数学・物理通信

9巻2号　　2019年3月

編集　新関章三・矢野　忠

2019年3月28日

目次 (Contents)

微分方程式における興味ある問題 (2)
ー追跡線と牽引線ー

世戸 憲治 *

Interesting Problems in Differential Equation (2)
ーPursuit-Line and Tractrixー

Kenji SETO*

1　はじめに

前回の「微分方程式における興味ある問題 (1)」(数学・物理通信 9 巻 1 号) では「真珠湾攻撃」の問題を扱った．それを書いているときに「追跡線」，および，「牽引線」の問題を思い出した．これはすでに良く知られているはずの簡単な問題ではあるが，インターネットなどでは，この「追跡線」と「牽引線」が混同され同じものとして扱われている．しかし，実際はまったく違うものなので，それを強調する意味で，ここで改めて，解説することにした．

2　追跡線

2 次元空間を自由に動く物体 A が，直線上を動く物体 B を追跡する問題を考える．物騒なことを言えば，この A は飛行機で，B は船と考えていただきたい．これは「追跡線」の問題と呼ばれる．ここでは，後の都合上，水平方向に y 軸，鉛直上方向に x 軸をとる．船は y 軸上を正方向に速さ v_s で進むものとし，それを追いかける飛行機は速さ v_p で飛ぶものとする．船が原点を通過するときの飛行機の位置を $(x_p,\, y_p)$ とする．追跡するということは，飛行機が飛ぶ方向を延長した線上に常に船があるということである．飛行機が飛ぶ軌跡を $y = y(x)$ とする．いま，船が原点にあるときから時間が t だけ経過し，そのときの飛行機の位置を点 $(x,\, y)$ とする．この間の経過時間 t は，飛行機が飛んだ距離を速さ v_p で割ったものでもあるので，

$$t = \frac{1}{v_p}\int_x^{x_p} \sqrt{1+y'^2}dx \tag{2.1}$$

となる．飛行機は常に，x の値が減少する方向に進むので，この積分の上限が x_p, 下限が x になることに注意する．この時点で，飛行機の飛ぶ軌跡に対し接線を引くと，接線の座標を $(X,\, Y)$ として，その方程式は

$$Y - y = y'(X - x) \tag{2.2}$$

となる．したがって，飛行機が船を追跡するということは，この接線が船の位置である $(0,\, v_s t)$ を通ればよい．よって，

$$v_s t - y = -xy' \tag{2.3}$$

* 北海学園大学名誉教授　　　　E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

あるいは，(2.1) 式を用いて t を消去した形で書くと，

$$\alpha \int_x^{x_p} \sqrt{1+y'^2}dx - y = -xy' \tag{2.4}$$

という飛行機の軌跡に対する方程式を得る．ここで，

$$\alpha = \frac{v_s}{v_p} \tag{2.5}$$

とおいた．以後，

$$p = y' \tag{2.6}$$

と書くことにして，この式を x で微分すると，

$$\alpha\sqrt{1+p^2} = x\frac{dp}{dx} \tag{2.7}$$

となる．この式は直ちに変数分離できて，

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \alpha\frac{dx}{x} \tag{2.8}$$

となるので，両辺を積分すると

$$\log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) = \alpha\log(x/x_0) \tag{2.9}$$

を得る．ここに，x_0 は積分定数である．さらに変形して

$$p+\sqrt{1+p^2} = (x/x_0)^\alpha \tag{2.10}$$

となり，これから p を求めると

$$p = \frac{1}{2}\left[(x/x_0)^\alpha - (x/x_0)^{-\alpha}\right] \tag{2.11}$$

となる．これを x で積分すると，

$$y = \begin{cases} \dfrac{x_0}{2}\left[\dfrac{(x/x_0)^{1+\alpha}}{1+\alpha} - \dfrac{(x/x_0)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right] - y_0, & \alpha \neq 1 \\ \dfrac{x_0}{2}\left[\dfrac{(x/x_0)^2}{2} - \log(x/x_0)\right] - y_0, & \alpha = 1 \end{cases} \tag{2.12}$$

を得る．ここに，y_0 は積分定数である．

これで方程式の解が求められたが，この解の中に入ってくる積分定数 x_0, y_0 は，初期条件ともいうべき，船が原点を通過するときの飛行機の位置 (x_p, y_p) によって決められるべき量である．その一つは，方程式 (2.4) において $x = x_p$, $y = y_p$ とすると，

$$\frac{y_p}{x_p} = p(x_p) \tag{2.13}$$

となる．これは，原点とそのときの飛行機の位置 (x_p, y_p) を結ぶ直線の傾きが，飛行機が飛ぶ方向の傾きと等しいことを意味する．この式の右辺の p に (2.11) 式を代入すると

$$\frac{y_p}{x_p} = \frac{1}{2}\left[(x_p/x_0)^\alpha - (x_p/x_0)^{-\alpha}\right] \tag{2.14}$$

となり，これから x_0 は

$$x_0 = \frac{x_p}{\left[(y_p/x_p)+\sqrt{1+(y_p/x_p)^2}\right]^{1/\alpha}} \tag{2.15}$$

と求められる．ただし，ここでは，2 次方程式を解くときに正根の方だけを採用した．また，y_0 を決定するには，(2.12) 式で $x = x_p$ としたとき，$y = y_p$ となることを利用すればよい．すなわち，

$$y_0 = \begin{cases} \dfrac{x_0}{2}\left[\dfrac{(x_p/x_0)^{1+\alpha}}{1+\alpha} - \dfrac{(x_p/x_0)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right] - y_p, & \alpha \neq 1 \\ \dfrac{x_0}{2}\left[\dfrac{(x_p/x_0)^2}{2} - \log(x_p/x_0)\right] - y_p, & \alpha = 1 \end{cases} \tag{2.16}$$

である．

通常，飛行機の速さ v_p は船の速さ v_s よりも大きいであろう．したがって，(2.5) 式で定義される α は一般には 1 より小と考えてよい．このとき，(2.12) 上段の式で，$x = 0$ となり得るので，そのときは $y = -y_0$ となり，これは (2.16) 式から

$$y = y_p - \frac{x_0}{2}\left[\frac{(x_p/x_0)^{1+\alpha}}{1+\alpha} - \frac{(x_p/x_0)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right] \tag{2.17}$$

となる．これは，飛行機が船に追いつく場所を与える．もし，$\alpha \geq 1$ で船の方が飛行機より速いときは $x = 0$ で y は発散してしまい，当然のことながら，この場合，飛行機は船に追いつくことはない．

以下の図 1 から図 3 までに，$x_p = 1$, $y_p = 1$ としたときの追跡線を図示する．α の値は，図 1，図 2，図 3 で，それぞれ，$\alpha = 0.5$, 1, 1.5 とした．$\alpha = 0.5$ とした図 1 では，およそ $y = 0.609$ のところで，飛行機が船に追いついている．

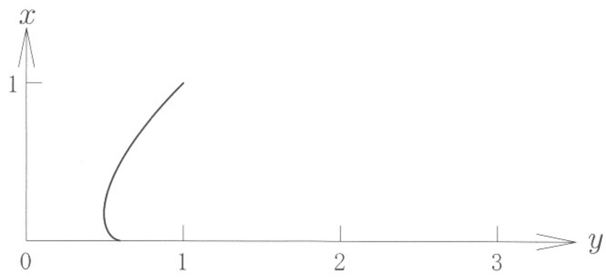

図 1　追跡線　$x_p = 1$, $y_p = 1$, $\alpha = 0.5$

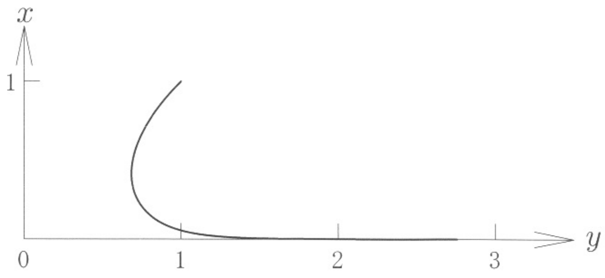

図 2　追跡線　$x_p = 1$, $y_p = 1$, $\alpha = 1$

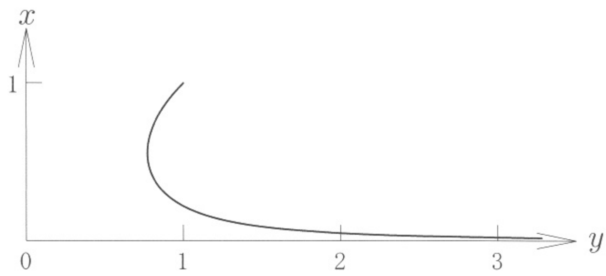

図 3　追跡線　$x_p = 1$, $y_p = 1$, $\alpha = 1.5$

3　牽引線

ついでながら，前節で紹介した「追跡線」と良く似たものに「牽引線」がある．「はじめに」のところで述べたように，これら 2 つの曲線はあまりに似ているせいかよく混同される*1．しかし，実際はまったく異なるものであるので，誤解のないよう，ここで紹介しておこう．「牽引線」は「犬曲線」とも呼ばれる．これは犬にリードを付けて引っ張って歩くときに犬がたどる曲線を意味するからである．ただし，この犬は，いたって従順で，自分勝手に歩くことはなく，常にリードで引かれるままに歩くものとする．このとき犬を引く人間の方は原点から出発して，y 軸上を，ある速さで歩くものとする．このときの速さは途中で変えてもよく，犬が付いてくる限り速さはいくらでも問題はない．犬の方は，リードの長さを ℓ として，初め x 軸上の点 $(\ell, 0)$ の位置にいるものとし，犬がたどる曲線を $y = y(x)$ とする．犬は常に人間に引っ張られて歩くのであるから，犬がたどる曲線の接線をリードの長さ ℓ だけ伸ばしたところに人間がいることになる．式で表すと，接線の座標を (X, Y) として，点 (x, y) における接線の方程式は，

