

数学・物理通信

9 卷 3 号 2019 年 6 月

編集 新関章三・矢野 忠

2019 年 6 月 20 日

目次 (Contents)

1. 微分方程式における興味ある問題 (3) 一等時曲線と壺の形ー

世戸憲治 3

2. べき乗和とベルヌーイ数

吉泉豊春 11

3. ベルヌーイ多項式とべき乗和

矢野 忠 17

4. ベクトルの三重積の記憶法

矢野 忠 20

5. 読者の声

安尾南人, 編集者 23

6. 編集後記

矢野 忠 24

1. Interesting Problems in Differential Equation (3) —Equal-Time Curve and Pot Shape—	Kenji SETO	3
2. Sums of kth Powers and Bernoulli Numbers	Toyoharu YOSHIIZUMI	11
3. The Bernoulli Polynomials and Sums of kth Powers	Tadashi YANO	17
4. A Mnemonics of Vector Triple Products	Tadashi YANO	20
5. E-mails from Readers	Minato YASUO and The Editor	23
7. Editorial Comments	Tadashi YANO	24

微分方程式における興味ある問題 (3)

一等時曲線と壺の形一

世戸 憲治 *

Interesting Problems in Differential Equation (3)

—Equal-Time Curve and Pot Shape—

Kenji SETO*

1 はじめに

「はじめての逆問題」(数理科学別冊, サイエンス社)を読んでみた. 今回はこの中から2つの話題「落下運動に関する等時曲線」と「壺の形を求める問題」を取りあげる. いずれも簡単な微分方程式の問題であるが, この本に書かれた内容よりも少し拡張した形で紹介する.

2 落下運動に関する等時曲線

Galileo は, 重力下での落下運動を初めて科学的に研究した人として良く知られている. その Galileo が述べたことに, 「鉛直面内で円を描き, その円の頂点から円周上の任意の点まで引いた直線に沿って, ある物体を落下させたとき, それに要する時間は, 円周上の点の位置に依存しない. つまり, 円周上の点の位置がどこであってもそれに要する時間は皆同じになる.」というのがある. 一般に, ある傾斜がついた斜面に沿って物体が落下するとき, 一定時間経過したときの物体の位置を, 斜面の傾斜を変えて結んだ曲線を「等時曲線」というが, この等時曲線が円になるということである. もちろん, これは, 空気抵抗, 摩擦抵抗などをすべて無視したときの話であるが, これを考慮したときはどうなるかというのがここでの問題である.

2.1 摩擦, および, 抵抗を無視したとき

図1に示すように, 水平に x 軸, 鉛直下向きに y 軸をとる. この原点 O から, 傾斜角 θ の斜面に沿って, 摩擦なしに, 初速度ゼロで, 質量 m の物体を落下させる. 落下した距離を r とし, 重力加速度を g とすると, 重力 mg の斜面方向成分は, $mg \sin \theta$ となるので, その運動方程式は

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = mg \sin \theta \quad (2.1)$$

となる. この方程式は, 2度積分するだけで, すぐに解け, 初期位置, 初速度をゼロとしたときの解は,

$$r = \frac{1}{2} g t^2 \sin \theta \quad (2.2)$$

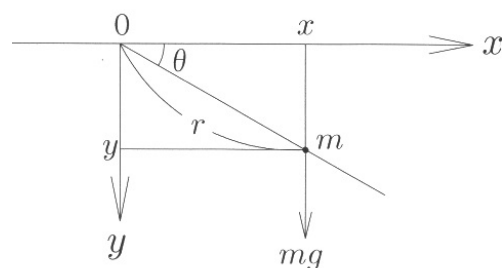


図 1

* 北海学園大学名誉教授

E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

となる。ここで、この式の両辺に r を掛け、デカルト座標 (x, y) と極座標 (r, θ) の関係式

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad x^2 + y^2 = r^2 \quad (2.3)$$

を用いると、

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}gt^2y, \quad \text{すなわち,} \quad x^2 + \left(y - \frac{1}{4}gt^2\right)^2 = \left(\frac{1}{4}gt^2\right)^2 \quad (2.4)$$

となる。これは、時間 t を一定と見なしたとき、 x 軸に接する半径 $\frac{1}{4}gt^2$ の円である。これが、Galileo が言う等時曲線が円になるということである。

2.2 速度に比例する抵抗を考慮したとき

つぎに、速度に比例する抵抗 $k_1(dr/dt)$ を考慮したときの運動方程式は

$$m \frac{d^2r}{dt^2} = mg \sin \theta - k_1 \frac{dr}{dt} \quad (2.5)$$

と、(2.1) 式と同じく非同次微分方程式となる。ただし、この方程式は単純に積分するだけでは解けず、この解は、非同次部分の特解と同次部分の一般解の和となるので A, B を任意定数として、

$$r = \frac{mg \sin \theta}{k_1} t + A + B e^{-(k_1/m)t} \quad (2.6)$$

となる。ここで、初期条件

$$r(0) = 0, \quad \left. \frac{dr}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad (2.7)$$

を満たすように A, B を決めると、解は、

$$r = 2D(t) \sin \theta, \quad D(t) = \frac{mg}{2k_1} \left[t - \frac{m}{k_1} (1 - e^{-(k_1/m)t}) \right] \quad (2.8)$$

と求められる。ここに、 $D(t)$ は時間依存部分で、この第 2 式で定義する。前の抵抗が存在しないときと同じように、この第 1 式の両辺に r を掛け、(2.3) 式を用いて (x, y) 座標になおすと、

$$x^2 + (y - D(t))^2 = D^2(t) \quad (2.9)$$

となり、この場合も、等時曲線は半径 $D(t)$ の円になることが分かる。この $D(t)$ を抵抗係数 k_1 で展開すると、

$$D(t) = \frac{g}{4}t^2 \left(1 - \frac{k_1}{3m}t + \frac{k_1^2}{12m^2}t^2 + \dots \right) \quad (2.10)$$

となって、 k_1 が大きくなるにつれ、円の半径は小さくなる。

2.3 等時曲線が円になるためには

抵抗による力を $f(r, dr/dt)$ とする。このときの運動方程式は

$$m \frac{d^2r}{dt^2} = mg \sin \theta - f\left(r, \frac{dr}{dt}\right) \quad (2.11)$$

であるが、これを解いたときの解が、(2.8) 第 1 式と同じ形、

$$r = 2D(t) \sin \theta \quad (2.12)$$

になったとする．ここで、もし、 $D(t)$ が θ に依存しなければ、これまでの考察から、これは、原点で x 軸に接する半径 $D(t)$ の円となる．この式を方程式 (2.11) に代入すると、

$$2m \frac{d^2 D(t)}{dt^2} = mg - \frac{1}{\sin \theta} f \left(2D(t) \sin \theta, 2 \frac{dD(t)}{dt} \sin \theta \right) \quad (2.13)$$

となるが、この式の右辺 2 項目は θ に依存しない形にならないといけない．このとき、 $f(r, dr/dt)$ が r , dr/dt について線形で、 A, B を定数として、

$$f \left(r, \frac{dr}{dt} \right) = Ar + B \frac{dr}{dt} \quad (2.14)$$

の形であれば満たされる．しかし、この条件は、(2.13) 式右辺 2 項目が θ に依存しないための十分条件であって、必要条件ではない．何故なら、 $(1/r)dr/dt$ は θ に依存しない量なので、 A, B が $(1/r)dr/dt$ という項を含んでもよいからである．もし、 $f(r, dr/dt)$ が r または dr/dt のどちらか一方のみの関数の場合は、文字通り、 r または dr/dt について線形であればよい．

f が r に依存するときは、これは、ばねによる力のようなものである．また、落下物体と斜面の間に摩擦があると抵抗力 f には $\cos \theta$ が含まれるが、等時曲線が円になるためには、これも、いけないということである．

