$\sigma_x \sigma_y \sigma_y \sigma_x + \sigma_y \sigma_x \sigma_x \sigma_y = 2$$

であることを用いれば,

$$\sigma_x \sigma_y \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x \sigma_y \sigma_x - \sigma_x \sigma_y \sigma_y \sigma_x - \sigma_y \sigma_x \sigma_x \sigma_y + 2(\sigma_x \sigma_y \sigma_y \sigma_x + \sigma_y \sigma_x \sigma_x \sigma_y) = 0$$

となる. したがって

$$(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x)^2 = 0 \quad (4.12)$$

が得られる. これから

$$\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x = 0 \quad (4.13)$$

が得られる*⁶.

同様にして,

$$(\sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_y)^2 = -4\sigma_x^2, \quad (4.14)$$

$$(\sigma_z \sigma_x - \sigma_x \sigma_z)^2 = -4\sigma_y^2, \quad (4.15)$$

から

$$\sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_y = 0, \quad (4.16)$$

$$\sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_z = 0 \quad (4.17)$$

が得られる.

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

がわかっているから, (4.16),(4.17) を用いて, σ_x, σ_y を求めることができる. それは 5, 6 節で説明しよう.

5 σ_x を求める

求めたい行列 σ_x を

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

と表す.

$$\sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_z = 0 \quad (4.17)$$

に σ_x, σ_z の行列 (4.18) と (5.1) を (4.17) に代入すれば,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 0 \quad (5.2)$$

となる. これらの行列の積の和は

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} = 0 \quad (5.3)$$

*⁶ ここに [2] では編者の原康夫さんが注がつけている. この点については付録 2 で述べよう.

である。したがって

$$\begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & -2d \end{pmatrix} = 0 \quad (5.4)$$

が得られる。これから

$$a = 0, d = 0 \quad (5.5)$$

となる。したがって

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

である。

(5.6) の σ_x を $\sigma_x^2 = 1$ に代入すれば*7,

$$\sigma_x^2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

であり,

$$\begin{pmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix} = 1 \quad (5.8)$$

が成り立つ。すなわち

$$bc = 1 \quad (5.9)$$

となる。

(5.6) の σ_x のエルミート共役演算子 $\sigma_x^\dagger$ は

$$\sigma_x^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & \bar{c} \\ \bar{b} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

である。ここで、 $\bar{b}, \bar{c}$ は b, c の複素共役を表す。

ところで σ_x はエルミート演算子であるので、 $\sigma_x^\dagger = \sigma_x$ が成り立つ。

したがって,

$$\bar{c} = b \quad (5.11)$$

の関係が得られる。(5.11) から

$$c = \bar{b} \quad (5.12)$$

であることがわかる。この c を (5.9) に代入すれば,

$$|b|^2 = 1 \quad (5.13)$$

が得られる。これから

$$b = e^{i\epsilon}, \quad \epsilon = \text{実数} \quad (5.14)$$

である。いま $\epsilon = 0$ ととれば,

$$b = c = 1 \quad (5.15)$$

これを (5.6) に代入すれば

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

と求められる。

*7 $\sigma_x^2 = 1$ は (2.9) に (4.1) の $s_x = \frac{\hbar}{2}\sigma$ を代入すれば得られる。同様に $\sigma_y^2 = 1$ も得られる。

6 σ_y を求める

つづいて、 σ_y も求めよう。このときには (4.16) の $\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_y = 0$ を用いればよい。

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

と表せば、式は σ_x を求めるときとまったく同じとなる。したがって結果もまったく同じとなる。すなわち

$$a = d = 0, \quad (6.2)$$

$$b = e^{i\epsilon}, \quad \epsilon = \text{実数}, \quad (6.3)$$

$$c = \bar{b} \quad (6.4)$$

ここで、 $\epsilon = 0$ とおけば、このとき $b = 1$ となり、これでは σ_y は σ_x と同じになってしまう。これでは σ_y は σ_x との区別がつかなくなってしまう。それでは困る。