$$Y - y = y'(X - x) \tag{3.1}$$

となる．この接線の y 切片は $Y = y - xy'$ となり，そこが人間の位置 $(0, y - xy')$ となるので，これと犬の位置 (x, y) を結ぶ長さがリードの長さ ℓ であればよく，

$$x^2 + x^2 y'^2 = \ell^2 \tag{3.2}$$

となる．これから，y' を求め，その符号が負であることに注意して，

$$y' = -\frac{\sqrt{\ell^2 - x^2}}{x} \tag{3.3}$$

となり，あとは，これを積分し，

$$y = -\int_{\ell}^{x} \frac{\sqrt{\ell^2 - x^2}}{x} dx \tag{3.4}$$

となる．この積分は

$$x = \ell \sin\theta \tag{3.5}$$

とおくと，

$$y = -\ell \int_{\pi/2}^{\theta} \left(\frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta\right) d\theta = -\ell \left[\log\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) + \cos\theta\right] \tag{3.6}$$

---

*1 Wikipedia では，「追跡線」も「牽引線」もその英語名は，両方とも tractrix となっている．

と積分され，θ から元の x に戻すと，

$$\ell\cos\theta = \sqrt{\ell^2 - x^2}, \qquad \tan\frac{\theta}{2} = \frac{\ell - \sqrt{\ell^2 - x^2}}{x} = \frac{x}{\ell + \sqrt{\ell^2 - x^2}} \tag{3.7}$$

なので，結局

$$y = \ell\log\left(\frac{\ell + \sqrt{\ell^2 - x^2}}{x}\right) - \sqrt{\ell^2 - x^2} \tag{3.8}$$

と求められる．

(3.5) (3.6) 式は，θ をパラメータとした x, y の関係を表すが，ここで，$\theta = \phi + \frac{\pi}{2}$ おくと，

$$x = \ell\cos(\phi), \qquad y = -\ell\left[\log\tan\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\phi\right] = -\ell\left[\mathrm{gd}^{-1}(\phi) - \sin\phi\right] \tag{3.9}$$

と逆グーデルマン (Gudermann) 関数 gd^{-1} を用いて表わすこともできる．

以下の図 4 に，$\ell = 1$ としたときの牽引線を図示する．

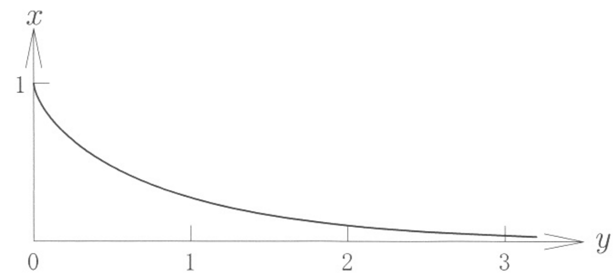

図 4　牽引線　$\ell = 1$

4　おわりに

今回は，微分方程式としては初歩的な 2 つの話題「追跡線」と「牽引線」を扱ってみた．確かにこれらは簡単なものではあるが，初学者にとっては，面白い問題と考えられる．

次回は，この第 3 節に出てきたグーデルマン関数について，調べたことを述べてみたい．

[謝辞]

今回も，京都大学名誉教授の中西襄先生にこの原稿を見ていただき，たくさんのコメントをいただきました．先生に心から感謝いたします．

グーデルマン関数とメルカトル図法

世戸 憲治 *

Gudermann Function and Mercator Projection

Kenji SETO*

1 はじめに

岩波全書「数学公式 II」の P.217 に，Gudermann 関数というのが載っている．これは物理ではまずお目にかかることはない関数で，いったい何に使われるものなのか気になっていた．関数の形からすると特にこの関数を特別視するようなものではないので，何かの使い道があるために，このような名前の付いた関数になっているのだろうとは思っていた．最近になってよくよく調べてみると，この関数は世界地図を描くときの Mercator 図法において重要な働きをする関数であることを初めて知った．今回は，この Gudermann 関数と Mercator 図法について，新しいことは何もないが，できるだけ理解しやすい形で紹介することにした．

2 Gudermann 関数

Gudermann 関数は，

$$\theta = \mathrm{gd}(x) = \int_0^x \frac{1}{\cosh(t)} dt \tag{2.1}$$

と定義される．この積分は，初等関数の範囲内で，実行でき，

$$\mathrm{gd}(x) = \int_0^x \frac{\cosh(t)}{\cosh^2(t)} dt = \int_0^{\sinh(x)} \frac{d\left[\sinh(t)\right]}{1+\sinh^2(t)} = \arctan\left[\sinh(x)\right] \tag{2.2}$$

となる．もっとも，積分の仕方しだいでは，これと異なる形に持っていくことも可能で，例えば，

$$\mathrm{gd}(x) = \int_0^x \frac{2}{e^t + e^{-t}} dt = 2\int_1^{e^x} \frac{d(e^t)}{1+e^{2t}} = 2\arctan\left(e^x\right) - \frac{\pi}{2} \tag{2.3}$$

と表すこともできる．その他にも，

$$\mathrm{gd}(x) = \arcsin\left[\tanh(x)\right] = 2\arctan\left[\tanh(x/2)\right] \tag{2.4}$$

などの表し方もあるが，これらは，積分して求めるよりも，結果を微分して確かめた方が手っ取り早いであろう．

この関数の逆関数が定義されて，

$$x = \mathrm{gd}^{-1}(\theta) = \int_0^\theta \frac{1}{\cos(t)} dt, \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \tag{2.5}$$

* 北海学園大学名誉教授　　E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

となる．これは Lambert 関数とも呼ばれる．これが何故逆関数になるかは見ただけでは分からないが，これを積分してみると，

$$\mathrm{gd}^{-1}(\theta) = \int_0^{\theta} \frac{1}{\cos(t)}dt = \int_{\pi/2}^{\pi/2-\theta} \frac{-1}{\sin(p)}dp = -\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi/2-\theta} \frac{\sin^2(p/2)+\cos^2(p/2)}{\sin(p/2)\cos(p/2)}dp$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi/2-\theta} \Big[\frac{\sin(p/2)}{\cos(p/2)} + \frac{\cos(p/2)}{\sin(p/2)}\Big]dp = \Big[\log\cos(p/2) - \log\sin(p/2)\Big]_{\pi/2}^{\pi/2-\theta}$$

$$= \log\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = \log\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \tag{2.6}$$

となる．この結果を x とおいて，

$$x = \log\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \tag{2.7}$$

これから θ を求めると，

$$\theta = 2\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2} \tag{2.8}$$

となって，これは (2.3) 式を再現する．したがって，(2.5) 式で定義されたものは，確かに逆 Gudermann 関数になっている．

この逆 Gudermann 関数にも種々の形が存在し，

$$\mathrm{gd}^{-1}(\theta) = \log\left(\frac{1+\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sin(\theta)}{1-\sin(\theta)}\right) = \mathrm{arctanh}\big[\sin(\theta)\big] = \mathrm{arcsinh}\big[\tan(\theta)\big] \tag{2.9}$$

などがある．

Gudermann 関数を図 1 に，また，逆 Gudermann 関数を図 2 に示す．これらの関数は，それぞれ，arctangent, tangent のグラフと似ている．ここでは，比較のため，これらの関数も点線で示しておいた．これらの図で 1 目盛りはすべて $\pi/2$ である．