2.4 速度の 2 乗に比例する抵抗の場合

抵抗が速度の 2 乗に比例する場合を考える．抵抗力を $k_2(dr/dt)^2$ として、運動方程式は

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = mg \sin \theta - k_2 \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \quad (2.15)$$

となる．ここでの k_2 は、(2.5) 式の k_1 と次元が違うことに注意．これを解くために、以下 $\dot{r} = dr/dt$ と置くことにして、方程式を

$$m \frac{d\dot{r}}{dt} = mg \sin \theta - k_2 \dot{r}^2 \quad (2.16)$$

とし、変数分離して積分形にすると、

$$\int \frac{m d\dot{r}}{mg \sin \theta - k_2 \dot{r}^2} = t \quad (2.17)$$

となる．この積分を実行すると、

$$\log \left(\frac{\sqrt{mg \sin \theta} + \sqrt{k_2} \dot{r}}{\sqrt{mg \sin \theta} - \sqrt{k_2} \dot{r}} \right) = \frac{2t}{t_0}, \quad t_0 = \sqrt{\frac{m}{k_2 g \sin \theta}} \quad (2.18)$$

となる．ここに、数式簡略化のため、時間の次元を持つ定数 t_0 をこの第 2 式で定義する．また、ここでは、 $t = 0$ のとき $\dot{r} = 0$ とした．これを、 $\dot{r}$ について解くと、

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{mg \sin \theta}{k_2}} \tanh(t/t_0) \quad (2.19)$$

となるので、これをさらに積分して、 $t = 0$ で $r = 0$ となる解は、

$$r = \frac{m}{k_2} \log [\cosh(t/t_0)] \quad (2.20)$$

と求められる．この式からわかるように、この場合の等時曲線は円にはならない．この r を k_2 で展開すると、

$$r = \frac{1}{2} g t^2 \sin \theta - \frac{k_2 g^2}{12 m} t^4 \sin^2 \theta + \dots \quad (2.21)$$

となる．

2.5 数値計算例

ここで、これまでの結果に基づいた数値計算例を示す．適当ではあるが、これまでに出てきたパラメータを

$$m = 1 \text{ kg}, \quad g = 9.8 \text{ m/s}^2, \quad k_1 = 0.5 \text{ kg/s}, \quad k_2 = 0.5 \text{ kg/m} \quad (2.22)$$

と選ぶことにする．この上で、抵抗が存在しない場合の (2.4) 式、および、線形の抵抗が存在するときの (2.9) 式に基づいて、円となる等時曲線を描いたのが、以下の図 2、図 3 である．また、抵抗が速度の 2 乗に比例する場合の (2.20) 式に基づいて円とはならない等時曲線を描いたのが、図 4 である．これらの図では、いずれも、時間は、 $t = 1 \text{ s}$, $\sqrt{2} \text{ s}$, $\sqrt{3} \text{ s}$ の 3 通りの場合を描いた．当然のことながら、抵抗が入ると単位時間あたりに進む距離は短くなる．ここでの図は、等時曲線の大きさがほぼ同じ大きさになるように、図毎にそのスケールを変えている．これらの図で x , y 軸に付けた 1 目盛り分の長さは、どの図でも 1m を意味する．

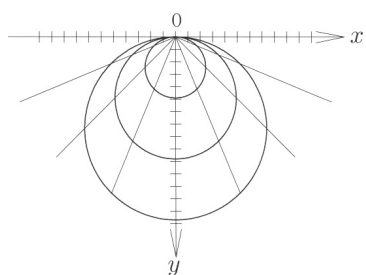


図 2 抵抗が存在しない場合

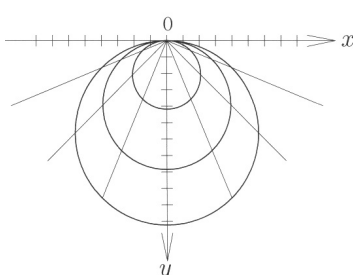


図 3 速度に比例する抵抗の場合

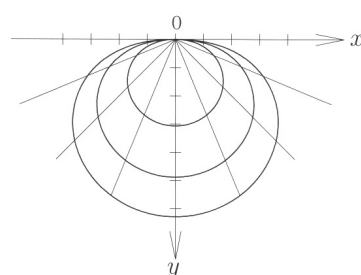


図 4 2 乗に比例する抵抗の場合

図 2、図 3 における等時曲線は、これまでの議論のとおり円である．しかし、図 4 のそれは、一見、円に見えるが、よく見ると円ではなく上下方向に少し潰れたトマトのような形になっている．

3 壺の形を求める問題

3.1 方程式の導入とその解法

図 5 に示すように、水が入った壺があるものとする．壺の底の中心を原点として、水平方向に x 軸、壺の中心を通る鉛直上方向に y 軸をとる．この壺は中心軸に対し回転対称な形に作られているものとし、高さ y におけるその回転半径 x を

$$x = f(y) \quad (3.1)$$

とする*1．

この壺の底の部分には断面積 S_0 の小さな穴が開いていて、そこから中の水が水平方向に飛び出すものとする．あるいは、壺に穴を開けたくなければ、サイフォンの原理を使って、水を満たした細いチューブの一端を壺の中の底の部分に、他の一端を壺の外の底と同じ高さのところに水平向きで固定すればよい．このとき、壺の形が分かっていたら、この水が飛び出す速度を時間的に求めることができるし、また逆に、水が飛び出す速度が時間的に分か

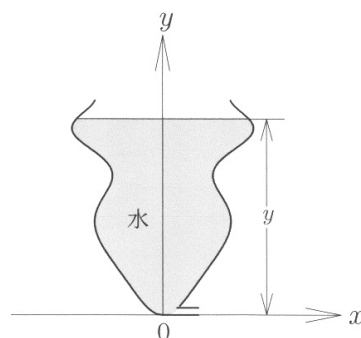


図 5

*1 以下の議論のためには、壺の形は、回転対称である必要はなく、任意の高さにおける断面積が分かっていたらよい．しかし、実際の壺は回転対称に作られたものが多いので、ここでは回転対称として話を進める．

れば、それから壺の形を求めることもできる。壺の底に付けた穴から水が飛び出す速度を測定するには、一定の鉛直距離を落下せたときの水平方向に移動した距離を測定するとよい*2。

いま、水を流し始めてからの経過時間を t として、このときの壺の中に入っている水の高さを $y(t)$ とし、底の穴から水が飛び出す速度を $v(t)$ とする。いま、微小時間 Δt の間に飛び出した水の質量を Δm とすると、その運動エネルギーは $\frac{1}{2}\Delta m v^2(t)$ であり、この分だけ水の上の方では、質量 Δm 分の水の位置エネルギー $\Delta m g y(t)$ が失われることになるので、これを等しいとくと、

$$\frac{1}{2}\Delta m v^2(t) = \Delta m g y(t), \quad \text{すなわち,} \quad v(t) = \sqrt{2gy(t)} \quad (3.2)$$

