

数学・物理通信

9 卷 4 号 2019 年 6 月

編集 新関章三・矢野 忠

2019 年 6 月 26 日

目次 (Contents)

1. 微分方程式における興味ある問題 (4)

—蜃気楼ができる訳—

世戸憲治, 吉田文夫 2

2. ベルヌーイ数とベルヌーイ多項式

矢野 忠 10

3. 遠山啓の岩波新書を読む

矢野 忠 20

4. 編集後記

新関章三 25

1. Interesting Problems in Differential Equation (4)

—Reason of the Mirage—

Kenji SETO and Fumio YOSHIDA 2

2. The Bernoulli Numbers and Bernoulli Polynomials

Tadashi YANO 10

3. Reading of Several Books by Hiraku Tohyama

Tadashi YANO 20

7. Editorial Comments

Shozo NIIZEKI 25

微分方程式における興味ある問題 (4)

—蜃気楼ができる訳—

世戸 憲治 *

吉田 文夫 †

Interesting Problems in Differential Equation (4)

—Reason of the Mirage—

Kenji SETO*

Fumio YOSHIDA†

1 はじめに

富山湾で起こる有名な現象として蜃気楼,あるいは,九州の有明海,八代海で見られる不知火(しらぬい)がある.これらは空気中の温度変化によって,光の屈折率が変わるためにおこる現象である.すなわち,光が屈折率の異なるところを通過するとき,その進路が曲げられ,屈折現象が起こることによって生じるものである.我々がよく目にするのは,夏のアスファルト道路で見られる逃げ水があり,これも同じ原理で起きている.

同じような現象は音波が伝播するときにも起こる.夜になると,昼間は聴こえないはずの遠くにあるお寺の鐘の音が聞こえることがある.夜は,周りが静かだから聴こえるという理由もあるが,この現象は,上空に向かって出た音が上下間の温度差によってその伝播経路が曲げられ再び地上に戻ってくるからである.

以下の節で,これら光の屈折現象を数理的に解析してみる.

2 蜃気楼の解析

蜃気楼は,地上よりも上空の方が温度が高いときに起こる現象で,温度が高いところは空気が薄くなるので,その分,光の屈折率が下がる.いま,地上の高いところに原点をとり,水平方向に x 軸,下向き方向に y 軸をとる.このとき y の値が大きいほど,つまり下に行くほど,屈折率が大きくなる.具体的には,一つのモデルとして,深さ y における屈折率 $n(y)$ を, y の 1 次式

$$n(y) = n_0(1 + ay) \quad (2.1)$$

と仮定する. n_0 は $y = 0$ における屈折率,また, a は長さの逆数の次元を持つ正定数とする.真空中の光速度を c とすると,この深さ y での光速度は $c/n(y)$ となる.このときの光の経路 $y = y(x)$ を求める問題である.いま,この経路上の任意の点 (x, y) から, Δx を微小長さとして,点 $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ まで光が飛ぶ時間を Δt とすると,

$$\Delta t = \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{c/n(y)} = \frac{n_0}{c}(1 + ay)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad (2.2)$$

* 北海学園大学名誉教授

E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

† 北海学園大学名誉教授

E-mail: fyoshida@hgu.jp

となる。これをすべての区間で和をとったものを T とすると、

$$T = \sum \Delta t = \frac{n_0}{c} \sum (1 + ay) \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad (2.3)$$

となるが、これは $\Delta x \rightarrow 0$ の極限をとると、

$$T = \frac{n_0}{c} \int F(y, y') dx, \quad F(y, y') = (1 + ay) \sqrt{1 + y'^2} \quad (2.4)$$

と積分形で表される。ここに被積分関数の $F(y, y')$ をこの第 2 式で定義する。Fermat の原理にしたがい、このトータルの時間を最小にするには、変分法における Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F(y, y')}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F(y, y')}{\partial y} = 0 \quad (2.5)$$

を用いて計算される。この式に $F(y, y')$ の定義を代入して、整理すると、

$$(1 + ay)y'' = a(1 + y'^2) \quad (2.6)$$

を得る。この方程式を解くには、まず、

$$p = y' \quad (2.7)$$

とおき、 y'' を

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dy}{dx} \frac{dp}{dy} = p \frac{dp}{dy} \quad (2.8)$$

と変形し、方程式 (2.6) に代入すると、

$$(1 + ay)p \frac{dp}{dy} = a(1 + p^2) \quad (2.9)$$

となる。これを変数分離して積分形

$$\int \frac{p}{1 + p^2} dp = \int \frac{a}{1 + ay} dy \quad (2.10)$$

にし、この積分を実行すると、

$$\frac{1}{2} \log(1 + p^2) = \log(1 + ay) - \log C \quad (2.11)$$

となる。ここに、 $C (> 0)$ は無次元の積分定数である。これから p を求めると、

$$p = \frac{\sqrt{(1 + ay)^2 - C^2}}{C} \quad (2.12)$$

となり、さらに、 p を (2.7) 式で元に戻し、変数分離し、積分形にすると、

$$\int \frac{C dy}{\sqrt{(1 + ay)^2 - C^2}} = x + D \quad (2.13)$$

となる。ここに、 D は長さの次元を持つ積分定数である。この積分は y から s に

$$1 + ay = C \cosh s \quad (2.14)$$

と変数変換すると、簡単に実行され、

$$s = \frac{a}{C}(x + D) \quad (2.15)$$

となるので、これを (2.14) 式に戻すと、

$$1 + ay = C \cosh[a(x + D)/C] \quad (2.16)$$

と、2 個のパラメータ C, D を用いた解曲線が求められる。初めに光を原点 $(0, 0)$ から下向き角度 θ で照射したときどうなるかを考えてみる。このときの条件は、原点を通ることから、

$$1 = C \cosh(aD/C) \quad (2.17)$$

となり、また、照射角度から、

$$y'|_{x=0} = \tan \theta \quad \text{より} \quad \tan \theta = \sinh(aD/C) \quad (2.18)$$

となるので、これら 2 本の方程式を解くと、

$$C = \cos \theta, \quad D = \frac{\cos \theta}{a} \operatorname{arcsinh}(\tan \theta) = \frac{\cos \theta}{a} \operatorname{gd}^{-1} \theta \quad (2.19)$$

とパラメータ C, D が決まる。ここに、 gd^{-1} は逆 Gudermann 関数で、

$$\operatorname{gd}^{-1} \theta = \int_0^\theta \frac{dt}{\cos t} = \operatorname{arcsinh}(\tan \theta) = \operatorname{arccosh}\left(\frac{1}{\cos \theta}\right), \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \quad (2.20)$$

で定義される*1。なお、ここでは、 C を (2.17) (2.18) 式より求めたが、より簡単には、(2.12) 式から求めることもできる。すなわち、この (2.12) 式で $y = 0$ とすると、 $p = y' = \tan \theta$ となるので、 $C \tan \theta = \sqrt{1 - C^2}$ となり、これから直ちに C が求まる。