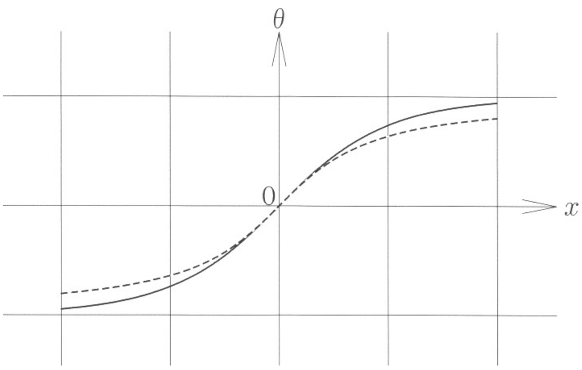

図 1　$\theta = \mathrm{gd}(x)$; 実線，　$\theta = \arctan(x)$; 点線

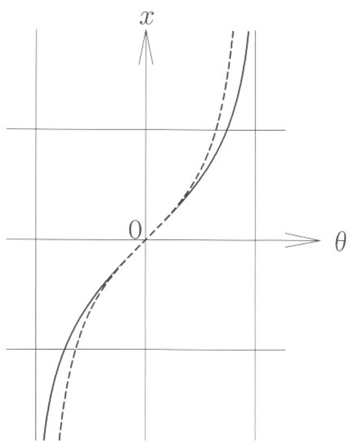

図 2　$x = \mathrm{gd}^{-1}(\theta)$; 実線，　$x = \tan(\theta)$; 点線

3　円筒図法と Mercator 図法

世界地図を一枚の紙の上に描くとなると，地球が球であるために色々な問題が発生する．そのため，それぞれが特徴を持った何十種類もの方法が提案され使われてきた．そのうちの Mercator 図法は円筒図法に属するものである．円筒図法とは，地球全体に，ちょうど，赤道上で接するように円筒を被せ，ある点から投影して円筒上に映っ

た射影を地図とするものである．どこの点からスクリーンとしての円筒上に投影するかで，この円筒図法にもいろいろな種類がある．しかし，どこから投影しても，この方法では経線 (子午線) がすべて平行な直線としてスクリーン上に射影される．ここでは，Mercator 図法について説明する前に，このうちの 3 種類，心射円筒図法，正射円筒図法，平射円筒図法について簡単に紹介する．これらの図法で，地球の地軸を含む面で切ったときの断面を図 3 に示す．これらの図で， O は地球の中心，N, S は，北極，南極である．

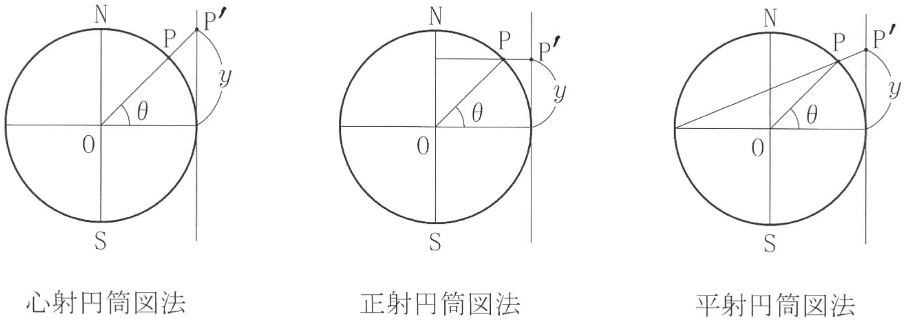

図 3　いろいろな円筒図法

このうち，心射円筒図法は文字どおり地球の中心からスクリーン上に投影するもの，また，正射円筒図法は地表面上の投影しようとする点から地軸に対し垂線を下ろし，それをスクリーンまで延長して交わる点に射影するもので，これは無限遠から投影したことになる．さらに，平射円筒図法は，投影しようとする点の反対側の赤道上の点から投影するものである．いま，緯度が θ, 経度が ϕ の地表面上の点 P があるものとし，これを P(θ, ϕ) と記すことにする．この点は，これら 3 種の図法で，スクリーン上の P′ 点に射影される．

いま，この P 点と同じ緯度 θ で，経度が微小量 $\Delta\phi$ だけ離れた点を Q$(\theta, \phi + \Delta\phi)$ とする．地球の半径を r とすると，地上ではこれら 2 点 PQ 間の距離は，$r\cos(\theta)\Delta\phi$ であるが，スクリーン上での距離 P′Q′ は，これら 3 種のどの方法でも，緯度に関係なく，$r\Delta\phi$ となる．これは，地表面上では，緯度が高くなるほど経線間の幅が狭まり，北極では 1 点に集まって間隔はゼロになるにもかかわらず，スクリーン上では緯度に関係ない一定値になることを意味する．あるいは，スクリーン上では，東西間の距離は，$1/\cos(\theta)$ 倍に拡大されると言い換えることもできる．

一方，点 P と同じ経度 ϕ で，緯度が微小量 $\Delta\theta$ だけ離れた点を R$(\theta + \Delta\theta, \phi)$ とすると，地上でのこれら 2 点 PR 間の距離は $r\Delta\theta$ であるが，スクリーン上での距離 P′R′ はこれら 3 種の方法ですべて異なり，

$$\text{心射円筒図法では，}\frac{r\Delta\theta}{\cos^2(\theta)},\qquad \text{正射円筒図法では，}r\cos(\theta)\Delta\theta,\qquad \text{平射円筒図法では，}\frac{r\Delta\theta}{\cos^2(\theta/2)} \tag{3.1}$$

となる．心射円筒図法と平射円筒図法では緯度により，南北間の距離は，それぞれ，$1/\cos^2(\theta)$ 倍，および，$1/\cos^2(\theta/2)$ 倍に拡大されるが，正射円筒図法では，$\cos(\theta)$ 倍に縮小される．特に心射円筒図法では，北極では無限大に拡大され，正射円筒図法では，縮小されてゼロになる．

スクリーン上で，赤道から点 P′ までの距離 y を求めるには，これらを積分することで求められ，

$$\text{心射円筒図法では，}y = \int_0^\theta \frac{rdt}{\cos^2(t)} = r\tan(\theta),\qquad \text{正射円筒図法では，}y = \int_0^\theta r\cos(t)dt = r\sin(\theta),$$

$$\text{平射円筒図法では，}y = \int_0^\theta \frac{rdt}{\cos^2(t/2)} = 2r\tan(\theta/2) \tag{3.2}$$

となる．もちろん，これら y の値は，積分するまでもなく，図 3 から簡単に求められる．

いずれにしても，これら 3 種の方法では東西間の距離と南北間の距離の拡大率が同じにはならず，ゆがんだ地図になってしまう．これを見て Mercator が何を考えたか知る由もないが，当時，かなりの精度を持つ羅針盤が作られ，これを用いて船の進行方向を正確に割り出せる海図が必要とされていた．Mercator がこの必要性に答えるべく考え出したものが，Mercator 図法である．この図法は正角円筒図法とも呼ばれる．

以下，Mercator 図法について述べる．先に扱った地表面上の 3 個の点 P, Q, R は，PQ と PR が直交しているので，この 2 本の線分から長方形が定義される．この長方形において P 点を通る対角線が線分 PQ となす角を α とすると，

$$\tan(\alpha) = \frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{PQ}} = \frac{r\Delta\theta}{r\cos(\theta)\Delta\phi} \tag{3.3}$$

となる (図 4 参照).

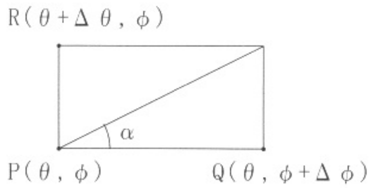

図 4　点 P, Q, R が作る長方形

いま，この式を変数分離し，角度 α を一定として，点 A(θ_1, ϕ_1) から点 B(θ_2, ϕ_2) まで積分すると，

$$\tan(\alpha)\big(\phi_2 - \phi_1\big) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\cos(\theta)} d\theta = \mathrm{gd}^{-1}(\theta_2) - \mathrm{gd}^{-1}(\theta_1) \tag{3.4}$$

と，逆 Gudermann 関数を用いて積分される．これから，A, B の地図上の点を決めるときの x 座標を ϕ に比例させ，y 座標を $\mathrm{gd}^{-1}(\theta)$ に比例させると角度 α が一定に保たれることを意味する．より具体的に言うと，赤道に沿って x 軸，赤道から北に向かって y 軸をとるものとし，任意の点 P(θ, ϕ) に対する地図上の座標 (x, y) を

$$x = \ell\phi, \qquad y = \ell\,\mathrm{gd}^{-1}(\theta) \tag{3.5}$$

と取ることにする．ここに，ℓ は地図の大きさを決める長さの次元を持つ定数である．この座標を用いて，点 A, 点 B の座標を，それぞれ，

$$\text{A について} \quad x_1 = \ell\phi_1, \quad y_1 = \ell\,\mathrm{gd}^{-1}(\theta_1), \qquad \text{B について} \quad x_2 = \ell\phi_2, \quad y_2 = \ell\,\mathrm{gd}^{-1}(\theta_2) \tag{3.6}$$