となる。この速度と高さの関係式は Torricelli の原理としてよく知られたものである。また、時間 Δt の間に出ていった水の体積は $S_0 v(t) \Delta t$ なので、これはその間に水の水位が下がった高さ Δy に断面積 $\pi f^2(y)$ を掛けたものに等しい、すなわち、

$$S_0 v(t) \Delta t = -\pi f^2(y) \Delta y \quad (3.3)$$

となる。ここで、 Δy が負であることに注意する。これは、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限で、

$$S_0 v(t) = -\pi f^2(y) \frac{dy}{dt}, \quad \text{あるいは, (3.2) 式を用いて,} \quad S_0 \sqrt{2gy} = -\pi f^2(y) \frac{dy}{dt} \quad (3.4)$$

となる。当然のことながら、水が出た分だけ水の高さは減っていくので、 $y(t)$ は時間の単調減少関数、したがって速度 $v(t)$ も単調減少関数である。この (3.4) 第 2 式を変数分離して積分すると

$$t = -\frac{\pi}{S_0 \sqrt{2g}} \int_{y_0}^y \frac{f^2(u)}{\sqrt{u}} du \quad (3.5)$$

となる。ここに、 y_0 は $t=0$ における水の高さ、 y は時刻 t における高さである。 $f(u)$ が既知で、この積分が実行されると y と t の関係が求まるので、これを y について解き、 $y = y(t)$ が求まり、(3.2) 式から $v(t)$ も求まる。

つぎに、この逆問題、 $v(t)$ が分かって $f(r)$ を求める問題を考える。(3.2) 式を 2 乗してから t で微分すると、

$$v \frac{dv}{dt} = g \frac{dy}{dt} \quad (3.6)$$

となるので、この式と (3.4) の第 1 式から、 dy/dt を消去すると、 f が

$$f = \sqrt{-\frac{S_0 g / \pi}{dv/dt}} \quad (3.7)$$

と求められる。 $v = v(t)$ は既知としているので、その微分である dv/dt も既知と考えてよい。先ほど述べたように $v(t)$ は単調減少関数なので、 $dv/dt < 0$ となる。ただし、このままでは、 f が時間 t の関数として求められたことになるので、これを y の関数に直す必要がある。そのためには、(3.2) 式 $v(t) = \sqrt{2gy}$ を t について解き、 $t = t(y)$ の形にし、(3.7) 式の dv/dt に代入することになる。以下、これを具体例でみていく。

3.2 具体例：その 1

(3.5) 式の積分が実行可能で、かつ、その結果の式から y を t の関数として解析的に求めることができる例は非常に限られてしまう。ここでは、多少、技巧的ではあるが、

$$f(y) = \sqrt{yy_0(ay_0 - by)}, \quad a > b > 0 \quad (3.8)$$

*2 水が出てから経過した時間を t_1 とすると、鉛直方向に落下した距離は $\frac{1}{2}gt_1^2$ でこれが一定値 ℓ になる時間は $t_1 = \sqrt{2\ell/g}$ となる。一方、この間に水平方向に移動した距離は $v(t)t_1 = v(t)\sqrt{2\ell/g}$ となるので、この距離を測定することで、 $v(t)$ が求められる。

という場合を考える．ここに， y_0 は初めに入っていた水の高さ， a, b は無次元定数である．これを (3.5) 式に代入し，積分を実行すると，

$$t = \frac{t_0}{S_0} [by^2 - 2ay_0y + (2a - b)y_0^2], \quad t_0 = \frac{\pi\sqrt{y_0}}{2\sqrt{2g}} \quad (3.9)$$

となる．ここに，時間の次元を持つ定数 t_0 をこの第 2 式で定義する．これから，2 次方程式を解いて， y を t の関数として求めると，

$$y(t) = \frac{1}{b} \left[ay_0 - \sqrt{(a - b)^2 y_0^2 + (t/t_0) b S_0} \right] \quad (3.10)$$

と求められる．ここで，平方根の前の符号は， $t = 0$ のとき $y = y_0$ となるように，マイナスの方の符号をとることに注意する．この $y(t)$ を (3.2) 式に代入すると，速度 $v(t)$ が

$$v(t) = \sqrt{\frac{2g}{b} \left[ay_0 - \sqrt{(a - b)^2 y_0^2 + (t/t_0) b S_0} \right]} \quad (3.11)$$

と求められる．逆に，この $v(t)$ を時間 t で微分してから，(3.10) 式を用いて， t を y で表すように変形すると，

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{S_0 g}{\pi \sqrt{y_0 y} (ay_0 - by)} \quad (3.12)$$

となるので，これを (3.7) 式に代入すると，(3.8) 式の $f(y)$ が再現される．

3.3 具体例：その 2

先の具体例とは逆に，速度 $v(t)$ を先に

$$v(t) = \frac{v_0}{1 - a} (e^{-t/t_0} - a), \quad 0 < a < 1 \quad (3.13)$$

と与えた場合を考える．ここに， v_0, t_0 は，それぞれ，速度，時間の次元を持つ定数，また， a は無次元の定数である． v_0 は $t = 0$ のときの速度で，そのときの y を y_0 とすると，(3.2) 式から

$$y_0 = \frac{v_0^2}{2g} \quad (3.14)$$

である．また， $e^{-t/t_0} = a$ で速度はゼロとなるので，時間に対し，

$$0 \leq t \leq -t_0 \log a \quad (3.15)$$

という制限が付く．この (3.13) 式で与えられた $v(t)$ を (3.2) 式に代入し， t を y の関数として求めると，

$$t = -t_0 \log \left(a + \frac{1 - a}{v_0} \sqrt{2gy} \right) \quad (3.16)$$

となり，さらに，(3.13) 式の $v(t)$ を時間で微分してから，この t を代入すると，

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{v_0}{t_0(1 - a)} e^{-t/t_0} = -\frac{1}{t_0} \left(\frac{a}{1 - a} v_0 + \sqrt{2gy} \right) \quad (3.17)$$

となる．これを (3.7) 式に代入して， $f(y)$ が

$$f(y) = \sqrt{\frac{S_0 t_0 g / \pi}{\frac{a}{1 - a} v_0 + \sqrt{2gy}}} \quad (3.18)$$

と求められる．

逆にこの $f(y)$ を (3.5) 式に代入すると、

$$t = -t_0 \sqrt{\frac{g}{2}} \int_{y_0}^y \frac{du}{\sqrt{u(\frac{a}{1-a}v_0 + \sqrt{2gu})}} = -t_0 \sqrt{2g} \int_{\sqrt{y_0}}^{\sqrt{y}} \frac{dp}{\frac{a}{1-a}v_0 + \sqrt{2g}p} = t_0 \log \left(\frac{\frac{a}{1-a}v_0 + \sqrt{2gy_0}}{\frac{a}{1-a}v_0 + \sqrt{2gy}} \right) \quad (3.19)$$