この求められた C, D を (2.16) 式に代入し、(2.20) 式を用いると、解曲線は

$$y = \frac{\cos \theta}{a} \cosh\left(\frac{a}{\cos \theta} x + \operatorname{gd}^{-1} \theta\right) - \frac{1}{a}, \quad \text{あるいは、} \quad = \frac{1}{a} \left[\cosh\left(\frac{a}{\cos \theta} x\right) - 1 \right] + \frac{\sin \theta}{a} \sinh\left(\frac{a}{\cos \theta} x\right) \quad (2.21)$$

となる。この式で、 $a \rightarrow 0$ の極限をとったときは、屈折率が一樣になるので、直線の式になるはずである。実際、見てすぐ分かるように、このときは、

$$y = \tan(\theta)x \quad (2.22)$$

と傾き角 θ の直線の式になる。

3 もう一つの解き得る例題

前節で述べたように、解曲線がきれいな形で求まるのは他にもあるだろうかという疑問が湧く。そこで、空気中の屈折率 $n(y)$ を一般化して、

$$n(y) = n_0 f(y) \quad (3.1)$$

としたときはどうなるかを考えてみよう。このときは、(2.6) 式に替わって、

$$f y'' = f'(1 + y'^2) \quad (3.2)$$

となる。この後、変換式 (2.7) (2.8) と $f' = df/dy$ を用いて、この式を変数分離して積分形にすると

$$\int \frac{p}{1 + p^2} dp = \int \frac{1}{f} df \quad (3.3)$$

これを積分して、

$$\frac{1}{2} \log(1 + p^2) = \log f - \log C, \quad (f(y) > C > 0) \quad (3.4)$$

*1 この $\operatorname{arccosh}$ を用いた最右辺の式では、正の θ に対しては、 $\operatorname{arccosh}$ の正の分枝、負の θ に対しては、負の分枝をとる。ただし、ここの θ は $0 < \theta < \pi/2$ の範囲で考えるので、正の分枝だけに限定される。

となり、これから、 p を求めて、

$$p = \frac{\sqrt{f^2 - C^2}}{C} \quad (3.5)$$

となる。この式の両辺を逆数にして、

$$\frac{dx}{dy} = \frac{C}{\sqrt{f^2 - C^2}} \quad (> 0) \quad (3.6)$$

となるが、さらに、この両辺を y で微分すると、

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -C(f^2 - C^2)^{-3/2} f f' \quad (3.7)$$

となる。ここで、 y が大きいほど、すなわち、下に行くほど、屈折率が大きくなるものとして、

$$f'(y) > 0 \quad (3.8)$$

を仮定すると、(3.7) 式の右辺は負、すなわち、 $d^2x/dy^2 < 0$ となる。いまは、 y 軸を下向きにとっているの、これから、光の経路は、上に凸の曲線になることが分かる。

ここで (3.6) 式に戻って、これを変数分離し、積分形にすると

$$\int \frac{C dy}{\sqrt{f^2(y) - C^2}} = x + D \quad (3.9)$$

となるが、やはり、一般化したこのままの形では、これ以上、議論することは難しい。以下では、もう一つの解きえる例として、屈折率 $n(y)$ を、

$$n(y) = n_0 f(y), \quad f(y) = 1 + \sqrt{ay} \quad (3.10)$$

とした場合を考えてみる。 a は、前と同じく、長さの逆数の次元を持つ正定数である。ここで、(3.9) 式の積分を実行するために、

$$f(y) = 1 + \sqrt{ay} = C \cosh s \quad (3.11)$$

と、 y から s に変数変換をする。結果は、

$$\frac{2C}{a} \int (C \cosh s - 1) ds = x + D \quad (3.12)$$

となるので、この積分を実行して、

$$\frac{2C}{a} (C \sinh s - s) = x + D \quad (3.13)$$

を得る。この式と (3.11) の変換式とから s を消去すると、

$$\frac{2C}{a} \left[\sqrt{(1 + \sqrt{ay})^2 - C^2} - \operatorname{arccosh} \left(\frac{1 + \sqrt{ay}}{C} \right) \right] = x + D \quad (3.14)$$

と、2 個のパラメータ C, D を含む解曲線が得られる。

ここで、前と同じく、原点 $(0, 0)$ から下向き角度 θ で光を発射させるものとする。このとき、まず、原点を通ることから

$$\frac{2C}{a} \left[\sqrt{1 - C^2} - \operatorname{arccosh}(1/C) \right] = D \quad (3.15)$$

となり、つぎに、初めの傾き角が θ であることから、(2.18) 式と同じく $y'|_{x=0} = \tan \theta$ であるが、

$$\operatorname{arccosh} r = \log(r + \sqrt{r^2 - 1}) \quad (3.16)$$

を用いて, (3.14) 式全体を x で微分し, $y \rightarrow 0$ とおくと,

$$C \tan \theta = \sqrt{1 - C^2} \quad (3.17)$$

を得る. この計算では $y \rightarrow 0$ としたとき, 発散項もでるが, それらの項はすべて相殺されることに注意する. この式から, C を求めると, (2.19) 式の C と同じく,

$$C = \cos \theta \quad (3.18)$$

と求まる. なお, 前節でも述べたように, この C の値は (3.5) 式から求めた方が手っ取り早い. すなわち, この (3.5) 式で, $y = 0$ とすると, $p = y' = \tan \theta$ であり, (3.10) 式より $f(0) = 1$ なので, (3.17) 式が直ちに得られる.

この C を, (3.15) 式に代入して, D は

$$D = \frac{2 \cos \theta}{a} \left[\sin \theta - \operatorname{arccosh} \left(\frac{1}{\cos \theta} \right) \right], \quad \text{あるいは} \quad = \frac{2 \cos \theta}{a} \left[\sin \theta - \operatorname{gd}^{-1} \theta \right] \quad (3.19)$$

と求められる. この最右辺の式は (2.20) 式を用いた. これらの C, D を (3.14) 式に代入すると解曲線は, 最終的に

$$x = \frac{2 \cos \theta}{a} \left[\sqrt{(1 + \sqrt{ay})^2 - \cos^2 \theta} - \sin \theta - \operatorname{arccosh} \left(\frac{1 + \sqrt{ay}}{\cos \theta} \right) + \operatorname{arccosh} \left(\frac{1}{\cos \theta} \right) \right] \quad (3.20)$$

となる. この式から, y を x の関数として明示的に求めることは不可能なので, y を独立変数, x を従属変数と考える.

ここで, $a = 0$ としたとき, この式は直線の式になるはずであるが, それを確認してみよう. この右辺で $a = 0$ とすると $0/0$ となるので, l'Hopital の定理, および, (3.16) 式を使ってその極限値を求めることになる. 結果は, 前節の (2.22) 式と同じく

$$y = \tan(\theta)x \quad (3.21)$$

となる.