とおくと，(3.4) 式は

$$\tan(\alpha) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{3.7}$$

となる．この式は地図上の 2 点 (x_1, y_1), (x_2, y_2) を直線で結んだときのその直線の傾き角が α になることを意味する．これは，航海術で言うと，地図上で出発地と目的地を直線で結びその傾き角を求め，あとは羅針盤で角度を測定しながら一定方向に進んでいくと目的地に着けるということである．ただし，この方法は最短航路である大圏航路にはならないが，下手に迷うよりは，確実性がある方法で，Mercator 図法が重宝された理由である．

なお，この Mercator 図法は x 座標が経度 ϕ に比例するという点で，円筒図法に属する．しかし，y 座標は，逆 Gudermann 関数となっているので，心射，正射，平射のように，ある 1 点から投影したものにはなっておらず，緯度によって投影点が異なってくる．すでに述べたように円筒図法では，東西方向の長さが $1/\cos(\theta)$ 倍になるので，地図の形を歪めないために南北方向の長さも同じ $1/\cos(\theta)$ 倍にしたものが Mercator 図法であると言える．

と，ここまで書いてきたが，この Mercator 図法には不思議な点が多々ある．Mercator がこの図法で描いた地図を発表したのは，1569 年である．Columbus が西インド諸島を発見したのが，1492 年だから確かにこのころは大

航海の時代だったことになる．しかし，Newton や Leibniz が微分積分を発表するのは，Mercator よりもおよそ 100 年も後のことである．いったい，どのようにして，Mercator は地図を描いたのであろうか．しかも，Gudermann が Gudermann 関数を研究したのは，Mercator 図法が出てからおよそ 260 年も後の 1830 年代のことである．このことから考えると，Mercator が Gudermann 関数を使ったはずはなく，Mercator 図法が Gudermann 関数に基づくものであることは，はるか後世の人が意味付けをしたことになる．

Mercator 図法の最大の欠点は，北に行くほど面積が拡大されてしまうことである．例えば，およそ北緯 75 度のグリーンランドの面積は，赤道付近の面積に比べおよそ 15 倍に拡大されてしまい，南米大陸よりも大きく，アフリカ大陸と同じくらいの大きさになってしまう．それでも心射円筒図法では，同じグリーンランドの面積が 57 倍にもなってしまうので，それに比べると良い方である．この Mercator 図法で，北に行くにしたがいどのように拡大されるかを示すものを図 5 に掲げる．

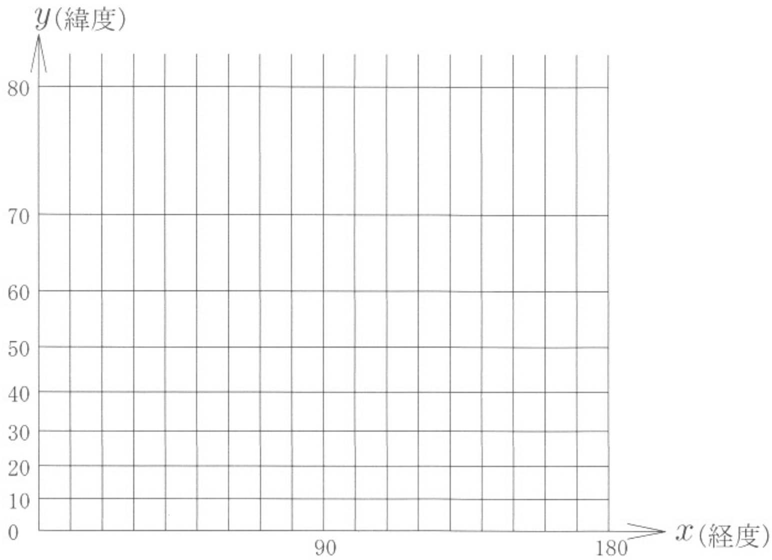

図 5　Mercator 図法における経線と緯線，単位は度

この図では，経線と緯線を 10 度ごとに引いた．赤道付近ではこの升目がほとんど正方形であるが，北に行くほど縦長の長方形になる．

最後に，最近我々が目にする世界地図は Mercator 図法を改良したもので，Miller 図法と呼ばれるものである．これは，地図上の y 座標を，(3.5) 式に替わって，

$$y = \frac{5\ell}{4}\mathrm{gd}^{-1}\left(\frac{4}{5}\theta\right) \tag{3.8}$$

としたものである．$|\theta| \ll 1$ のときは，$\mathrm{gd}^{-1}(\theta) \cong \theta$ なので，これは (3.5) 式と同じになるが，θ が 両極に近いところでの発散は抑えられる．この方法では，グリーンランドの面積は，およそ 12 倍になり，これで，Mercator 図法では描くことができなかった北極も描けるようになるが，方位の正確性は失われてしまう．

4　おわりに

もちろん，Mercator 図法という名前自体は，中学生のときから知ってはいたが，まさかこれが Gudermann 関数を使ったものとは知る由もなかった．これが円筒図法を用いたものであることは，実際の地図を見ると見当はつ

くが，これまで，地図の書き方には無関心であったために，この図法と，心射，正射，平射の各円筒図法などの区別はほとんど付いていなかった．今回，これらのことを調べてみて，Mercator 図法にこんな隠された魅力があったことに驚いたしだいである．

スペースが余ったので，Gudermann 関数について調べたことを書いておく．$\mathrm{gd}(x)$，$\mathrm{gd}^{-1}(\theta)$ の定義，(2.1) (2.5) 式における違いは cosine と hyperbolic cosine である．これら 2 つの関数は複素数の範囲では繋がった関数なので，積分変数を変換することで，接続することが可能となる．これら 2 つの定義において，$t = ip$ とおくと，

$$\mathrm{gd}(x) = \int_0^{-ix} \frac{i}{\cos(p)} dp = i\,\mathrm{gd}^{-1}(-ix), \quad \mathrm{gd}^{-1}(\theta) = \int_0^{-i\theta} \frac{i}{\cosh(p)} dp = i\,\mathrm{gd}(-i\theta) \tag{4.1}$$

となる．これら 2 つの式は (2.3) (2.6) の具体的表式を用いて確かめることも可能である．また，この第 1 式で，$x = -i\theta$ とおくと，

$$\mathrm{gd}(-i\theta) = i\,\mathrm{gd}^{-1}(-\theta) \tag{4.2}$$

となるが，gd も gd^{-1} も奇関数なので，これは第 2 式と矛盾しない．このように，Gudermann 関数は，変数を複素数に拡張することで，その逆関数と接続されるという面白い特徴を持つ．

[謝辞]

今回も，京都大学名誉教授の中西襄先生にこの原稿を見ていただき，いくつかのコメントをいただきました．先生に心から感謝いたします．

因数分解の公式を忘れたら 1 （改訂版）

矢野　忠[*1]

In Case of Forgetting Some Factorization Formulae 1 (Revised Version)

Tadashi YANO[*2]

1　はじめに

このエッセイはすでに愛数協の機関誌「研究と実践」に掲載されたものである [1].「研究と実践」の読者は主として小学校の先生方であるから，この「数学・物理通信」に掲載すれば，より広い読者が期待できる[*3].

ある人[*4]が，大学の理工系学科の出身であるのに，卒業してから 20 年近く経つと x^3-1 の因数分解ができなくなっていたという話を最近聞いた．高校生の頃には因数分解の公式

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1) \tag{1.1}$$

覚えていて，因数分解ができていたはずなのに．

しかし，そういう経験をもっている人は少なくないかもしれない．それで，そんなときにどうすればよいのか考えてみたい．

2　公式を知っている人に聞く

知らないこと，忘れたことはなんでも気安く聞ける人がいれば，その人に聞くのが一番いい．冒頭に述べた“ある人”は配偶者に尋ねてこの公式を教えてもらった．しかし，身近にそういう人がいないときはどうするか．以下の節ではそういう場合に私ならどうするかを考えた．

3　数学公式集で公式をさがす

数学公式集をもっているならば，公式集にその因数分解の公式が載っていないかをさがす．いま手元にある文献 [2]　に

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1}),\quad n=\text{正の整数} \tag{3.1}$$

が出ているので，これで $a=x, b=1, n=3$ とおけば，

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1) \tag{1.1}$$

を求めることができる．

また別の文献 [3] にはもっと直接的な因数分解の公式として

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

*1 元愛媛大学工学部
*2 yanotad@earth.ocn.ne.jp
*3 この「数学・物理通信」の読者は数学に通じた方々ばかりであろうから，このようなエッセイは無用であろう．しかし，しばらくおつきあいください．
*4 この“ある人”は私のことではありません．念のため．