と積分される．これから $\sqrt{2gy}$ を求め、(3.14) 式から $\sqrt{2gy_0} = v_0$ を用いると、

$$\sqrt{2gy} = \frac{v_0}{1-a} (e^{-t/t_0} - a) \quad (3.20)$$

となって、これは (3.2) 式から $v(t)$ に他ならず、(3.13) 式が再現されたことになる．

3.4 具体例：その 3

16 世紀にゼンマイ時計、18 世紀に振子時計が発明されるが、それ以前は、水時計が主として使われていた*3．この水時計では、水の水位が、時間的に一定の割合で、下がっていくものが良いはずで、

$$y(t) = y_0 - v_0 t \quad (3.21)$$

とした場合を考えてみる．ここに y_0 は $t = 0$ のときの水位、 v_0 は速度の次元を持つ定数とする．このときの壺の形はどうなるかという問題である．このときの水が出る速度は (3.2) 式から

$$v(t) = \sqrt{2g(y_0 - v_0 t)} \quad (3.22)$$

となり、これを時間 t で微分すると、

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v_0 \sqrt{2g}}{2\sqrt{y_0 - v_0 t}} = -\frac{v_0 \sqrt{2g}}{2\sqrt{y(t)}} \quad (3.23)$$

となる．これを (3.7) 式に代入して、

$$f(y) = \sqrt{\frac{S_0 \sqrt{2gy}}{\pi v_0}} \quad (3.24)$$

という結果となる．これは壺の形状関数 $f(y)$ が $y^{1/4}$ に比例するとき、水の水位は一定の割合で、下がっていくことを意味する．古代エジプト時代に作られた陶器製の水時計はすり鉢型になっていて、この形を思わせるものがある．しかし、中国で作られた漏刻は、木製の箱型の物が多段式に組み合わさったもので、この形とはまったく別物である．

なお、ここでの計算は、「具体例：その 1」で、(3.8) 式の b をゼロとした特別な場合に相当する．

4 おわりに

「はじめに」のところで述べた本には、3 節で扱った「壺の形を求める問題」のところで、具体例がほとんど載っていなかったもので、ここで取り挙げた 2 つの「具体例：その 1、その 2」は、私の創作である．本来ならば、図 5 に挙げたような曲線に富んだ壺の形の計算例ができるとよかったのだが、そのためには、(3.8) 式平方根の中の括弧の中が y の 1 次式になっているが、この次数を上げて 2 次式、3 次式にするか、あるいは、三角関数を入れることになる．しかしそうすると、(3.5) 式の積分はできてもその結果から y を t の関数として求めることが解析的に不

*3 もちろん、この他に、日時計や砂時計があった．しかし、日時計は、曇っている日や、夜には使えないこと、砂時計は短時間用しか使用できないことなどの不便があったため、いつでも使える長時間用としては水時計が使われていた．

可能，あるいは，可能であっても，大変面倒なことになってしまう．結果としてあまり面白くもない壺の形しか例として挙げるができなかった．これは，少し心残りでもある．

[謝辞]

いつものことながら，京都大学名誉教授の中西襄先生にこの原稿を見ていただき，たくさんのコメントをいただきました．特に，(2.14) 式のところで，係数 A, B が $(1/r)dr/dt$ を含んでいても，(2.13) 式の右辺 2 項目が θ 独立になることに，気付かされてくれたのは先生のおかげです．また，脚注 1, 脚注 3 は先生のご意見にしたがって付けたものです．先生に心から感謝いたします．

べき乗和とベルヌーイ数

吉泉 豊晴 ^{*1}

Sums of k th Powers and Bernoulli Numbers

Toyoharu YOSHIIZUMI ^{*2}

1 はじめに

ベルヌーイ数は、スイスの数学者 ヤコブ・ベルヌーイ (1654~1705) が見いだしたといわれる。日本でも関孝和 (?~1708) がほぼ同時期に同じ数を見出していたようだ。

ベルヌーイ数は有理数から構成される数列である。初項を 0 番とすると, 3, 5, 7, 9, …… の奇数番号はいずれも 0 となる。1 番だけは例外で $-\frac{1}{2}$ という値。いくつか列記すると次のとおり。

$$\begin{array}{llll} B_0 = 1 & B_1 = -\frac{1}{2} & B_2 = \frac{1}{6} & B_4 = -\frac{1}{30} \\ B_6 = \frac{1}{42} & B_8 = -\frac{1}{30} & B_{10} = \frac{5}{66} & B_{12} = -\frac{691}{2730} \\ B_{14} = \frac{7}{6} & B_{16} = -\frac{3617}{510} & B_{18} = \frac{43867}{798} & B_{20} = -\frac{174611}{330} \end{array}$$

印象として何とも不揃い・不規則な感じを受けるが、ベルヌーイ数は $\frac{x}{e^x-1}$ をテイラー展開したときの展開係数である。また、ゼータ関数の値を算出するときも顔をのぞかせる。ここでは、自然数のべき乗和の算出の中からベルヌーイ数がどのように立ち現れてくるのかをみてみよう。

以下では 1 が決まれば 2, 3, 4, 5 …… がドミノ倒しのように次々と定まっていくという帰納法の考え方が重要な位置を占める。あるいは、逆からいうと 5^k の箱を開くと 4^k があり、その 4^k のふたを開けると 3^k があって …… という入れ子構造を開いていく手続きでもある。ある意味で単純ではあるが厄介な側面を持つ数列だ。丹念にたどることにしよう。

2 自然数の和

ここでは連続する自然数のべき乗和を次のように書きあらわす。

$$\begin{aligned} s_1(n) &= 1 + 2 + 3 + \cdots + n \\ s_2(n) &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 \\ &\vdots \\ s_k(n) &= 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k, (k \text{ は } 1 \text{ 以上の整数}) \end{aligned}$$

まずは手始めに、単純な自然数の和 $s_1(n)$ を考える。よく知られているのは初項と最終項を加算した値に注目する方法だ。1~10 の総和を求める場合、 $1+10=2+9=3+8=\cdots=11$ に注目する。結局、 $s_1(n) = \frac{1}{2}n(n+1)$ という式が成り立つ。

ただ、この考え方は 2 乗の和 $s_2(n)$ の算出には応用できない。そこで、2 項定理を用いて自然数の和を算出することを考える。 $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ を利用する。2 乗の 2 項展開を持ち出すが、計算するのは 2 乗の和ではなく単純な自然数の和だ。

^{*1} 職業能力開発指導官 (厚生労働省)

^{*2} t-yoshiizumi@msb.biglobe.ne.jp

1~4 の総和を算出する場合、まず 5^2 に着目してみよう。

$5^2 = (4+1)^2 = 4^2 + 2 \times 4 + 1^2$ となるが、この式の 4^2 は $(3+1)^2$ として展開できる。つまり次の式が成り立つ。

$$5^2 = (3^2 + 2 \times 3 + 1) + 2 \times 4 + 1$$

さらに 3^2 の箱を開けて $(2+1)^2 = 2^2 + 2 \times 2 + 1$ を組み入れる。結局、下の式が成立することになる。

$$\begin{aligned} 5^2 &= 2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 + 2 \times 4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ &= 2 \times (1 + 2 + 3 + 4) + 5 \\ &= 2s_1(4) + 5 \end{aligned}$$