ちょっと考え直すと、 ϵ の任意性があるのだから、 $\epsilon = 0$ とはとらないで

$$\epsilon = -\frac{\pi}{2} \quad (6.5)$$

ととれば、

$$b = -i, \quad c = i \quad (6.6)$$

となり、

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

と求められる *8。

求められた行列 σ_x, σ_y は確かに反交換関係

$$\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x = 0 \quad (4.13)$$

を満たしている。

7 おわりに

Pauli 行列 σ の求め方を示す宿題をようやく果たすことができた。

なんでもないところで引っかかって、書き出したのはいいが、書き終わらないという状態が長く続いた。これは『四元数の発見』を書いて以来の私の課題であった。

書き終わるまでにはいろいろな本をのぞいてみたが、なかなか簡単で、かつ疑問を抱かせないような記述はあまり見つけれなかった。結果だけはきちんと書いてあるのに。もっともきちんと書かれていても、長々と書かれると私の方が読み終えられない。

*8 もし $\epsilon = \frac{\pi}{2}$ ととれば、

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

となるが、しかし、Pauli は $\epsilon = -\frac{\pi}{2}$ ととり、 $\epsilon = \frac{\pi}{2}$ は採用しなかった。

8 付録 1 s_z の別の求め方

原康夫『量子力学』[4] にしたがって s_z の別の求め方を述べる．

$$s_z u(m_s) = m_s \hbar u(m_s) \quad (3.5)$$

を用いる．このとき演算子 s_z の正規直交完全な固有ベクトル

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

がわかっているとする*9．

このとき，固有ベクトル α の固有値は $\hbar/2$ であり，固有ベクトル β の固有値は $-\hbar/2$ である．

まず固有ベクトル α について考えれば，

$$\begin{pmatrix} s_z(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & s_z(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \\ s_z(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & s_z(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.3)$$

が成り立つから

$$\begin{pmatrix} s_z(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ s_z(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.4)$$

となる．(8.4) から

$$s_z(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{\hbar}{2}, \quad (8.5)$$

$$s_z(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 0 \quad (8.6)$$

が得られる．

つぎに，固有ベクトル β について考えれば，

$$\begin{pmatrix} s_z(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & s_z(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \\ s_z(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & s_z(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (8.7)$$

が成り立つから

$$\begin{pmatrix} s_z(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \\ s_z(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (8.8)$$

となる．(8.8) から

$$s_z(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = 0, \quad (8.9)$$

$$s_z(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = -\frac{\hbar}{2} \quad (8.10)$$

が得られる．

(8.5),(8.6) と (8.9),(8.10) とから

$$s_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (8.11)$$

*9 この α, β が自明というべきかどうかはわからないが，(3.10), (3.11) を満たしている．

が求められる。

以上、3節とは異なった方法で行列 s_z を求めたが、ここでの行列 s_z の求め方は固有値と固有ベクトルが先にわかっているとすると、数学の行列の固有値問題とは異なっている。

では、数学の行列の固有値問題はどういう手順で解かれるかを述べておく。

行列の固有値問題では、行列がまず与えられる。そして、永年方程式を解いて、固有値が求められる。それからその固有値に対する固有ベクトル求められるという手順で解かれる。

この付録1での演算子行列 s_z の求め方は上に述べた手順とはちがっているという点で違和感がある。その点では3節の議論は上に述べた手順に対する違和感は少ない。しかし、前もって行列 s_z の固有値がわかっている点で、数学での行列 s_z の固有値問題とはちがっている。

数学と物理とではおのずから学問としての性格がちがうということであろう。

9 付録2 (4.12) からの (4.13) の導出

まず、これから示すべき命題を書いておこう。

$$(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x)^2 = 0 \text{ ならば, } (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x) = 0 \text{ である.} \quad (9.1)$$