4 数値計算例

ここで, 2 節, および, 3 節で求めた解曲線 (2.21), (3.20) 式に基づいて数値計算した例を示す. その前に, パラメータを減らすために, これらの式で, a^{-1} を長さの単位にとることにし, 変数 x, y を, それぞれ, 改めて

$$ax \rightarrow x, \quad ay \rightarrow y \quad (4.1)$$

と置き直し, 変数 x, y を無次元化する. このとき, これらの式は,

$$y = \cosh \left(\frac{x}{\cos \theta} \right) - 1 + \sin \theta \sinh \left(\frac{x}{\cos \theta} \right) \quad (4.2)$$

および,

$$x = 2 \cos \theta \left[\sqrt{(1 + \sqrt{y})^2 - \cos^2 \theta} - \sin \theta - \operatorname{arccosh} \left(\frac{1 + \sqrt{y}}{\cos \theta} \right) + \operatorname{arccosh} \left(\frac{1}{\cos \theta} \right) \right] \quad (4.3)$$

となる. これでパラメータ a は消え, θ だけが残る.

これら, (4.2) (4.3) 式を数値的に計算し, グラフ化したものを, それぞれ, 図 1, 図 2 に示す. ここでは, パラメータ θ を 0 度から, 80 度までを, 10 度ずつ増加させた 9 通りのグラフを重ね書きした. この図で, 一番右上の方にある曲線が $\theta = 0$ 度で, 10 度ずつ増えるにしたがい左下の方に移動し, 一番左下の曲線が $\theta = 80$ 度である.

これら 2 つの図の違いは、屈折率 $n(y)$ を $n(y) = n_0(1 + y)$ とした場合と、 $n(y) = n_0(1 + \sqrt{y})$ とした場合の違いである。 $y = 0$ 近くでは、 $\sqrt{y}$ の方が y よりも早く大きくなるので、初めの原点近くでは、図 2 の方が早く屈折する。しかし、 y の値が大きくなると $\sqrt{y}$ は y よりも小さくなるので、曲がり方は図 2 の方が小さく直線に近くなる。この図 2 の $\theta = 0$ 度の曲線を見ると、初めからかなりの角度を付けて曲がっているように見えるので、これは本当に 0 度から出発したのかという疑問が起こる。そこで、この原点付近を 100 倍に拡大して描いたものを図 3 に示す。

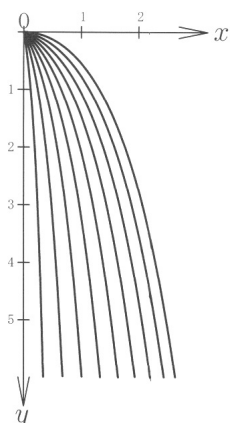


図 1 (4.2) 式

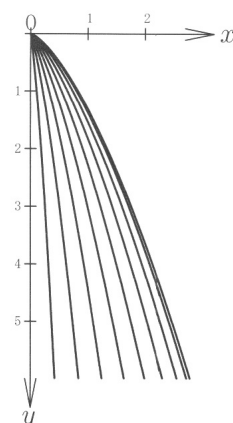


図 2 (4.3) 式

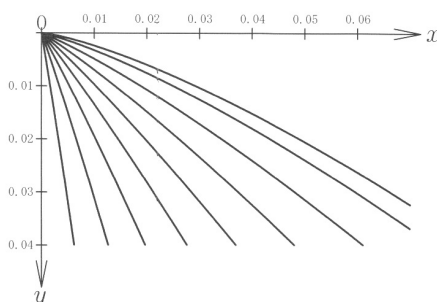


図 3 図 2 の原点付近を拡大したもの

以上の結果を実際の蜃気楼に当てはめてみよう。これらの図で、 $\theta = 0$ の曲線を、 y 軸に関し対称に折り返して、 x が負の方まで拡張して考えると、光はほぼ円弧を描いて飛ぶことになる。これが蜃気楼が起こる原因である。空気中の屈折率は、光の波長によって変わるが、He-Ne ガスレーザーからでる赤い光の場合、温度が 1 度上がるごとに屈折率は、率で 10^{-6} づつ下がるという。いま温度の逆転層ができて、海面上の温度が 10 度、そこから高さ 50 m における温度を 20 度と仮定する。このとき、高さ 50 m における屈折率を n_0 、海面上における屈折率を n_1 とすると

$$n_1 = n_0(1 + 10^{-5}) \quad (4.4)$$

となる。ここで、海面上の方が温度が低いので屈折率は逆に大きくなることに注意する。これを (2.1) 式に当てはめると $n_1 = n(50)$ で、 $y = 50$ m における ay の値が $= 10^{-5}$ ということである。これから、 a は

$$a = \frac{10^{-5}}{50} \text{m}^{-1} = 2 \times 10^{-7} \text{m}^{-1} \quad (4.5)$$

となる。ここで、(2.21) 式で $\theta = 0$ とおき、 x を y の関数として求めると、

$$x = \frac{1}{a} \operatorname{arccosh}(1 + ay) \quad (4.6)$$

となるので、これに a , ay の値を代入して計算すると、 $x \cong 22360$ m となる。蜃気楼が起きるとき、光はこの 2 倍の長さを飛ぶので、およそ、44.7 km 先の景色が曲がってきた光によって見えることになる。

同じことを、第 3 節の議論でやると、この (4.4) 式はそのままであるが、これを (3.10) 式の屈折率に当てはめると、 $y = 50$ m として、 $\sqrt{ay} = 10^{-5}$ となり、これから a は

$$a = \frac{10^{-10}}{50} \text{m}^{-1} = 2 \times 10^{-12} \text{m}^{-1} \quad (4.7)$$

となる。また、(3.20) 式で $\theta = 0$ とすると、

$$x = \frac{2}{a} \left[\sqrt{(1 + \sqrt{ay})^2 - 1} - \operatorname{arccosh}(1 + \sqrt{ay}) \right] \quad (4.8)$$

となるので、これに、 a , $\sqrt{ay}$ の値を代入すると、 $x \cong 14907$ m となる。光が飛ぶ距離はこの 2 倍のおよそ、30 km となる。

夏の暑いときにアスファルト路面で起こる逃げ水は、蜃気楼とは逆で、太陽光で暖められた路面の温度が上がり、そのすぐ上の空気層との間に温度差ができてしまうために起こる。例えば 10 cm の高さで 10 度の温度差ができるとすると、 a の値は (4.5) (4.7) 式の 500 倍になる。したがって、 x の値は、先に求めた例の 500 分の 1 になるので、およそ、60 m の範囲内の景色が路面に逆さまに映って見える。

5 おわりに

ここでは、光の進路を決定するために Fermat の原理を用いた。これは良く知られているように「光は最短時間となるような経路を飛ぶ」というものである。Fermat がこの原理を発表したのは 1661 年のことであるが、当時はまだ光速速度に関しては何も分かっていなかった時代である。それにもかかわらず、よくこんな原理を思い付いたものと感心してしまう。当時、Newton は光粒子説の立場から、光が空気中からガラス、あるいは、水の中に入るとき曲がるのは、光の粒が万有引力でガラスや水の方に引っ張られて加速するためと考えていた。それに対し、Huygens は光波動説の立場から、光が空気中からガラスに入るときに、その速度が遅くなり、波長が縮まるために曲がると考えていた。結果的には Huygens の説が正しかったのであるが、Newton の光粒子も、後になって違った形ながら、Einstein による光量子として復活することになった。