一般化して書けば

$$s_1(n) = \frac{1}{2}[(n+1)^2 - (n+1)] = \frac{1}{2}n(n+1)$$

となる。「すばっと解決」の爽快感はないが、この 2 項定理を利用する方法は 2 乗の和、3 乗の和に応用可能だ。

3 2 乗の和とベルヌーイ数

2 乗の和を考える場合は 3 乗の 2 項展開を用いる。

$$5^3 = (4+1)^3 = 4^3 + 3 \times 4^2 + 3 \times 4 + 1$$

この式の 4^3 の箱を開けて、さらにその中の 3^3 を開けて …… という操作を繰り返すと、次の式が導かれる。

$$5^3 = 3s_2(4) + 3s_1(4) + 5$$

これを一般化して書くと

$$(n+1)^3 = 3s_2(n) + 3s_1(n) + n + 1$$

右辺に出てくる二つの 3 は、それぞれ 2 項係数 $\binom{3}{2}, \binom{3}{1}$ の具体的な値である。

前掲の式には $n+1$ が何度か出てきて展開するのが面倒なので $s_2(n-1)$ を考える。そうすれば $n+1 \rightarrow n$ となって展開が容易だ。

$$\begin{aligned} n^3 &= 3s_2(n-1) + 3s_1(n-1) + n \\ 3s_2(n-1) &= n^3 - 3s_1(n-1) - n \\ s_2(n-1) &= \frac{1}{3}(n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n) \end{aligned}$$

ここで少々強引な感じはするが、各項の係数に 2 項係数を持ち出す。 n^3 には $\binom{3}{3}$ が、 n^2 には $\binom{3}{2}$ が、そして n には $\binom{3}{1}$ が掛けられているものと仮定する。すると、次のように書き表すことができる。

$$s_2(n-1) = \frac{1}{3} \left[\binom{3}{3}n^3 + \binom{3}{2}\frac{-1}{2}n^2 + \binom{3}{1}\frac{1}{6}n^1 \right]$$

2 項係数以外で各項に掛けられている数を取り出すと、 $1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{6}$ となる。実は、これらの数がベルヌーイ数の 0 番から 2 番に該当する。つじつま合わせのような印象を受けるが、ベルヌーイ数が 3 乗の和、4 乗の和などにもぶれることなく立ち現れるのをみると、意味のある数なのだろう。

ちなみに、 $s_1(n-1)$ を同様の形式で書き表すと

$$s_1(n-1) = \frac{1}{2} \left[\binom{2}{2}n^2 + \binom{2}{1}\frac{-1}{2} \right]$$

となって、ベルヌーイ数の 0 番と 1 番がちゃんと顔を出している。

4 べき乗和の多項式における定数項

少し横道にそれるが、後述の微積分の話題の下準備として触れておきたい。自然数のべき乗和を算出するための多項式 $s_k(n-1)$ の任意の k について、いずれも定数項が存在しないという特徴についてである。

$s_k(n-1)$ について成り立つ式をいくつか列記してみよう。

$$\begin{aligned}2s_1(n-1) &= n^2 - n \\3s_2(n-1) &= n^3 - n - 3s_1(n-1) \\4s_3(n-1) &= n^4 - n - 4s_1(n-1) - 6s_2(n-1) \\&\dots \\(k+1)s_k(n-1) &= n^{k+1} - n - \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k+1}{i} s_i(n-1), \quad k \text{ は } 2 \text{ 以上の整数}\end{aligned}$$

まず $s_1(n-1)$ には定数項がない。そして、 $s_1(n-1)$ に定数項がなければ必然的に $s_2(n-1)$ も定数項を持たない。この帰納法的繰り返しは $s_3(n-1)$ 以降についても当てはまる。結局、任意の k について $s_k(n-1)$ には定数項が存在しないこととなる。したがって、 $s_k(n-1)$ の展開式が何らかの多項式を積分して得られる場合、その定数項を考える必要がない。

また、 $n=1$ のときの $s_k(n-1)$ の値が 0 となることも確認しておきたい。前掲の各式の初項と第 2 項は $n^2 - n, n^3 - n, n^4 - n$ といった形になっており、 $n=1$ のとき、いずれも 0 である。つまり、任意の k について $s_k(0) = 0$ が成り立つ。

ちなみに、詳細は省くが、これら初項と第 2 項の組を $n(n-1)$ によって除して得られる式は、それぞれ $1, (n+1), (n^2+n+1), (n^3+n^2+n+1)$ のように等比数列の和になる。

5 べき乗和と微積分

べき乗和を微積分の視点から眺めてみよう。 x, y 座標で自然数の和を考えると、 $y=x$ と整数軸との交点を階段状に上っていく棒グラフを描いたとき、棒が占める面積の総和、つまり、階段の上辺と x 軸との間の面積の総和となる。

かなり乱暴な言い方だが、この棒グラフをうんと遠くから見た場合、階段のギザギザが見えなくなって $y=x$ の直線が描くスロープに見えるのではないか。その遠くの視点からすると、求めたい総和が $y=x$ を積分した式 $y = \frac{1}{2}x^2$ で算出できそうだと考えるに違いない。

もちろん階段のギザギザを無視するわけにはいかないので、視点を近づければ補正する必要性を自覚するはずだ。とはいえ、大雑把な傾向としてはスロープの下側の面積からそれほど離れた値にはならないと推測するだろう。単なるイメージにすぎないが、この遠くの視点は 2 乗の和、3 乗の和 …… にも当てはまるような感じがしないだろうか。

$f(x) = s_k(x-1)$ と置いて、その導関数を $f'(x)$ とした場合、面積と関連付けていうと、1 以上の任意の x について次の定積分の式が面積算出の式となる。

$$\int_1^x f'(t) dt = f(x) - f(1)$$

ここで $f(1) = 0$ であるから、この定積分の式は、不定積分 $\int f'(x) dx$ と同じものとなる。以下では便宜的に不定積分を用いる。

具体的に $s_1(x-1), s_2(x-1)$ についてみてみよう.

$s_1(x-1) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$ の右辺を微分すると $x - \frac{1}{2}$ となるので積分記号を使って次のように表記できる.

$$s_1(x-1) = \int (x - \frac{1}{2}) dx$$

ここで $s_2(x-1)$ に関する式を想起すると $x^3 = 3s_2(x-1) + 3s_1(x-1) + x$ であるから下のように記述できる.

$$\begin{aligned} s_2(x-1) &= \frac{1}{3}x^3 - \int (x - \frac{1}{2}) dx - \frac{1}{3}x \\ &= \int (x^2) dx - \int (x - \frac{1}{2}) dx - \int \frac{1}{3} dx \\ &= \int (x^2 - x + \frac{1}{6}) dx \end{aligned}$$

同様に $s_3(x-1)$ を考えると $x^4 = 4s_3(x-1) + 6s_2(x-1) + 4s_1(x-1) + x$ を積分記号を使ってあらわすと

$$s_3(x-1) = \int (x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x) dx$$

となる.

$s_1(x-1), s_2(x-1), s_3(x-1)$ それぞれを微分したとき, 定数項がベルヌーイ数の 1 番から 3 番に該当することとがわかる. さらに, 2 項係数を組み入れて表記すると下のように書き表せる.

$$\begin{aligned} s_1(x-1) &= \int \left[\binom{1}{1} x + \binom{1}{0} \frac{-1}{2} \right] dx \\ s_2(x-1) &= \int \left[\binom{2}{2} x^2 + \binom{2}{1} \frac{-1}{2} x + \binom{2}{0} \frac{1}{6} \right] dx \\ s_3(x-1) &= \int \left[\binom{3}{3} x^3 + \binom{3}{2} \frac{-1}{2} x^2 + \binom{3}{1} \frac{1}{6} x + \binom{3}{0} \times 0 \right] dx \end{aligned}$$

定数のところだけでなく他の項についてもベルヌーイ数が 2 項係数と組み合わせる形で出現している. これまで書いてきたことから容易に予想できるとおり, ベルヌーイ数と 2 項係数を用いて $s_k(x-1)$ を次のように記述できる.

$$s_k(x-1) = \int \left[\sum_{i=0}^k B_i \binom{k}{i} x^{k-i} \right] dx$$

$y = x, y = x^2, y = x^3$ といったスロープや曲線を基準にした場合, ベルヌーイ数と 2 項係数の組み合わせが, べき乗和の織りなす階段状のギザギザの差分を明示するための補助線 (直線または曲線) を与えているといえる. 埋め合わせ部分を別の形で示しているわけだ. なかなか興味深い性質である.