上の命題の証明は『角運動量とスピン』には述べられていないが、この書の編者（原康夫）が

演算子 $\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x$ はエルミートであるので、その2乗が0ならば、演算子自体も0となる（引用者

注：引用にあたって一部文章を改めた）。

と注をつけられている。

いま σ_x, σ_y はそれぞれ2行2列のエルミート行列である。したがって $\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x$ も2行2列のエルミート行列である^{*10}。

したがって、 $\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x$ は

$$\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & d \end{pmatrix} \quad (9.2)$$

と表せる。ここで、 a, d は実数であり、 b は複素数である。ここで $\bar{b}$ は b の複素共役を表す。

したがって

$$\begin{aligned} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x)^2 &= \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + |b|^2 & ab + db \\ \bar{b}a + d\bar{b} & |b|^2 + d^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9.3)$$

となる。これから

$$a^2 + |b|^2 = 0 \quad (9.4)$$

$$b(a + d) = 0 \quad (9.5)$$

$$\bar{b}(a + d) = 0 \quad (9.6)$$

$$|b|^2 + d^2 = 0 \quad (9.7)$$

^{*10} $(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x)^\dagger = \sigma_y \sigma_x + \sigma_x \sigma_y$ であるから、すなわち、2つのエルミート行列 A, B の積 AB はエルミート行列とはかならずしもいえないが、積 AB とその順序を入れ替えた BA との和 $AB + BA$ は必ずエルミート行列となる。

が得られる.

$a, d, |b|$ は実数であるから, (9.4), (9.7) から

$$a = 0 \quad (9.8)$$

$$|b| = 0 \quad (9.9)$$

$$d = 0 \quad (9.10)$$

が求められる. このとき (9.5),(9.6) は自動的に成立している. b は複素数であるから

$$b = \alpha + i\beta, \alpha, \beta : \text{実数} \quad (9.11)$$

と表せるから,

$$|b|^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 0 \quad (9.12)$$

が成り立つ. (9.12) が成り立つのは

$$\alpha = 0, \beta = 0 \quad (9.13)$$

のときである. すなわち,

$$b = 0 \quad (9.14)$$

でなければならない.

まとめると (9.8),(9.10),(9.14) から

$$a = b = d = 0 \quad (9.15)$$

が求められる. すなわち

$$\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x = 0 \quad (9.16)$$

であることが証明された.

(2020.1.31)

参考文献

- [1] 矢野 忠, 『四元数の発見』(海鳴社, 2014) 113
- [2] 朝永振一郎, 『角運動量とスピン』(みすず書房, 1989) 33-43
- [3] 小出昭一郎, 『量子力学 (I)』 改訂版 (裳華房, 1990) 219-224
- [4] 原康夫, 『量子力学』(岩波書店, 1994) 145-150

編集後記

9 巻 9 号と 10 号と心ならずも年を越してしまいました。今後このようなことがないように心したいと思います。

編者が最近とりかかっていることにべき級数の収束半径の議論がある。Cauchy-Hadamard の条件と d'Alembert の条件は特に有名である。しかし、よく調べて見るともっと詳しい興味深い性質がわかってきた。それでそれをていねいに説明することを目指してきた。内容はすっかり明らかになった。その重要度はそれらの条件の使い方によって、意味があるかどうかはわかれてくるが、編者にとっては、驚くべきことであった。

それを紹介したいと思いながら、身体的なハンデのために果たせていないくて、申し訳ない。

(新関章三)

2020 年 3 月発行の 10 巻から新しく世戸憲治さんに共同編集者になっていただきます。世戸さんについては改めてご紹介するまでもないでしょう。世戸さんと中西先生がいなかったら、この「数学・物理通信」はここまでは続いていなかったと思います。10 巻 1 号でご本人から就任にあたっての抱負を語っていただくつもりです。

(矢野 忠)