Fermat がこの原理を発表した後に、Rømer(1676 年) や Bradley(1729 年) による天体観測で、それまで無限大と考えられてきた光速速度が有限の値を持つことが分かってきた。しかし、地上で光速速度が測定されるようになったのは、それから 100 年以上後のことである。1849 年に Fizeau による回転歯車を使った空気中の光速速度の測定、および、1850 年 Foucault による回転鏡を用いた水中での光速速度測定がある。こう考えてみると Fermat がいかに先見の明を持っていたかということに驚くばかりである。

[謝辞]

いつものことながら、京都大学名誉教授の中西襄先生にこの原稿を見ていただき、つぎのようなコメントをいただきました。

『屈折率の変化の式を答えが解析的に求まるように仮定するのは、数学的興味からですね。他方、数値計算は物理的興味からだだと思います。物理的には、蜃気楼の説明でよくなされる仮定「温度の異なる 2 層の空気が単純に

重なり合った状況」を設定すれば、答えは折れ線になりますよね。蜃気楼の物理はこれで定性的に説明がつきます。なお、層の数を増やし、その数の無限大の極限を取ってその包絡線を考えれば、図のような曲線が得られるはずです。見えないはずのものが見えるという点では、重力レンズも蜃気楼と似ていますね。』というものです。

また、先生からは、屈折率を一般化したときの議論である (3.6) (3.7) (3.8) 式のあたりのことを教えていただいた。これら先生からいただいたコメントに対し、心から感謝いたします。

ベルヌーイ数とベルヌーイ多項式

矢野 忠¹

The Bernoulli Numbers and Bernoulli Polynomials

Tadashi YANO²

1 はじめに

今回、吉泉豊春さんから「べき乗和とベルヌーイ数」を投稿いただいた [1]。それでこの機会に「ベルヌーイ数とベルヌーイ多項式」とこれを用いた「べき乗和の求め方」について述べてみたい。

このエッセイでは「ベルヌーイ数とベルヌーイ多項式」について述べる。ベルヌーイ多項式を用いた「べき乗和の求め方」については別のエッセイで述べた [2]³。

実はベルヌーイ数とベルヌーイ多項式についてよく知っていたわけではない⁴。しかし、現在ではインターネットのサイトには「ベルヌーイ数とベルヌーイ多項式」について述べたものもかなりの数になるし、それを用いて「べき乗和の一般公式」を導いたサイトもある。

それでも、それらを読んでもとやはり細かなところで疑問が出てくる。このエッセイはその中でもわかりやすいと思った [4] の主要部分の解説である。

2 2つのべき級数の積

ベルヌーイ数とベルヌーイ多項式について述べたいが、その前に準備として、2つのべき級数の積について考えておこう。

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots \quad (2.1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_n t^n + \cdots \quad (2.2)$$

として、その積

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \right) \quad (2.3)$$

をつくる。このときに、この2つの級数の積を

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_n t^n + \cdots \quad (2.4)$$

と表す。

したがって、

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \quad (2.5)$$

¹元愛媛大学工学部

²yanotad@earth.ocn.ne.jp

³吉泉さんの論文ではべき乗和の公式は導かれていないので、その一つの導出法を述べた。

⁴この文章の後に、ベルヌーイ数とべき乗和をあつかったものを見たことがないと書いていたが、『解析概論』 [3] に書かれていた。

が成り立つ。すなわち、

$$\begin{aligned}
& (a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n + \cdots)(b_0 + b_1t + b_2t^2 + \cdots + b_nt^n + \cdots) \\
&= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)t + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)t^2 + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)t^3 + \cdots \\
&= c_0 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3 + \cdots
\end{aligned} \tag{2.6}$$

この等式からつぎの関係が得られる。

$$\begin{aligned}
c_0 &= a_0b_0 \\
c_1 &= a_0b_1 + a_1b_0 \\
c_2 &= a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 \\
c_3 &= a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0 \\
&\vdots \\
c_n &= a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \cdots + a_nb_0
\end{aligned} \tag{2.7}$$

これは

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \tag{2.8}$$

または

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k \tag{2.9}$$

と表してもよい。すなわち、(2.8) は a と b との入れ替えに対して対称な式である。これは (2.7) を見れば明らかであろう。

この (2.8) は第 4 節でベルヌーイの数の漸化式を導くのに使われる。

3 ベルヌーイ数の母関数

ベルヌーイ数の母関数の定義は 2 つあるという [4]。それらを定義 1 と定義 2 と呼ぼう。

定義 1 は

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n \tag{3.1}$$

である。

定義 2 は

$$\frac{te^t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n \tag{3.2}$$

である⁵。ここで B_n はベルヌーイ数である。

話を先へ進めよう。(3.1) と (3.2) とは異なったベルヌーイ数の母関数の定義であるが、左辺の分母は同じ $e^t - 1$ という関数である。これが分母にあると取扱いにくい。それで両辺に $e^t - 1$ をかけて分母を払ってしまう⁶。

⁵(3.1) の定義 1 と (3.2) の定義 2 はまったくちがった定義に思えるが、定義 2 の左辺は

$$\frac{te^t}{e^t - 1} = \frac{t}{1 - e^{-t}}$$

と書き換えられるので、定義 1 の母関数で $t \rightarrow -t$ と置き換えれば、定義 2 の母関数となる。また、6 節で導入される、ベルヌーイの多項式の母関数のパラメータにそれぞれ特殊な値を与えたものでもある。

⁶左辺の母関数の逆数をかけて左辺を 1 としてしまうとする考えもある。

そうすれば，定義 1 の場合

$$t = (e^t - 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n \quad (3.3)$$

となる．ここで

$$e^t - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

であるから，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n &:= e^t - 1 \\ &= 0t^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$= 0t^0 + \frac{1}{1!}t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \cdots + \frac{1}{n!}t^n + \cdots$$

とおけば，

$$a_n = \frac{B_n}{n!} \quad (3.6)$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n = 0) \\ \frac{1}{n!} & (n \neq 0) \end{cases} \quad (3.7)$$

である．定義 1 によれば，(3.3) の左辺は，

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n := t = 0t^0 + t + 0t^2 + 0t^3 + \cdots + 0t^n + \cdots \quad (3.8)$$

であるから

$$c_n = \begin{cases} 1 & (n = 1) \\ 0 & (n \neq 1) \end{cases} \quad (3.9)$$

である．

定義 2 の場合，(3.2) の両辺に $e^t - 1$ をかければ

$$te^t = (e^t - 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n \quad (3.10)$$

となる．

このとき (3.10) の右辺は (3.3) の右辺と同じである．したがって a_n と b_n とは (3.6) と (3.7) を用いればよい．異なるのは (3.10) の左辺である．(3.10) の左辺の t^n の係数は新たに求めなければならない．

定義 2 によれば，(3.10) の左辺は

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n &:= te^t \\ &= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!} \\ &= 0t^0 + \frac{1}{0!}t + \frac{1}{1!}t^2 + \frac{1}{2!}t^3 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}t^n + \cdots \end{aligned} \quad (3.11)$$

であるから,

$$c_n = \begin{cases} 0 & (n = 0) \\ \frac{1}{(n-1)!} & (n \neq 0) \end{cases} \quad (3.12)$$

となる.