6 ベルヌーイ数の計算

べき乗和を求めるための多項式を導く場合, 2 項定理を使う際にベルヌーイ数を持ち出す必要はない. 導き出した多項式を改めて眺めると, そこにベルヌーイ数が顔をのぞかせるといだけのことだ. ベルヌーイ数は, 一定パターンの 2 項係数の四則演算によって算出できる. 以下でその算出方法の一つをみてみよう.

ベルヌーイ数の 0 番 B_0 は, 1 であることを前提にする. そして, B_1 以降の算出は下のように行う.

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{-1}{2} \binom{2}{0} B_0 = \frac{-1}{2} \\ B_2 &= \frac{-1}{3} \left[\binom{3}{0} B_0 + \binom{3}{1} B_1 \right] = \frac{1}{6} \\ B_3 &= \frac{-1}{4} \left[\binom{4}{0} B_0 + \binom{4}{1} B_1 + \binom{4}{2} B_2 \right] = 0 \\ &\dots \\ B_n &= \frac{-1}{n+1} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+1}{i} B_i \right] \end{aligned}$$

これは, たとえば, いきなり B_{16} をピンポイントで求めるといったことではなく, $B_1, B_2, B_3, \dots$ と一つずつ段階的に算出していきやり方である. B_1 の中に B_0 が組み込まれており, B_2 の中には B_0, B_1 が組み込まれている. ある種の入れ子構造といえる. 算出の手順は簡単だが, 実際に手作業で計算するのは面倒だ. そこで, プログラミング言語 python を用いての計算を試みることにしよう.

python の sympy ライブラリを利用すると多様な計算処理を行うことができる. 具体的な数値計算だけでなく, 多項式の演算や微積分も可能だ. python の sympy ライブラリにはベルヌーイ数を得るための関数 `bernoulli(x)` が用意されているが, あえて前述した手順を具体化してみた. プログラムの詳細は省くが, 簡単な二重の反復処理 (for ループ) による計算手続きに着目していただければ幸いである.

```
from sympy import *
b = [1] # set b[0] = 1 (Bernoulli number #0)
n = 20 # going to calculate b[1] -> b[20]
for k in range(1, n+1): # from 1 to 20
    bcl = binomial_coefficients_{list}(k+1) # e.g. [1, 2, 1] or [1, 3, 3, 1]
    s = 0
    for i in range(k): # from 0 to k-1
        s = s + bcl[i] * b[i]
    b.append(Rational(-1, k+1) * s) # set b[k]
for k in range(n+1): # print b[0] -> b[20]
    print("B%d=%s" % (k, b[k]))
```

- `binomial_coefficients_{list}(x)`: 2 項係数 (パスカルの三角形) を配列で返す.
- `Rational(分子, 分母)`: 分数形式の有理数を返す.

7 べき乗和の計算

べき乗和を算出するための多項式を生成し, その式に値を代入して結果を算出してみよう. 多項式の生成には積分を用いることにする. 具体的には $s_6(x-1)$ の多項式を生成し, 1 から 9 までの 6 乗和 $s_6(10)$ を算出する.

```
# encoding: utf-8
from sympy import *
init_printing() # 出力を可能にするための設定 LaTeX
var('x') # 多項式の変数を設定 x
k = 6 # 次数の設定: 乗和を求める 6
bcl = binomial_coefficients_{list}(k) # [1, 6, 15, 20, 15, 6, 1]
poly = 0 # 多項式をこれに入れていく
for i in range(k+1): # 多項式の各項の生成と追加
    poly = poly + bcl[i] * bernoulli(i) * x**(k-i)
sk = integrate(poly) # 積分して乗和を求めるための式を生成 6
```

```

print_latex(sk) # 式を形式で出力LaTeX
n = 9 # からまでの乗和を計算196
v = sk.subs(x, n+1) # 多項式のにx 10 を代入
print(v)
print(sum(i**k for i in range(1, n+1))) # 単純に計算した結果も表示

```

最後の行は、 $1^6 + 2^6 + 3^6 + \dots + 9^6$ を素直に計算した結果を出力するものである。多項式による計算が正しいかどうかをチェックするために参考まで置いた。

このプログラムには二十の反復処理 (for ループ) が出てこない。つまり、入れ子構造に即した演算でなく単純・フラットな演算が出てくるだけだ。それに対して、ベルヌーイ数を用いずに多項式を生成しようとする、二十の反復処理にならざるを得ない。ベルヌーイ数は、入れ子構造をそれ自身に取り込み済みであり、結果的に入れ子構造をフラット化する役割を果たすという見方ができるだろうか。

ちなみに、前述のプログラムの出力は次のとおり。

```

\frac{x^{7}}{7} - \frac{x^{6}}{2} + \frac{x^{5}}{2}
- \frac{x^{3}}{6} + \frac{x}{42}
978405
978405

```

8 おわりに

ベルヌーイ数が何者なのかが気になりつつ、筆者の乏しい力量ではいまだ分からないままである。ゼータ関数 $\zeta(s)$ の s が正の偶数のとき、あるいは、負の奇数の場合にベルヌーイ数が顔をのぞかせる。その理由は分らないが、漠然とながら、実数が織りなすスロープや曲線と、整数がつくり出す階段状のギザギザの間を取り持つ橋渡しのような性質が関係しているのではないか、そんなふうに想像をめぐらしたりする。

あるいは、飛躍のしすぎとは思いつつ、素数が織りなす複雑な入れ子構造をフラット化する方法はないのか、素数の階段状のギザギザを埋めたりする方法はあるのか、それら手がかりがゼータ関数にあるのだろうか、そんなことをあてどもなく考えたりする。

数学を感覚で語っても意味がないことは十分承知しているつもりだが、論理をたどる力に乏しいと、ついつい感覚的な飛躍に逃避してしまう。しかし、それがなかなか楽しい。当原稿でも感覚的な記述が随所に現れていたとおもうが、趣味で数学を楽しむ素人の未熟さとしてご容赦いただきたい。

ベルヌーイ多項式とべき乗和

矢野 忠^{*1}

The Bernoulli Polynomials and Sums of k th Powers

Tadashi YANO^{*2}

1 はじめに

「自然数のべき乗の級数」というタイトルで、秋葉敏男さんが1回 [1], 私が4回 [2], この「数学・物理通信」にエッセイを掲載している。

これに対して中西先生から、任意のべき乗の和はベルヌーイによって数学的には解決済みであるとのコメントをいただいていた。これは数学的にはそうであろう。

しかし、その公式は岩波の『数学辞典』に載っているが [3], 私はその導出法を知らなかった。

今回、吉泉さんからの投稿をいただいたので [4], この機会にその導出法を調べてみた。その中でも比較的簡単と思われるベルヌーイの多項式からのべき乗和の公式の導出 [5] の解説を示すのがこのエッセイの目的である^{*3}。