が出ているので，これで $a=x, b=1$ とおけば，

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1) \tag{1.1}$$

が直ちに得られる．

もっともこのやり方はまったく知的な作業を含んでいない．ただ，文献を調べるという作業をするというだけである．しかし，それでも因数分解の公式をさがすためには十分であろう．

4 インターネットで公式をさがす

このころは何でもインターネットに出ている．その気になってさがすつもりならば，高校数学のレベルの公式を集めたサイトもある．

その一つ [4] には展開公式のところに

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

が出ている．この式を右辺から左辺に見れば，

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

が得られる．$a=x, b=1$ とおけば，

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1) \tag{1.1}$$

が得られる．

このサイトには展開公式は載っているが，因数分解の公式としては載っていない．数学のわかる人には当然のことではあろうが，スペースの節約のせいか展開公式しか載せていないサイトが多い．

有名な金沢工業大学のサイト [5] にはさすがに

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

が因数分解の公式として出ていた．

この公式で $y=1$ とおけば，求める x^3-1 の因数分解の公式が得られる．

5 数式処理ソフトで因数分解をする

[6] には代表的な数式処理のソフトである，Mathematica で Factor コマンドを使って因数分解をすれば，コマンド $\mathrm{Factor}[\mathrm{x}^3-1]$ で

$$(-1+x)(1+x+x^2)$$

と因数分解できることが示されている．数式処理のソフトに特有の昇べきの順序で整式が与えられているのがちょっともの珍しい．

Mathematica では一般に x^n-1 の因数分解でも正の整数 n の値を与えてやれば，計算できる．一般の正の整数 n に対して $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)$ をこの数式処理ソフトで得ることはできないけれども．

6 因数定理をつかう

因数定理という便利な定理がある [7].

$f(x)$ という x についての整式があり，この $f(x)$ の x に $x=a$ という値を代入したときに $f(a)=0$ が成り立つならば，整式 $f(x)$ は

$$f(x)=(x-a)g(x), \text{ただし } g(x) \text{ は } f(x) \text{ よりは低次の整式である．}$$

この因数定理を用いると $f(x)=x^3-1$ は $f(1)=0$ であるから，$x-1$ という因数があることがわかる．これがわかれば，x^3-1 を $x-1$ で割り算すれば，その商が x^2+x+1 となるので，

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1) \tag{1.1}$$

と因数分解できることはすぐにわかる．

または，代数的に整式の割算を実行しなくても，つぎのように未定係数法を用いて係数を決めてやってもよい．

x^3-1 は x の 3 次式であるから，x^3-1 を $x-1$ で割れば，その商は x の 2 次式である．その 2 次式を

$$ax^2+bx+c$$

とおこう．そうすると

$$\begin{aligned}x^3-1&=(x-1)(ax^2+bx+c)\\&=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c\end{aligned}$$

となる．これは恒等式であるから，この式が成り立つためには両辺の同じ x の次数の同じ係数を比べて

$$\begin{aligned}a&=1\\b-a&=0\\c-b&=0\\c&=1\end{aligned}$$

が得られる．これから

$$a=1,\quad b=1,\quad c=1$$

が得られ，仮定した 2 次式は

$$ax^2+bx+c=x^2+x+1$$

であることがわかる．

したがって，

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1) \tag{1.1}$$

が得られる．

7　未定係数法を使う

いま x^3-1 が 1 次式の因数をもっていると仮定して，

$$x^3-1=(ax+b)(cx^2+dx+e)$$

と因数分解できたとしよう．$(ax+b)(cx^2+dx+e)$ の積をつくれば，

$$(ax+b)(cx^2+dx+e)=acx^3+(ad+bc)x^2+(ae+bd)x+be$$

であるから，

$$x^3-1=acx^3+(ad+bc)x^2+(ae+bd)x+be$$

いま a, c が整数であるとすれば，$ac = 1$ であるから

$$a = 1, c = 1 \qquad \text{または} \qquad a = -1, c = -1$$

であろう．

また同様に b, e が整数であるとすれば，$be = -1$ であるから

$$b = 1, e = -1 \qquad \text{または} \qquad b = -1, e = 1$$

であろう．これらの解の候補から

$$\begin{aligned} ad + bc &= 0 \\ ae + bd &= 0 \end{aligned}$$

を満たす d の値があるかどうかを調べよう．

まず $a = 1, c = 1$ のときに $b = 1, e = -1$ とすれば，

$$\begin{aligned} ad + bc &= 1 \cdot d + 1 \cdot 1 = d + 1 = 0 \\ ae + bd &= 1 \cdot (-1) + 1 \cdot d = -1 + d = 0 \end{aligned}$$

が得られるが，この 2 式は矛盾するから，この組合わせ $(a, b, c, e) = (1, 1, 1, -1)$ はあり得ない．

つぎに，$a = 1, c = 1$ のときに $b = -1, e = 1$ とすれば，

$$\begin{aligned} ad + bc &= 1 \cdot d + (-1) \cdot 1 = d - 1 = 0 \\ ae + bd &= 1 \cdot 1 + (-1) \cdot d = 1 - d = 0 \end{aligned}$$

となる．このとき $d = 1$ が得られる．すなわち，組合わせ $(a, b, c, d, e) = (1, -1, 1, 1, 1)$ は可能である．

解が一つ得られたが，他の可能性も調べておこう．

さらに，$a = -1, c = -1$ のときに $b = 1, e = -1$ とすれば，

$$\begin{aligned} ad + bc &= (-1) \cdot d + 1 \cdot (-1) = -d - 1 = 0 \\ ae + bd &= (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot d = 1 + d = 0 \end{aligned}$$

となる．このとき $d = -1$ が得られる．すなわち，組合わせ $(a, b, c, d, e) = (-1, 1, -1, -1, -1)$ は可能である．ただし，この場合には因数分解は

$$\begin{aligned} x^3 - 1 &= (-x + 1)(-x^2 - x - 1) \\ &= (x - 1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

であり，上の組合わせ $(a, b, c, d, e) = (1, -1, 1, 1, 1)$ の場合と同じ因数分解を与えるので，新しい因数分解を与えない．このことは因数分解の一意性からも納得できることである．

最後に，$a = -1, c = -1$ のときに $b = -1, e = 1$ とすれば，

$$\begin{aligned} ad + bc &= (-1) \cdot d + (-1) \cdot (-1) = -d + 1 = 0 \\ ae + bd &= (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot d = -1 - d = 0 \end{aligned}$$

が得られるが，この 2 式は矛盾するから，この組合わせ $(a, b, c, e) = (-1, -1, -1, 1)$ はあり得ない．

以上の結果をまとめると，可能な値は $(a, b, c, d, e) = (1, -1, 1, 1, 1)$ または $(a, b, c, d, e) = (-1, 1, -1, -1, -1)$ であるが，この二つとも同じ因数分解を与え，それは

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) \tag{1.1}$$

である．

普通にはこんな面倒な計算をすることはまず考えられないが，それでも腕力に訴えて因数分解をできることを示した．

振り返ってみると，まず $x^3-1=(ax+b)(cx^2+dx+e)$ と一般的な式を書く人はあまりいないだろう．それで $a=1, c=1$ とおけば，計算はぐっと簡単になる．そのように因数分解の式を書いて計算する人がほとんどであろう．だが，一般的な式を仮定しても計算ができることをここでは示した．

蛇足ではあろうが，$x^3-1=(x+b)(x^2+dx+e)$ として計算をやり直してみれば，

$$(x+b)(x^2+dx+e)=x^3+(b+d)x^2+(bd+e)x+be$$

であるから

$$\begin{aligned} b+d&=0 \\ bd+e&=0 \\ be&=-1 \end{aligned}$$

が得られる．

この最後の式から $b=1, e=-1$ または $b=-1, e=1$ が得られる．

まず $b=1, e=-1$ のときには

$$\begin{aligned} b+d&=1+d=0 \\ bd+e&=1\cdot d-1=d-1=0 \end{aligned}$$

であるから，この 2 つの式は矛盾する．したがって，$b=1, e=-1$ はあり得ない．

つぎに $b=-1, e=1$ のときに

$$\begin{aligned} b+d&=-1+d=0 \\ bd+e&=(-1)\cdot d+1=0 \end{aligned}$$

この 2 式から $d=1$ が得られる．

したがって，$(b,d,e)=(-1,1,1)$ は値としてとることができる．

この値を因数分解の仮定した式に代入すれば

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1) \tag{1.1}$$

が正しく得られる．

因数分解の仮定式の表し方によって，計算を簡略化できることがわかるであろう．

8　類似の因数分解の公式

ここまで x^3-1 の因数分解の公式をどのように導くかを述べてきたが，類似の因数分解の公式として

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1) \tag{8.1}$$

がある．この公式を忘れていても因数定理を知っていれば，$f(x)=x^3+1$ で $f(-1)=0$ となることから，x^3+1 は $x+1$ という因数をもつことがわかるので，後は x^3-1 の因数分解をしたときと同じ要領で因数分解の公式を導けばよい．その計算をここで繰り返す必要はないであろう．