4 ベルヌーイ数の漸化式

3 節で a_n, b_n, c_n を求めたから, これらを用いて, ベルヌーイ数の漸化式を導こう.

まず定義 1 の場合を考えよう. これには係数 a_n, b_n, c_n について (3.6), (3.7), (3.9) を用いる. $n = 0$ に対しては, (2.7.1)⁷, すなわち,

$$c_0 = a_0 b_0, \quad (n = 0) \quad (4.1)$$

から

$$\frac{B_0}{0!} \cdot 0 = 0 \quad (4.2)$$

が得られる. しかし, (4.2) から B_0 は求まらない.

つぎに, $n = 1$ に対して (2.7.2), すなわち,

$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \quad (n = 1) \quad (4.3)$$

から

$$\frac{B_0}{0!} \cdot \frac{1}{1!} + \frac{B_1}{1!} \cdot 0 = 1 \quad (4.4)$$

が得られる. (4.4) から $B_0 = 1$ が得られる.

同様に, $n = 2$ のとき (2.7.3), すなわち,

$$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \quad (4.5)$$

から

$$\frac{B_0}{0!} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{B_1}{1!} \cdot \frac{1}{1!} + \frac{B_2}{2!} \cdot 0 = 0, \quad (n = 2) \quad (4.6)$$

が得られる.

一般には, $n = 2, 3, 4, \dots$ に対して (2.8)

$$\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = c_n \quad (4.7)$$

から, $b_0 = 0$ ($k = n$ のとき) と (3.6), (3.7) と (3.9) を用いて

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!} \cdot \frac{1}{(n-k)!} = 0, \quad (n = 2, 3, 4, \dots) \quad (4.8)$$

が得られる⁸. (4.8) の両辺に $n!$ をかけると

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!(n-k)!} B_k = 0 \quad (4.9)$$

となる.

⁷これは (2.7) の上から 1 番目の式を意味する. 以下, 同様である.

⁸実は (4.7) は一般式であるから, (4.3) も (4.5) も含んでいる. それで当然 (4.8) は (4.6) を含んでいる. $n = 2$ の場合には (4.8) から (4.6) が再び得られる.

いま二項係数を用いることにして,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

と表せば,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0, \quad (n = 2, 3, 4, \dots) \quad (4.10)$$

が成り立つ⁹.

(4.10) の代わりに $n \rightarrow n+1$ とおけば,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.11)$$

と表すことができる. これは

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k + \binom{n+1}{n} B_n = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (4.12)$$

であるから

$$B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.13)$$

(4.13) が母関数の定義 1 の場合の漸化式である.

母関数の定義 2 の場合を考えよう. 考え方は定義 1 の場合と同じである. 係数 a_n, b_n, c_n は (3.6), (3.7), (3.11) を用いる.

$n = 0$ のとき, (2.7.1) の

$$c_0 = a_0 b_0 \quad (4.1)$$

から

$$\frac{B_0}{0!} \cdot 0 = 0, \quad (n = 0) \quad (4.14)$$

が得られる. しかし, (4.14) によっては B_0 は決まらない.

つぎに, $n = 1$ のとき, (2.7.2) の

$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 \quad (4.3)$$

から

$$\frac{B_0}{0!} \cdot \frac{1}{1!} + \frac{B_1}{1!} \cdot 0 = \frac{1}{0!}, \quad (n = 1) \quad (4.15)$$

が得られる. このとき (4.15) から $B_0 = 1$ が得られる.

一般に, $n = 1, 2, 3, \dots$ に対しては, (2.8) から

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \quad (4.7)$$

であるが, $b_0 = 0$ であるから, $k = n$ のときは省いてよいので, (3.6), (3.7) と (3.12) を用いれば

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!} \cdot \frac{1}{(n-k)!} = \frac{1}{(n-1)!}, \quad (n = 1, 2, 3, 4, \dots) \quad (4.16)$$

が成り立つ. (4.16) で $n = 1$ のときには (4.15) が成り立つのは当然である¹⁰. ここで, (4.16) の両辺に $n!$ をかければ,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!(n-k)!} B_k = n, \quad (n = 1, 2, 3, 4, \dots) \quad (4.17)$$

⁹(4.10) で $n = 2$ ととれば, (4.6) が導かれる. したがって, (4.10) は $n = 2$ のときにも成り立つ.

¹⁰ $n = 1$ のときは一般式の (4.16) と具体的な式 (4.15) と 2 回も導いたことになる. 定義 1 の場合と同様に重複であるが, わかりやすさを優先している.

したがって、二項係数の記号を用いれば

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

であるので、

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = n, \quad (n = 1, 2, 3, 4, \dots) \quad (4.18)$$

と表される。いま $n \rightarrow n+1$ とおきかえれば、

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k = n+1, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.19)$$

となる。 $\sum$ の和の記号の中から、 $k = n$ の項を取り出せば、

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k + \binom{n+1}{n} B_n = n+1, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.20)$$

であるから

$$B_n = 1 - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.21)$$

(4.21) は $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して成り立つように表記してあるが、その右辺の第 2 項の $\sum$ の和は $n = 0$ を除いた、 $n = 1, 2, \dots$ に対してとることに注意すべきであろう。

この定義 2 の場合も (4.15) または (4.21) から

$$B_0 = 1 \quad (4.22)$$

と求められる。

5 ベルヌーイ数の例

ベルヌーイ数の具体的例の導出は Shadow Academy の文献 [4] に詳しいのでここでは、結果だけを与えておく。

(定義 1 の場合)

$$\begin{array}{lll} B_0 = 1 & B_1 = -\frac{1}{2} & B_2 = \frac{1}{6} \\ B_3 = 0 & B_4 = -\frac{1}{30} & B_5 = 0 \\ B_6 = \frac{1}{42} & B_7 = 0 & B_8 = -\frac{1}{30} \end{array}$$

(定義 2 の場合)

$$\begin{array}{lll} B_0 = 1 & B_1 = \frac{1}{2} & B_2 = \frac{1}{6} \\ B_3 = 0 & B_4 = -\frac{1}{30} & B_5 = 0 \\ B_6 = \frac{1}{42} & B_7 = 0 & B_8 = -\frac{1}{30} \end{array}$$

[4] の説明によれば、この 2 つの定義において、異なる点は B_1 の符号が定義 1 の場合は $-$ であるが、定義 2 の場合は $+$ となるだけだという。

6 節では、ベルヌーイ多項式の母関数を導入し、それを級数展開したときの係数を求めよう。

6 ベルヌーイ多項式の母関数

天下りだが、まずベルヌーイの多項式 $B_n(x)$ の母関数を

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n \quad (6.1)$$

で定義する。このベルヌーイの多項式に対する母関数

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} \quad (A)$$

はベルヌーイ数の母関数とよく似ている。

いまその形を比べてみよう。ベルヌーイ数の母関数は定義 1 の場合には

$$\frac{t}{e^t - 1} \quad (B)$$

であり、定義 2 の場合には

$$\frac{te^t}{e^t - 1} \quad (C)$$

であった。

(C) は (A) で $x = 1$ とおけば得られる。また、(B) は (A) で $x = 0$ とおけば得られる。したがって、ベルヌーイ多項式の母関数はベルヌーイ数の母関数を一般化したものである。