このエッセイでもって、べき乗和に対する投稿は以後、もしあるとしてもお断りしたいと考えている。

2 ベルヌーイ多項式の母関数

別のエッセイ [6] でベルヌーイ多項式の母関数を導入した。それは

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n \quad (2.1)$$

であった。ここで、 $B_n(x)$ はベルヌーイ多項式である。

いま、このベルヌーイ多項式 $B_n(x)$ と $B_n(x+1)$ との間には

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x+1)}{n!} t^n = te^{xt} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n \quad (2.2)$$

の関係がある。

この関係を導いておこう。

$$\begin{aligned} \frac{te^{(x+1)t}}{e^t - 1} &= \frac{te^{xt}}{e^t - 1} \cdot e^t \\ &= \frac{te^{xt}}{e^t - 1} (e^t - 1 + 1) \\ &= te^{xt} + \frac{te^{xt}}{e^t - 1} \end{aligned}$$

この関係のベルヌーイ多項式の母関数をベルヌーイ多項式の級数でおきかえれば、(2.2) が得られる。ではこの(2.2) を用いて、つぎの3節でべき乗和を求めよう。

^{*1} 元愛媛大学工学部

^{*2} yanotad@earth.ocn.ne.jp

^{*3} 「ベルヌーイ数とベルヌーイ多項式」については [6] を参照されたい。

3 べき乗和の導出

(2.2) をつぎのように書き換えられる.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [B_n(x+1) - B_n(x)] t^n = t e^{xt} \quad (3.1)$$

この右辺をテイラー展開すれば

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [B_n(x+1) - B_n(x)] t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} t^{n+1} \quad (3.2)$$

が得られる.

(3.2) の左辺は

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [B_n(x+1) - B_n(x)] t^n \\ &= \frac{1}{0!} [B_0(x+1) - B_0(x)] + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} [B_{k+1}(x+1) - B_{k+1}(x)] t^{k+1} \end{aligned} \quad (3.3)$$

と表され, また (3.2) の右辺は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} t^{n+1} = 0 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} t^{k+1} \quad (3.4)$$

と表される.

(3.3) と (3.4) の右辺を (3.2) へ代入すれば,

$$\frac{1}{0!} [B_0(x+1) - B_0(x)] + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} [B_{k+1}(x+1) - B_{k+1}(x)] t^{k+1} = 0 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} t^{k+1} \quad (3.5)$$

t^{k+1} の係数を比べると

$$\frac{1}{(k+1)!} [B_{k+1}(x+1) - B_{k+1}(x)] = \frac{x^k}{k!} \quad (3.6)$$

が得られる*4.

この (3.6) の両辺に $(k+1)!$ をかけると

$$B_{k+1}(x+1) - B_{k+1}(x) = (k+1)x^k, \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (3.7)$$

となる. この関係を用いてべき乗和を求めよう.

(3.7) の式で $x=1$ から $x=n$ とおけば

$$\begin{aligned} B_{k+1}(2) - B_{k+1}(1) &= (k+1)1^k \\ B_{k+1}(3) - B_{k+1}(2) &= (k+1)2^k \\ &\dots \\ B_{k+1}(n) - B_{k+1}(n-1) &= (k+1)(n-1)^k \\ B_{k+1}(n+1) - B_{k+1}(n) &= (k+1)n^k \end{aligned}$$

*4 両辺の $t^0 = 1$ の係数を比べると

$$\frac{1}{0!} [B_0(x+1) - B_0(x)] = 0$$

が得られる. これから $B_0(x+1) = B_0(x)$ となり, これは $B(x) = c$, $c = \text{一定}$ であることが示唆される. 実際には $B(x) = 1$ である [6].

となる.

これらを辺々を加えれば, 左辺では多くの項が打ち消され, また右辺では加え合わさって

$$B_{k+1}(n+1) - B_{k+1}(1) = (k+1) \sum_{x=1}^n x^k \quad (3.8)$$

が得られる.

この (3.8) の両辺を $k+1$ でわれば, 求める自然数の k 乗和 (すなわち, 1^k から n^k までの和) $S_k(n)$ が得られる.

整数らしく見せるために, x を p でおきかえて表せば, $S_k(n)$ は

$$\begin{aligned} S_k(n) &:= \sum_{p=1}^n p^k \\ &= \frac{1}{k+1} [B_{k+1}(n+1) - B_{k+1}(1)] \end{aligned} \quad (3.9)$$

となる. この式は『数学辞典』 [3] に与えられている*5.

4 おわりに

べき乗和の一般的公式を与える問題はベルヌーイによって解決されていることは, ずっと以前に中西襄先生から教えられていたが, その導出法をそのときには知らなかった.

それが吉泉さんの投稿を契機として, まずベルヌーイ多項式によってべき乗和の一般的な公式を与える式を知ることができた. また, ここに示した以外にもべき乗和を求める方法はある. それについては別の機会に述べたい.

しかし, (3.9) は形式的にべき乗和を求めただけであって, 実際に任意の次数のベルヌーイ多項式を単独に求めることはできない. 小さい次数のものから求めていかななくてはならない. その方法は具体的に吉泉さんが示されている.

(2019.6.17)

参考文献

- [1] 秋葉俊男, 自然数のべき乗の級数, 数学・物理通信, 第 5 巻, 第 7 号 (2015) 9-22
- [2] 矢野 忠, 自然数のべき乗の級数 1, 数学・物理通信, 第 3 巻, 第 4 号 (2013) 9-18
矢野 忠, 自然数のべき乗の級数 2, 数学・物理通信, 第 3 巻, 第 4 号 (2013) 19-23
矢野 忠, 自然数のべき乗の級数 3, 数学・物理通信, 第 5 巻, 第 7 号 (2015) 23-29
矢野 忠, 自然数のべき乗の級数 4, 数学・物理通信, 第 5 巻, 第 8 号 (2015) 20-25
- [3] 日本数学会 編, 『岩波 数学辞典』第 4 版 (岩波書店), 1713
- [4] 吉泉豊春, べき乗和とベルヌーイ数, 数学・物理通信, 第 9 巻, 第 3 号 (2019) 10-15
- [5] Shadow Academy, ベルヌーイ数とベルヌーイ多項式,
<https://shadowacademy.web.fc2.com/bernouslli.html>
- [6] 矢野 忠, ベルヌーイ数とベルヌーイ多項式, 数学・物理通信, 第 9 巻, 第 4 号 (2019) 10-19

*5 [6] に与えられたベルヌーイ多項式を (3.9) を用いると $S_0 = n, S_1 = \frac{1}{2}n(n+1), S_3 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \dots$ が求められる.