しかし，ここでは別のやり方を述べておこう．

まず，

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) \tag{1.1}$$

で x を $x/a, (a \neq 0)$ と置き換えると

$$\left(\frac{x}{a}\right)^3 - 1 = \left(\frac{x}{a} - 1\right)\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right) + 1\right]$$

となる．この式の両辺に a^3 をかければ

$$x^3 - a^3 = (x-a)(x^2+ax+a^2)$$

が得られる．この式で a を $-a$ とおけば

$$x^3 + a^3 = (x+a)(x^2-ax+a^2)$$

が得られる．この式で $a=1$ とおけば

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2-x+1) \tag{8.1}$$

が得られる．

または (1.1) で $x \to -x$ と置き換えると

$$(-x)^3 - 1 = (-x-1)(x^2-x+1)$$

したがって

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2-x+1) \tag{8.1}$$

が得られると考えてもよい．

9　おわりに

x^3-1 の因数分解について，もしこの因数分解の公式を忘れたときにどうやってその公式を導出するかをここでは考えてみた．それと関連して x^3+1 の因数分解も考えた．

しかし，いまの場合には x^3-1 や x^3+1 が因数分解できることがわかっていたので，もっとも基本的に因数分解できるかどうかを検討することはしないですんだ．

このエッセイでは簡単な 3 次式の因数分解の公式を忘れたときにどうやってそれを導くのかを考えたが，もっと複雑な因数分解の公式がある．それらを導くことはつぎのエッセイに譲ろう [8].

(2012.3.26)(2019.3.31 改訂)

参考文献

[1] 矢野　忠，因数分解の公式を忘れたら 1，研究と実践（愛数協），No. 113 (2012.11) 16-21

[2] 小林，福田，鈴木，安岡，黒崎編，『数学公式集』（共立出版，1959） 1

[3] 矢野健太郎，『代数入門』（岩波全書）（岩波書店，1955） 57

[4] ja.wikibooks.org/wiki/初等数学公式集

[5] w3e.kanazawa-it.ac.jp/math/kousiki/index.html

[6] T. W. グレイ，J. グリン （時田節，藤村行俊訳），『Mathematica 数学の探求』（トッパン，1994） 323

[7] 数学教育協議会，銀林浩，野崎昭弘，小沢健一編，『家庭の算数・数学百科』（日本評論社，2005） 17-18
[8] 矢野　忠，因数分解の公式を忘れたら 2，研究と実践（愛数協），No. 113 (2012.11) 22-27
このエッセイの改訂版は「数学・物理通信」の今号のこのエッセイのつぎにある．
矢野　忠，因数分解の公式を忘れたら 2，数学・物理通信，9 巻 2 号 (2019.3.31) 21-27

因数分解の公式を忘れたら 2（改訂版）

矢野　忠*1

In Case of Forgetting Some Factorization Formulae 2 (Revised Version)

Tadashi YANO*2

1　はじめに

このエッセイはすでに愛数協の機関誌「研究と実践」に掲載されたものである [1].「研究と実践」の読者は主として小学校の先生方であるから，この「数学・物理通信」に掲載すれば，より広い読者が期待できる*3.

同じ表題のエッセイ 1 [2] で x^3-1 と x^3+1 の因数分解の公式をどのように導くかを述べたが，このエッセイではそれらを少し一般化することを考えよう．さらにまた 3 次式または 4 次式の因数分解の公式としてよく知られたものがあるが，それらを忘れたときにどうやって導いたらよいかも考えてみよう．

2 次式の因数分解は基本的なものであり，難しくはない．しかし，3 次式または 4 次式の因数分解の公式はちょっと面倒である．それらをどう導くか．特に高校で学んだ当時は記憶が鮮明でも記憶が時間と共に曖昧になってくるから，自分でわかっているわずかのことからでも導けるようにできればいい．

2　因数分解の公式の一般化

x^3-1 と x^3+1 の因数分解の公式を知っていれば，それらの式において $x \to \frac{x}{a}$ と置き換え，a^3 を両辺にかければ，

$$x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2) \tag{2.1}$$
$$x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2) \tag{2.2}$$

がそれぞれ得られる．

これを一般化して $x^n-a^n, x^n+a^n, n=$ natural number がどのように因数分解できるか，または，できないかを調べたい．

そのためには一番簡単な x^2-a^2 と x^2+a^2 との因数分解を改めて考えてみよう．

これを図をつかってつぎのように考える*4（図 1 参照）．図 1 で横線の入った長方形は $-ax$ を表しており，これと横線の入ってない長方形 ax とが，打ち消しあって，$x^2-a^2=(x-a)(x+a)$ となることを示す．

これを因数定理をつかって，つぎのように考えることもできる．

$f_1(x)=x^2-a^2$ とおけば，$f_1(a)=0, f_1(-a)=0$ であるので $f_2(x)=A(x-a)(x+a)$ と因数分解できる．$f_1(1)$ を計算すれば

$$f_1(1)=1-a^2$$

*1 元愛媛大学工学部

*2 yanotad@earth.ocn.ne.jp

*3 この「数学・物理通信」の読者は数学に通じた方々ばかりであろうから，このようなエッセイは無用であろう．しかし，しばらくおつきあいください．

*4 式を図で表すときに，この図を文字タイルという．文字タイルをつかって因数分解を考えることを故矢野寛（ゆたか）氏から学んだ [3].

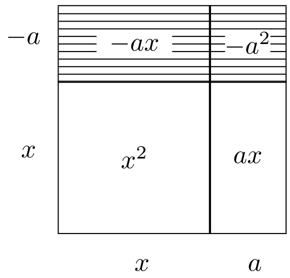

図 1　$x^2 - a^2$ の因数分解

であるが，$x = 1$ のときの $f_2(1)$ は

$$f_2(1) = A(1 - a^2)$$

であるので，$f_1(x) = f_2(x)$ であるためには $A = 1$ でなければならない．したがって

$$f_1(x) = (x - a)(x + a)$$

と因数分解できる．

一方，$g_1(x) = x^2 + a^2$ とおけば，x にどんな実数を代入しても $g_1(x) = 0$ とならない．したがって実数の範囲では因数分解できない．

つぎに，$x^3 - a^3$ と $x^3 + a^3$ とは因数分解できることをすでに示した [2].

では $x^4 - a^4$ と $x^4 + a^4$ はどうであろうか．この場合は $x^4 - a^4$ は

$$x^4 - a^4 = (x - a)(x + a)(x^2 + a^2) \tag{2.3}$$

と因数分解できるが，$x^4 + a^4$ は因数分解できない．

さらに，$x^5 - a^5$ と $x^5 + a^5$ を考えてみれば，$x^5 - a^5$ は

$$x^5 - a^5 = (x - a)(x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4) \tag{2.4}$$

と因数分解ができ，また $x^5 + a^5$ も

$$x^5 + a^5 = (x + a)(x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4) \tag{2.5}$$

と因数分解できる．

つづけて，$x^6 - a^6$ と $x^6 + a^6$ とを考えてみれば，$x^6 - a^6$ は

$$x^6 - a^6 = (x - a)(x + a)(x^2 - ax + a^2)(x^2 + ax + a^2) \tag{2.6}$$

と因数分解できるが，$x^6 + a^6$ は因数分解できない．

以上をまとめてみれば

$$
\begin{aligned}
&x^2 - a^2 = (x-a)(x+a) \\
&x^2 + a^2 \quad \text{：因数分解できない} \\
&x^3 - a^3 = (x-a)(x^2+ax+a^2) \\
&x^3 + a^3 = (x+a)(x^2-ax+a^2) \\
&x^4 - a^4 = (x-a)(x+a)(x^2+a^2) \\
&x^4 + a^4 \quad \text{：因数分解できない} \\
&x^5 - a^5 = (x-a)(x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4) \\
&x^5 + a^5 = (x+a)(x^4-ax^3+a^2x^2-a^3x+a^4) \\
&x^6 - a^6 = (x-a)(x+a)(x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2) \\
&x^6 + a^6 \quad \text{：因数分解できない}
\end{aligned}
$$

である．

したがって，$n=6$ まででは $x^n - a^n$ は n が正の整数のときに必ず因数分解できるが，$x^n + a^n$ は n が正の奇数のときに因数分解できるが，n が正の偶数のときには因数分解できない．

以上の例から

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}), \quad n : \text{正の整数} \tag{2.7}$$

$$x^n + a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots - a^{n-2}x + a^{n-1}), \quad n : \text{正の奇数} \tag{2.8}$$