以上のことを念頭において、各べき級数の係数を求めよう。これもベルヌーイ数のときとまったく同様に係数を求めることができる。

(6.1) の両辺に $e^t - 1$ をかければ、

$$te^{xt} = (e^t - 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n \quad (6.2)$$

となる。

いま、右辺の積の因子を

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n \quad (6.3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n := e^t - 1$$

$$= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \quad (6.4)$$

$$= 0 + \frac{1}{1!}t + \frac{1}{2!}t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}t^n + \cdots$$

とおけば、

$$a_n = \frac{B_n(x)}{n!} \quad (6.5)$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n = 0) \\ \frac{1}{n!} & (n \neq 0) \end{cases} \quad (6.6)$$

である。

さらに, (6.2) の左辺は te^{xt} であるから

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n &:= te^{xt} \\
&= t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xt)^n}{n!} \\
&= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} t^n \\
&= 0 + \frac{1}{0!} t + \frac{x}{1!} t^2 + \frac{x^2}{2!} t^3 + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} t^n + \cdots
\end{aligned} \tag{6.7}$$

である. これから

$$c_n = \begin{cases} 0 & (n=0) \\ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & (n \neq 0) \end{cases} \tag{6.8}$$

が得られる.

(6.5), (6.6), (6.8) で与えられる, a_n, b_n, c_n を用いて, 7 節でベルヌーイの多項式の漸化式を導こう.

7 ベルヌーイ多項式の漸化式

6 節の (6.5), (6.6), (6.8) を用いて, ベルヌーイの多項式の漸化式を求めることができる.

まず 2 節の (2.7.1) から, $n=0$ のとき

$$c_0 = a_0 b_0 \tag{7.1}$$

であったから

$$\frac{B_0(x)}{0!} \cdot 0 = 0 \tag{7.2}$$

しかし, (7.2) からは $B_0(x)$ は決まらない.

つぎに, 2 節の (2.7.2) から, $n=1$ のとき

$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 \tag{7.3}$$

であるから,

$$\frac{B_0(x)}{0!} \cdot \frac{1}{1!} + \frac{B_1(x)}{1!} \cdot 0 = \frac{1}{0!} \tag{7.4}$$

この (7.4) から $B_0(x) = 1$ が決まる.

$n \geq 1$ の整数 n に対しては

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \tag{7.5}$$

が成り立つが¹¹, (6.6) から $b_0 = 0$ であるから, 和は $n-1$ までとったのでよい. したがって,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k(x)}{k!} \cdot \frac{1}{(n-k)!} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \tag{7.6}$$

(7.6) の両辺に $n!$ をかければ,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!(n-k)!} B_k(x) = nx^{n-1}, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \tag{7.7}$$

¹¹実は $n=0$ のときも (7.5) は成り立つ. $n=0, 1$ の場合はすでに (7.1), (7.3) としてとり扱っている.

(7.7) を 2 項係数を用いて表せば,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k(x) = nx^{n-1}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (7.8)$$

が成り立つ. (7.8) で $n = 1$ とすれば,

$$\binom{1}{0} B_0(x) = 1 \quad (7.9)$$

が得られる. これは $B_0(x) = 1$ となり, これは (7.4) の結果と一致する.

(7.8) で $n - 1 \rightarrow n$ とおきかえれば,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k(x) = (n+1)x^n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (7.10)$$

と表すことができる. $B_n(x)$ の項を $\sum$ の中からとり出せば,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k(x) + \binom{n+1}{n} B_n(x) = (n+1)x^n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (7.11)$$

であるから¹²

$$B_n(x) = \begin{cases} 1, & (n = 0) \\ x^n - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k(x), & (n = 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (7.12)$$

が成り立つ.

8 ベルヌーイ多項式の例

この漸化式を使ったいくつかのベルヌーイの多項式の導出は [4] に詳しく導出されている. ここではそのいくつかの結果だけを挙げておこう.

$$\begin{aligned} B_0(x) &= 1 \\ B_1(x) &= x - \frac{1}{2} \\ B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6} \\ B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \\ B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30} \\ B_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x \\ B_6(x) &= x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42} \\ B_7(x) &= x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{7}{2}x^5 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{1}{6}x \\ B_8(x) &= x^8 - 4x^7 + \frac{14}{3}x^6 - \frac{7}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{30} \end{aligned}$$

¹²ただし, (7.11) の左辺の第 1 項の $\sum$ は $n = 0$ に対しては存在しない.

9 おわりに

べき乗和の一般的公式を与える問題はベルヌーイによって解決されていることは、ずっと以前に中西襄先生から教わったが、その内容をそのときには知らなかった。

それが今回、吉泉さんの論文 [1] を契機として、まずベルヌーイ数とベルヌーイ多項式について調べることができた。人は何かを学ぶためにはそのきっかけが必要なのだと思います。

そのきっかけを与えてくれた吉泉さんに感謝したい。彼の投稿がなかったら、このエッセイは全く存在しなかったのだから。

もっとも、このエッセイではどうやってベルヌーイ数とベルヌーイ多項式の母関数が導かれたのかは、まだ明らかではない。べき乗和のベルヌーイ多項式による導出については [2] を参照してください。

(2019.6.13)

参考文献

- [1] 吉泉豊春, べき乗和とベルヌーイ数, 数学・物理通信, 第9巻, 第3号 (2019) 11-16
- [2] 矢野 忠, ベルヌーイ多項式とべき乗和, 数学・物理通信, 第9巻, 第3号 (2019) 17-19
- [3] 高木貞治, 『解析概論』改訂第3版 (岩波書店) 230-234
- [4] Shadow Academy, ベルヌーイ数とベルヌーイ多項式,
<https://shadowacademy.web.fc2.com/bernoulli.html>

遠山啓の岩波新書を読む

矢野 忠^{*1}

Reading of Several Books by Hiraku Tohyama

Tadashi YANO^{*2}

1 はじめに

このエッセイは私の高校時代の日本史の先生であった、竹本千万吉先生が退職後に発行していた雑誌「燧」[1]に掲載されたものを改訂増補したものである^{*3}。

2 『無限と連続』

「弟よ、泣くな。20歳で死ぬために、僕にはありたけの勇気が必要なのだから。・・・」。若くして逝った天才数学者ガロアのこの記述ではじまる、遠山啓の『無限と連続』（岩波新書）[2]はその書き出しの鮮やかな印象によって若い私に数学への魅力とあこがれを感じさせた。高校生のころのことである。

しかし、残念ながら、この本は数学の劣等生であった、当時の私の理解をはるかに超えていた。大学に入学して早々に購入した岩波新書の中に武谷三男の『物理学入門』上と遠山啓の『無限と連続』とがある。物理学科に学びながらも、武谷の『物理学入門』ははじめの2つの章くらいしか読まなかったが、遠山の『無限と連続』は大学2年から3年にかけての春休みにインフルエンザで2週間ほど下宿の寝床で寝ていたときになんとか読み終えたと記憶している。現在の新版では横書きになっており、活字の新しい字体が使われているが、旧版は縦書きで活字も古い字体であった。