ベクトル三重積の公式の記憶法

矢野 忠^{*1}

A Mnemonics of Vector Triple Products

Tadashi YANO ^{*2}

1 はじめに

ベクトルの三重積とは $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ とか $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ とかのことである。前の方のベクトル三重積の公式については記憶法として back-cab ルールというのがある [1]。すなわち、

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (1.1)$$

である。この場合には back-cab と覚えておけば、そのままこの公式が成り立っている。

しかし、これは $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ についてはこのままの形では成り立たない。もちろん、

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = -\mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

として、これに「back-cab ルール」を用いるのも一つの手である。

しかし、世の中の人はいろいろ工夫して公式の覚え方を考えるものである。最近知った「中央項ルール」をこのエッセイで紹介しよう。覚え方は単なる記憶法であり、物事の本質ではないが、それでも役に立つというのが現実である。

2 中央項ルール

中央項ルールのことを書いてあったのはスウ『ベクトル解析』 [2] である。この原本は英語だが、それをもっていない。その訳本の p.23 に次のように書かれている。

恒等式^{*3}

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (2.1)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A} \quad (2.2)$$

は、つぎのいわゆる「中央項ルール」^{*4}に注目しておけば、覚えることは楽である。

ベクトル積は、中央のベクトルに注目すること。中央のベクトルの係数は、残りのベクトルのスカラー積であり、これから中央ベクトルをかつこに入れ、係数を残りのベクトルとのスカラー積とした他のベクトルを引く。

記憶法の後半部分がよくわからないが、前半部分はよくわかる。しかし、後半部分の意味するところを読み解く前にちょっと確認をしておきたいことがある。

^{*1} 元愛媛大学工学部

^{*2} yanotad@earth.ocn.ne.jp

^{*3} 著者注：引用にあたって式の番号を (1.83), (1.98) から (2.1), (2.2) に変えた。

^{*4} 著者注：訳書では「中央項法則」となっていたが、訳を変更した。

それはベクトル三重積の性質の一つである。ベクトル三重積では3つのベクトルが出てくるが、そのうちの2つがかっこでくくられており、そのかっこの中の二つのベクトルの1次結合として、このベクトル三重積が表される。

すなわち、

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = x\mathbf{B} + y\mathbf{C}, \quad x, y \text{ はスカラーの係数} \quad (2.3)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = v\mathbf{A} + w\mathbf{B}, \quad v, w \text{ はスカラーの係数} \quad (2.4)$$

と表される。

さて、記憶法であるが、 $\mathbf{B}$ がいずれの公式においても式の中央にあるベクトルである。このベクトル $\mathbf{B}$ の係数はその $\mathbf{B}$ 以外のベクトルのスカラー積をとって係数とする。これが記憶法の前半を意味する。

ここまですべてを式で表すと

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} + y\mathbf{C} \quad (2.5)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} + v\mathbf{A} \quad (2.6)$$

となる。すなわち、

$$x = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})$$

$$w = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})$$

が決まった。

つぎに係数 y, v を決めたい。 $\mathbf{B}$ 以外の1次独立なベクトルは(2.5)では $\mathbf{C}$ であり、(2.6)では $\mathbf{A}$ である。これはそれぞれのかっこでくくられたベクトル積の中の中央項のベクトル $\mathbf{B}$ ではないベクトルである。これらのベクトル $\mathbf{C}$ または $\mathbf{A}$ にかかる係数は、それぞれこれらのベクトル以外のベクトルのスカラー積であるが、中央項以外のベクトルの係数にはスカラー積の前に負号をつける。

これがこの中央項ルールという記憶法の後半部分であろう。これを実行すると

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \cdots - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (2.7)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \cdots - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A} \quad (2.8)$$

となる。ここで、この両式では後半の第2項の表し方に焦点をあてるために、第1項を $\cdots$ にわざと置き換えておいた。すなわち

$$y = -(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

$$v = -(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

となる。

したがって、公式は(2.1),(2.2)に表した通りである。

3 (2.2) の別の導き方

「はじめに」のところで述べた back-cab ルールを用いて(2.2)を導いておこう。

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} &= -\mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \\ &= -[\mathbf{A}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})] \\ &= \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

これは(2.2)とももちろん同じである。

4 おわりに

back-cab ルールでは $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ の公式をすぐ書き下せるが、もう一方の $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ の公式をすぐには書き下せなかった。

しかし、この中央項ルールであれば、どちらもすぐ書き下すことができる。そして、そのときに3つのベクトルを表す文字が何であっても簡単に書き下すことができるようになる。

単なる記憶法にしかすぎないが、記憶法を無視できない理由である。

(2019.3.19)

参考文献

- [1] F. S. Crawford（高橋秀俊監訳），『パークレー 物理学コース 波動』下（丸善，1973）付6
- [2] H. P. スウ（高野一夫訳），『ベクトル解析』（森北出版，1980）23

読者の声

Mails from Readers

1 安尾南人さんから

date: 2019.5.15

「数学・物理通信」編集者様

私は、2014 年春に地方大学を定年退職した元（？）Topologists の一人です。

「数学・物理通信」に関しては部外者 (非同人) ですが*1, 卒爾ながら、このメールを送ってみました。

「数学・物理通信」9 巻 2 号に中西 襄さんの「なぜ Euclidian でなくて, Euclidean なのか」という論文が載りました。これについて、前置きやあいさつをなるべく省略して、気づいたことなどを書きます。

(1) 編集者が、中西さんの挙げられた例に対して指摘された“European”は、私も全く別のきっかけで知っていましたが、数学者が絡む例としては“Boolean”があると思います。

ちなみに Wikipedia を見ると、「ジョージ・ブール (George Boole, 1815 年 11 月 2 日 - 1864 年 12 月 8 日) は、イギリスの数学者・哲学者」、だそうです。他にも例があるのかどうか、現時点ではあまり知りません。

(2) ここからは蛇足ですが、なぜ「-ian vs. -ean」問題を気にするのかということですが、これは、たんなる物好きともいえない個人的な事情がちょっとあります。

脱線を厭わず触れてみますと、ここ数年ずっとある「informal notes」を書き続けていて、その途中で“puppean”とか“quasipuppean”などという造語 (coined words) としての形容詞を使っていました。

ちなみに記すと、“puppean”は数学者 Siegmund Dieter Puppe (1930 - 2005) から採ったもので、“Puppean”としなかったのは「Abelian $\Rightarrow$ abelian」の変化を真似たものです。

安尾南人 (山梨大学名誉教授: 数学)

2 編集者から

date: 2019.6.18

9 巻 2 号に掲載された中西襄先生の論文に対して、安尾さんからコメントをいただいた。インターネットに出ていると思わぬところで思わぬ反応があって、驚かされる。安尾さん、コメントありがとうございました。

世戸さんのご紹介で、小方厚 (高エネルギー研究所 (KEK) 名誉教授) さんとも連絡がついて同人となっていた。

編集人 矢野 忠

*1 信州大の名誉教授の浅田明氏とは多少面識があります。

編集後記

皆様にはご健勝にお過ごしのことと存じます。

「数学・物理通信」9巻3号を発行します。5月末から6月9日まで上京したために、9巻3号、4号の編集にとりかかるのが大幅に遅れてしまいました。

今年は松山ではまだ梅雨に入っておりません。そろそろだとは思うのですが、その分涼しくて助かっています。

さて、いつものように世戸さんの論文に加えて、今号では吉泉さんにご寄稿をいただきました。これはインターネットで吉泉さんを知ってお願いをしたのです。その吉泉さんの論文に刺激されて、私も「ベルヌーイ多項式によるべき乗和」について調べることができました。

さらに、安尾さんからも中西先生のエッセイについての「読者の声」をいただきました。少しずつではありますが、この「数学・物理通信」が心ある人たちの目にとまってきたようで、編集者としてはうれしいかぎりです。

皆様には今後ともに、ご愛読をお願いします。

(矢野 忠)