が成り立つ*5．この因数分解は付録に述べるが，数学的帰納法で証明できる．

3　3 次式の因数分解

さて，話を 3 次の整式にもどすと

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \tag{3.1}$$

の因数分解の公式が成り立つが，これを因数定理を用いて証明しよう *6．そのために $a = x$ と書き換えておこう．これは式を見やすくするためで，それ以外の理由はない．

いま，上式の左辺

$$f(x) = x^3 - 3bcx + b^3 + c^3$$

に因数定理を適用する．すなわち，$x = -(b+c)$ を $f(x)$ に代入すると

$$f(-(b+c)) = -(b+c)^3 + 3bc(b+c) + b^3 + c^3 = 0$$

が成り立つから，$f(x)$ は $x+b+c$ という因数をもっている．

x の 3 次式 $f(x)$ を 1 次式 $x+b+c$ で割った商は x の 2 次式であるから，それを $x^2 + Ax + B$ とおくと

$$(x+b+c)(x^2+Ax+B) = x^3 + (A+b+c)x^2 + [B+(b+c)A]x + B(b+c)$$

いま

$$x^3 - 3bcx + b^3 + c^3 = x^3 + (A+b+c)x^2 + [B+(b+c)A]x + B(b+c)$$

*5 任意の正の整数 n に対しても cos や sin 関数を用いて表した係数を許せば，因数分解ができる [4].

*6 この因数分解の公式の普通の証明は [5] をみよ．

が恒等的に成り立つので，この式の両辺の x の同じ次数の係数を等しいとおけば

$$\begin{aligned} A+b+c&=0 \\ B+(b+c)A&=-3bc \\ B(b+c)&=b^3+c^3 \end{aligned}$$

これらから A, B を求めれば

$$\begin{aligned} A&=-(b+c) \\ B&=b^2-bc+c^2 \end{aligned}$$

となる．このとき $B+(b+c)A+3bc=0$ が成り立つことはいうまでもない．

したがって，

$$x^3-3bcx+b^3+c^3=(x+b+c)(x^2+b^2+c^2-bx-cx-bc)$$

と因数分解でき，この式で $x=a$ とおけば，確かに

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \tag{3.1}$$

という因数分解の公式が得られる．

4　4 次式の因数分解

つぎによく出てくる 4 次式の因数分解の公式を考えてみよう．これは

$$x^4+x^2+1=(x^2-x+1)(x^2+x+1) \tag{4.1}$$

である．これは 1 次の整式の因数をもたないので，因数定理では導けない種類の因数分解の公式である．

これは $x^2=p$ とおけば，与えられた式は $x^4+x^2+1=p^2+p+1$ となる．p^2+p+1 を文字タイルで表せば図 2 の左図のようになる．

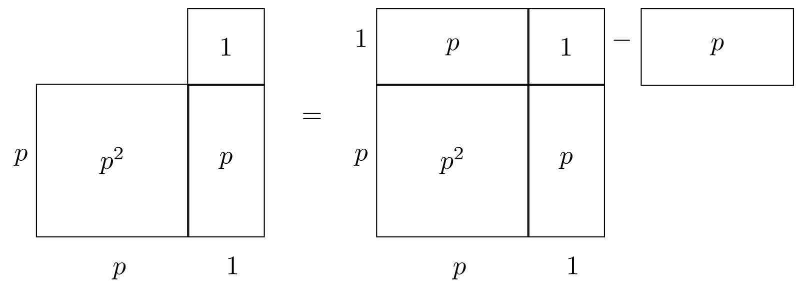

図 2　p^2+p+1 の因数分解

この式では正方形ができないので，正方形ができるように p だけ足すと $p^2+2p+1=(p+1)^2$ と図 2 の中央図の正方形がつくられる．だが，もともと正方形になるように小さな正方形 p^2 の上に長方形 p を加えたのだから，元の文字タイルにするにはその同じ面積の長方形 p を正方形から引いておかなければならない．すなわち

$p^2+p+1=(p+1)^2-p$ である．したがって，

$$\begin{aligned}p^2+p+1 &= (p+1)^2-p \\ &= (p+1)^2-x^2 \\ &= (p+1-x)(p+1+x) \\ &= (x^2-x+1)(x^2+x+1)\end{aligned}$$

したがって，4 次式の因数分解の公式

$$x^4+x^2+1=(x^2-x+1)(x^2+x+1) \tag{4.1}$$

が得られた．

いま，この場合の 4 次式は x のみの一変数であるが，書籍には x, y の 2 変数の因数分解の式が出ている [6]．それを上に述べた因数分解の公式からどう導くかを考えてみよう．

いま，(4.1) で x を x/y とおけば，

$$\left(\frac{x}{y}\right)^4+\left(\frac{x}{y}\right)^2+1=\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2-\left(\frac{x}{y}\right)+1\right]\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2+\left(\frac{x}{y}\right)+1\right]$$

この式の両辺に y^4 をかけると

$$x^4+x^2y^2+y^4=(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2) \tag{4.2}$$

が得られる．

この形でも $x^2y^2=2x^2y^2-x^2y^2$ と考えるところは同じである．そうすると $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$ の因数分解の公式が使えて

$$\begin{aligned}x^4+x^2y^2+y^4 &= x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2 \\ &= (x^2+y^2)^2-x^2y^2 \\ &= (x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2) \qquad (4.2)\end{aligned}$$

が得られる．

もう一つの 4 次式の因数分解公式として x^4+4y^4 を考えよう．これはちょっとみたら因数分解ができないようにみえるが，実は $x^4+4y^4=(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2)$ と因数分解できる [7]．

これについて考えてみよう．いま $x^2=p, 2y^2=q$ とおけば，$x^4+4y^4=p^2+q^2$ となる．考え方は上で文字タイルで説明したものと同じなので，式で計算をすると

$$\begin{aligned}x^4+4y^4 &= p^2+q^2+2pq-2pq \\ &= (p+q)^2-2pq \\ &= (p+q)^2-4x^2y^2 \\ &= (p-2xy+q)(p+2xy+q) \\ &= (x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2) \qquad (4.3)\end{aligned}$$

が得られる．

なんだか $x^4+x^2y^2+y^4$ と x^4+4y^4 の因数分解の公式がよく似ているので，ごっちゃになって混乱を起こしそうだが，xy の前の数係数が (4.2) の右辺では ± 1 であるが，(4.3) の右辺では数係数は ± 2 であるところが違いである．こういう細かい違いに気をつけておかなくてはならない．

5　おわりに

「因数分解の公式を忘れたら 1 」に引き続いて，この「2 」では 3 次の x^3-1 の因数分解と x^3+1 の因数分解を一般化することをまず考えた．その後に特殊な 3 次式と 4 次式の因数分解の公式を導いた．

特に難しいテーマを扱ったわけではない．ごくやさしいテーマであり，「そんなことを言われなくてもわかっているよ」と反発されるのがオチであろうか．

数学教育では因数分解はガラクタ教材だといういい方もよくされるが，むやみに複雑な因数分解は不必要かも知れないが，それでも 2 次 3 項式のような，基本的な因数分解が不要であるわけではない．それに教育的な要請からはずれて，自分たちで楽しむ分には目くじら立てることもない．ある年齢以上になると，学校とか試験とからはなれて数学を楽しむという層が日本にもできているという．

このエッセイのテーマもそういう方々のお役にも立てればいいと思わないでもない．

付録　(2.7), (2.8) の証明

この付録では (2.7), (2.8) を数学的帰納法で証明しよう．

まず，(2.7) の証明からはじめよう．$n=2$ のとき

$$x^2-a^2=(x-a)(x+a)$$

であるから $n=1$ のとき (2.7) は成り立つ．

つぎに $n=k$ のときに

$$x^k-a^k=(x-a)(x^{k-1}+ax^{k-2}+a^2x^{k-3}+\cdots+a^{k-1})$$

が成立するとすれば，

$$\begin{aligned}
x^{k+1}-a^{k+1} &= x\cdot x^k-a\cdot a^k \\
&= x(x^k-a^k)+a^kx-a\cdot a^k \\
&= x(x^k-a^k)+a^k(x-a) \\
&= x(x-a)(x^{k-1}+ax^{k-2}+a^2x^{k-3}+\cdots+a^{k-1})+a^k(x-a) \\
&= (x-a)(x^k+ax^{k-1}+a^2x^{k-2}+\cdots a^{k-1}x+a^k)
\end{aligned}$$

が成り立つ．

したがって，数学的帰納法により

$$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1}),\quad n:\text{正の整数} \tag{2.7}$$

が成り立つ．

つぎに (2.8) を証明しよう．n は正の奇数であるから，$n=2k+1$ とおく．そうすると

$$x^{2k+1}+a^{2k+1}=(x+a)(x^{2k}-ax^{2k-1}+a^2x^{2k-2}+\cdots-a^{2k-1}x+a^{2k}),\quad k:\text{正の整数}$$