確かに、活字の新しさや印刷の鮮明さで以前よりも読みやすくなっているはずなのに、なんだか旧版の方の手あかですよごれた本のほうに愛着を感じ、ロマンチズムを感じるのはなぜなのだろう。高校時代の受験雑誌に名著としてよく推薦されていた、吉田洋一の『零の発見』（岩波新書）は当時の私の関心をまったく引き起こさなかったけれども、生意気な私は『無限と連続』にはよくわからないながらも強く魅かれた。

3 『数学入門』

遠山が『数学入門』上、下[3]を著したときにもこれらを直ちに購入した。『数学入門』は『無限と連続』ほど強烈な印象を私の心に残さなかったけれども、数学のテキストの硬さになじんだ身にとってはなんと人間っぽく生き生きとしていたことだったろう。しかし、遠山が当時すでに数学の研究よりもむしろ数学教育に関心をもっていることを、そのときまだ知っていなかった。

最近、子どもが中学生になって、私の書棚から自分の興味のありそうな本を引き出してきて、読むために家のそこここに放り出してあるようになった。その中に『数学入門』があった。正直言って中学生、それも代数等を学び始めたばかりの中学生にはこの『数学入門』は難しすぎる。しかし、夏休み中、そこいらにこの本が放り出してあ

^{*1} 元愛媛大学工学部

^{*2} yanotad@earth.ocn.ne.jp

^{*3} 再掲載にあたって改題したほか、読みやすいように節に分けたり、その後、「数学・物理通信」に書いたテーマを引用したり、また注をつけた。5、6節は新しく書き加えた。

るので、私はひょっと手に取って眺めてみた。もとよりあまり本気で読む気はなかったので、上巻の最後の章「複素数」の一部を読んでみた。とてもおもしろい。

それで欲が出てきて、その章全体をはじめから読んでみた。ミスプリが2カ所ほどあるのに気づいた。他の章にはミスプリントはないのかなと思った。こんなおもしろい本にミスプリントがあるのは「玉にきず」というものだ。ほかにミスプリントがないかどうか探してみようと思った*4。

第1章から読もうかなと思って、第1章「数の幼年期」のところを見てみると数の発見の歴史みたいな話であり興味をもてない。それで最後の章から、前のほうの章へと一章ずつもどっていくことにした。こうしてなんとか興味をもてない最初の章まで読み終わるのに1週間ほどかかった*5。

つづいて下巻の方を読もうと思ってみたが、目次を見てみると読む気が起きない。どうしてなのだろう。たぶん、下巻は比較的良好に知っている分野、微分積分、についての記述が多いからなのだろう*6。それで無理矢理に下巻を読むのはやめにした*7。その代わりに『数学の学び方・教え方』[6]を書棚から取り出してきて、その序章を読んだ。

4 『数学の学び方・教え方』

この本の序章に遠山の数学教育に対する考え方がよく述べられている。いや、人間というものに対する温かさがにじみ出ている。第1章「量」も読んでみよう。ここで、私たちは量について整然とした分類体系が遠山らによってつくられているのを知る。実に見事だ。

遠山によれば、数学教育で扱う量は大きく分離量と連続量に分けられる。分離量は数えられる量であり、連続量は数えることのできない量である。

連続量は大きさとか広がりとかいったものを表す外延量と質的な量を表す内包量に分けられる。内包量はさらに度という量と率という量とに細分される。

すなわち、量はまず

$$\text{量} \begin{cases} \text{分離量}^{(1)} \\ \text{連続量} \end{cases}$$

と大きく分類され、つぎに連続量は

$$\text{連続量} \begin{cases} \text{外延量}^{(2)} \\ \text{内包量} \end{cases}$$

とに分類される*8。さらに内包量は

$$\text{内包量} \begin{cases} \text{度}^{(3)} \\ \text{率}^{(4)} \end{cases}$$

とに細分類される*9。

*4 本を読むのに変な動機だと思うが、これが事実なのだからしかたがない。その後、新しい版を購入して調べてみたが、長く読み継がれてきただけに、私の気づいていたミスプリントはすべてなくなっていた。

*5 この上巻では多元連立1次方程式の解法のところでGrassmanの交代数を使っているところが抜群におもしろい。さらに虚数*i*の導入のしかたは印象的である。また複素数の意義がはじめて認識されたのは、2次方程式の解ではなくて3次方程式の解についてであることも最近知った。これについては[4]を見よ。

*6 ある人によれば、下巻は上巻ほどはおもしろくはないという。それは読者の問題ではなくて、著者が書くのにくたびれてきて、いろいろはしょってしまって、不親切になっているからだという。真偽のほどはわからない。

*7 その後、この下巻も読んだ。その中で自然対数の底*e*の導入が特に興味深い。これについては[5]を見よ。

*8 外延量と内包量とを分けるのは加法性が成り立つか、成り立たないかである。3kgの水に5kgの水を足すと8kgの水となる。一方、これらの水の温度が摂氏10度と20度であるとき、これを合体させたと、30度の水とはならない。加法性が成り立つかどうかはこのことを指す。

*9 度と率については補遺を参照せよ。

量の右肩の上につけられた番号の順に小学校、中学校の数学で教えていけば、生徒が現在引き起こしている無用の混乱は避けられるという。もちろん、量で一番わかりにくいのは内包量の中でも率という名のついている内包量である。

現在の数学教育では抽象化された数の背後にある量の概念の学習が不十分で、なおざりにされている。そういえば、現在でも小学生は5年生の2学期ころになって、内包量の率といわれるもの、たとえば、利率とか百分率とかいったものが出てくると算数のわからなくなる子どもが多くなるそうだ。

そして、量について意識的に教えなくてはならないという考えが教科書にも指導要領にもほとんどなく、したがって大部分の小学校の先生方もその点についてあまりよく知っていないために、算数ざらい、数学ざらいをつくりだしている原因を除去することはほとんどできていないと言ってよい^{*10}。

第2章「数」もつづいて読んでみよう。数の計算指導体系（いわゆる水道方式）についての説明をここで見出す。数の計算練習は「筆算を主体とすべきで、暗算を主体とすべきではない」との考えに私も大賛成だ^{*11}。

昔、私が小学生の2年生か3年生かころ、まずはじめに横書きで数の計算をやらされた。同級の優秀な人たちが全部計算をやり終わっているのに私はいつも半分ぐらいしかできていなかった。その後、縦書きの計算法を教わったとき、えらく簡単に計算できることに気がついた。なのに、なぜ横書きの計算法を先にやるのか子ども心にも不思議であった。そうするとあのときの疑問は理由のないことではなかったのだと今になってやっと理解できる。このときのとまどいの原因は、1桁または2桁の数のたし算、ひき算は暗算で計算させ、3桁以上の数のたし算、ひき算は筆算でやらせるために縦書きで計算するということにあったのだ。

私の子どもが小学校1年生のときに暗算がとても下手だった。日曜参観日に学校参観に行ってもその子を見ていると他の子に比べていかにもうすのろに見え、どうも自分の小さいときを見ているように思えてとてもつらかった。