を数学的帰納法で証明すればよい．

まず $n=3$ のときに

$$x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$$

であるから (2.8) が成り立つ．

つぎに $n=2k-1$ のときに

$$x^{2k-1}+a^{2k-1}=(x+a)(x^{2k-2}-ax^{2k-3}+a^2x^{2k-4}+\cdots-a^{2k-3}x+a^{2k-2})$$

が成り立つとすれば

$$\begin{aligned}
x^{2k+1}+a^{2k+1}&=x^2x^{2k-1}+a^2a^{2k-1}\\
&=x^2(x^{2k-1}+a^{2k-1})-a^{2k-1}x^2+a^2a^{2k-1}\\
&=x^2(x+a)(x^{2k-2}-ax^{2k-3}+a^2x^{2k-4}+\cdots-a^{2k-3}x+a^{2k-2})-a^{2k-1}(x^2-a^2)\\
&=x^2(x+a)(x^{2k-2}-ax^{2k-3}+a^2x^{2k-4}+\cdots-a^{2k-3}x+a^{2k-2})-a^{2k-1}(x+a)(x-a)\\
&=(x+a)(x^{2k}-ax^{2k-1}+a^2x^{2k-2}-\cdots-a^{2k-3}x^3+a^{2k-2}x^2-a^{2k-1}x+a^{2k})
\end{aligned}$$

したがって，数学的帰納法により $n=2k+1$ のとき

$$x^n+a^n=(x+a)(x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-\cdots-a^{n-2}x+a^{n-1}),\quad (n=2k+1) \tag{2.8}$$

が成り立つ．

(2012.4.4)(2019.3.31 改訂)

参考文献

[1] 矢野　忠，因数分解の公式を忘れたら 2，研究と実践（愛数協），No. 113 (2012.11) 22-27

[2] 矢野　忠，因数分解の公式を忘れたら 1，研究と実践（愛数協），No. 113 (2012.11) 16-21
この改訂版は「数学・物理通信」の今号のこのエッセイの前にある．
矢野　忠，因数分解の公式を忘れたら 1， 数学・物理通信，9 巻 2 号 (2019.3.31) 14-20

[3] 矢野　寛，『中学・高校における水道方式』（愛媛県数学教育協議会，1995） 28-32

[4] M. R. Spiegel，『数学公式・数表ハンドブック』（オーム社，1995） 2

[5] 松坂和夫，『代数への出発』（岩波書店，1982） 53

[6] 松坂和夫，『代数への出発』（岩波書店，1982） 53

[7] M. R. Spiegel，『数学公式・数表ハンドブック』（オーム社，1995） 2

なぜEuclidianでなくてEuclideanなのか？

Why is not Euclidian but Euclidean?

中 西　襄[*1]

Noboru NAKANISHI [*2]

数学者の名前に-an をつけて数学の術語が作られることがしばしばある．そのつなぎの文字が i か e かだが，ほとんどの場合 i が使われているようである．e であることが確かなのは，Euclidean である．

先日，矢野忠氏のブログを見ていたら，2019 年 2 月 15 日付けで「Hermitian か Hermitean か」という記事があり，彼自身は e だと思っていた由である．理由は書いてなかったが，Hermite の e の字を削ることに対する抵抗感だろうか．しかし，e で終わる人名に由来するものは，他にも Laplacian や Lagrangian がある．Lagrangian といえば，数年前アメリカでちょっとした論争があったようだ．素粒子屋で Lagrangean を使う人が多数あったことが問題となった．結局，Lagrangian に統一すべしということになったようだ．

人名プラス ian で数学の術語になっているものを，思い出す限り列挙してみよう．

微分演算子：　Laplacian, d'Alembertian;

行列式：　Jacobian, Wronskian, Hessian, Gramian; Pfaffian[*3];

汎関数：　Lagrangian, Hamiltonian;

性質：　Abelian, Hermitian, Gaussian, Newtonian;

空間の構造：　Minkowskian, Riemannian, Lorentzian, Grassmannian,.

他に，Yangian などというのも見かけた．

こうやって眺めてみると，その使用例はずいぶん雑多である．

ところで，人名プラス ean のほうは,，Euclidean 以外に一つも思い浮かばなかった．もしほかにないのならば，なぜ Euclidian とならないのだろうか．まさか Euclid だけが近世の人ではなかったからというわけでもあるまい．

まあ，こんなことをあまり深刻に考えても仕方がないかもしれない．

...Doudemoeigian...

（編集者（矢野）付記）　この中西先生の提起を受けて，ちょっと辞書を引いてみたら，-ean の例としては Euclid のように人名ではないが，European があることがわかった。圧倒的に-ian が多いことは事実のようである．辞書には-ian は-an の異形だとある．-an の意味としては「・・・の土地の（人）」「・・・に所属する（人）」「・・・属の，・・・科の」であり，例は Italian, republican, Hegelian, mammalian である．

[*1] 京都大学名誉教授

[*2] nbr-nak@trio.plala.or.jp

[*3] 偶数次交代行列式の平方根

読者の声

中西襄先生，世戸憲治先生
c.c. 編集発行人（矢野 忠）様

発行人さん,「数学・物理通信」9 巻 1 号をお送り下さいまして，どうもありがとうございました.

世戸先生が考察された管楽器の振動方程式とその固有振動としての音の高さに関する記事は，かつて私もフルートを吹いていたことがありますので興味津々で，そこに中西先生がとてもアクティブな形で関与しておられることを知って，深く感動致しました！

発行人さんがお送り下さった「数学・物理通信」9 巻 1 号がなかったら，そういう貴重なお話も知らず仕舞いで終わってしまっていたところでした.

皆様のご尽力に対して，重ね重ね感謝と感嘆の言葉をお伝え申し上げます.

なお，計算される固有振動が期待よりも高めにしか出ない，との世戸先生の remark について素人考えで恐縮ですが，私が思いましたことは，フルートのような simple な金属性で高めの音を出す楽器の場合は良い近似になっても，オーボエやクラリネット，等々の微妙な材質で作られ微妙なニュアンスのある音を出す楽器の場合には，その「微妙なニュアンスのある音」の形成のために高調波が fibrate されてしまっていて，音の高さを支配しているモードがそれよりも下方にある，というような可能性はないのでしょうか？

（小嶋 泉）

（編集者注：fibrate とはあまり聞かない言葉なので，小嶋さんにお尋ねしたところ，

> 「「微妙なニュアンスのある音」の形成のために高調波が fibrate されてしまっていて」という部分，数学的文脈だと，fibration，fibered structure, ファイバー束の構造，というような状況を思い浮かべて使った言葉ですが，そういうバックグラウンドを抜きにして意味が通じるようにするには，例えば,「絡みついて」とか「絡まって非線型構造を作り出して」とかいうような，少々回りくどい説明が必要かも知れません.

とのご説明をいただいた.

なお，この小嶋さんのメールに対する世戸さんのご返事を，これは「読者の声」とはちがうが，世戸さんのご厚意で下に掲載する．世戸さん，転載のご許可ありがとうございます.）

小嶋　泉　様

思いもかけず，小嶋さんからメールをいただきありがとうございます．私のつたない書き物を読んでいただいたそうで，大変光栄に思います.「数学・物理通信」には，いつも自分では面白いつもりで書いていますが，他人からみると何とつまらないことを書く人と思われているのではないかと考えていました．そんな折，小嶋さんから有益なコメントをいただき，今後の参考にしたいと思います.

小嶋さんはフルートをやっていたそうですが，私も，妻がフルートをやっていたので，試しに，やってみたのですが，なかなか音を出すこと自体が難しく，サックスに変えてしまいました．その後，音楽の勉強はある程度やってみました．いまは，退職後の良い暇つぶしになっています.

（世戸憲治）

編集後記

皆様にはご健勝にお過ごしのことと存じます．

この「数学・物理通信」9 巻 2 号は 3 月中の発行はまったく望めないと一度はあきらめていました．

それでも，私がブログでちょっとつぶやいたところ，世戸さんから投稿できる原稿があるのだけれどというメールをもらいトントン拍子にめでたく，この 2 号の発行にこぎつけました．いつものことながら，世戸さんのご投稿ありがとうございました．

世戸さんの知的好奇心とそれを追究する能力に眼を見張っています．ささやかですが，彼の論文の発表の場としての「数学・物理通信」の存在意義もあろうかと思っています．

それに中西先生からも短いですが，エッセイのご投稿をいただきました．ありがとうございました．

今回，はからずも小嶋　泉さんから 9 巻 1 号に掲載の世戸さんの論文について感想をいただいたので，読者の声欄に掲載させていただいた．

皆様には今後ともに，ご愛読をお願いします．

（矢野　忠）