コンピュータのプログラミング技法に関してこのごろ構造化ということがしきりに言われているが、数の計算指導体系についてはある種の構造化がすでに20年以上も前に遠山らの手で日本においてなされていたのだ^{*12}。なぜ、これが一般の小学校の教育にすぐとりいれられないのだろう^{*13}。

指導要領にあわないという理由で遠山たちの編纂した算数の教科書『わかるさんすう』（麦書房）は検定を通っていない。いや、検定に通ることをあきらめた教科書といったほうが正しいらしい。検定を通っていないし、教科書としても採用されていないにもかかわらず『わかるさんすう』は全国の多くの先生に読まれているという。

それにしても、このような不合理が許されているのだろうか。もっと、私たちは数学教育においても「いいものはいい」との合理主義に徹するべきではないのか。小学校での「より効果的な教育方法」がすでに開発されており、実績もあがっているというのになぜ直ちに採用されないで、多くの子どもたちを旧態依然たる教育方法で苦しめるのか。

大多数の小学校の先生たちは教科書に忠実であり、教科書以外の他の教え方や考え方があることすら知らないのかもしれない。また、いわゆる「水道方式」のよさを知り、それにしたがって教えようとする先生は校長や教育委員会から白眼視されることすらあるらしい。

科学の歴史においても、真理を真理として直ちに認めたくない勢力が存在したことは紛れもない事実である。とりわけ、コペルニクスの地動説を実験的な観測から支持したガリレオ・ガリレイとカトリック教会の総本山であ

^{*10} この「量の体系」は数学教育、とりわけ、算数教育で大きく有効であることが分かっている。しかし、中学校、高校へと数学が進むと量は複雑になってきて、それほど明解ではなくなる。しかし、熱力学や物理化学で示量変数 (extensive variable) と示強変数 (intensive variable) という量が出てくるが、これがそれぞれ外延量と内包量にほぼ対応している。

^{*11} これは一桁の数どうしのたし算、引き算の基礎暗算といわれているものをももちろん除いての話である。

^{*12} この元の原文を書いたのは1985年であることに注意しておこう。したがって、水道方式が考案されたのはいまから考えると50数年も前のことになる。

^{*13} こう書いたが、現在では算数の教科書は格段によくなっており、水道方式の一番の目玉とされていた、タイルも取り入れられている。だから、この指摘はもう時代錯誤となっている部分もあるだろう。だが、十分よくなったというにはまだ遠い。

る、ローマ法王庁との軋轢（あつれき）は現在ではよく知られている。

僕は水道方式が普通に小学校の教育にとりいれられるのにまだ数世紀を待たねばならないのだろうか。

5 『現代数学対話』

遠山さんが『数学入門』を書いていたとき、数学のタテ系にあたるもののみならず、同じアイディアがちがった箇所であったところできくことに気がついたという。それらを遠山さんは数学のヨコ系という。この数学のヨコ系にあたるものを述べたものがこの書 [7] である。それらは

1. 分析と総合
2. 構造の科学
3. 記号と図式
4. 拡張への衝動
5. 機能と写像

である。

これらの中で私が特に注目したのは第4章「拡張への衝動」のところの、ガンマ関数であった^{*14}。

ガンマ関数は n の階乗と呼ばれる $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ の非整数への一般化である。 $n!$ は

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (5.1)$$

で正の整数から正の実数へと一般化される。

さらに、

$$\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \frac{1}{\Gamma(x)} \quad (5.2)$$

を用いて、負の実数にも拡張される。もちろん、このときに 0 と負の整数 $n = -1, -2, \dots$ を除かなければならない。

6 おわりに

遠山啓は「量の体系」や「水道方式」を提唱した数学者であった。そのほかにも関数を教えるのにブラックボックスとか水槽とかのシェーマを用いた数学者・数学教育者であった。

外延量は加法性が成り立つのに対し、内包量は加法性が成り立たない。もっとも内包量において加法が絶対に成立しないのではなく、相対速度のように加法が成り立つ場合もあり、内包量の加法をどう教えるかは一つの課題である^{*15}。

補遺 度と率

内包量は度と率に分かれる。これら内包量はある量のある量でわった商として定義される。

まず、度から始めよう。

度の典型的なものとして、速度と密度がある。

^{*14} これは私が複素解析の解析接続の方法に強い関心があるためである。

^{*15} 遠山啓の教育一般および数学教育上の考えの詳細は『遠山啓著作集』（太郎次郎社）（全27巻）により、詳しく知ることができる。また、民間教育団体、数学教育協議会に集う先生方はその実践と研究をさらに展開している。

速度はある時間に動いた距離であるから、

$$\text{速度} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{\text{距離 m}}{\text{時間 s}} \quad (6.1)$$

である。ここで m,s はそれぞれ長さの単位としてメートルをとり、時間の単位としては秒をとる。度の場合には分子の単位と分母の単位が異なっている。

密度はある体積を占める質量であるから、

$$\text{密度} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = \frac{\text{質量 kg}}{\text{体積 m}^3} \quad (6.2)$$

である。

つぎに率の典型的なものとして、利率と濃度がある*16。

率も度と同じように、ある量のある量でわった商で定義されるが、この場合は度とは違って分子と分母の単位が同じ量のわり算で定義される。

利率は元金につく利息であるから、

$$\text{利率} = \frac{\text{利息 (円)}}{\text{元金 (円)}} \quad (6.3)$$

利率には量の単位がない。

濃度の場合の例として食塩水の濃度を考えると、

$$\text{食塩水の濃度} = \frac{\text{食塩 (kg)}}{\text{水+食塩 (kg)}} \quad (6.4)$$

であり、濃度にも単位がない。

率は、単位がつかない、いわゆる無名数となるので、それだけ度よりも理解が難しくなる。

(1985.6.2) (2018.6.20 改訂)

参考文献

- [1] 矢野 忠, 遠山啓の諸著作を読む, 「燧」 7 号 (1986.4.1) (今治総合文化研究所, 1986) 87-93
- [2] 遠山 啓, 『無限と連続』 (岩波新書, 1952)
- [3] 遠山 啓, 『数学入門』 上 (岩波新書, 1959)
- 遠山 啓, 『数学入門』 下 (岩波新書, 1960)
- [4] 矢野 忠, 虚数とカルダノの公式, 数学・物理通信 5 巻 3 号 (2015.3.9) 2-13
- [5] 矢野 忠, 自然対数の底, 数学・物理通信 8 巻 2 号 (2018.3.15) 11-15
- [6] 遠山 啓, 『数学の学び方・教え方』 (岩波新書, 1972)
- [7] 遠山 啓, 『現代数学対話』 (岩波新書, 1967)

*16 濃度は度という語がついているが、量としては率である。

編集後記

梅雨の合間ですが、皆様にはご健勝にお過ごしのことと存じます。

「数学・物理通信」9巻4号を発行します。この4号は数学的記述の多い世戸さんと吉田さんの論文と「ベルヌーイ数とベルヌーイ多項式」等の力作が並んだ、充実した号です。それぞれ数学的な考察も大変だったと思われます。

私が毎回書くと言っている、べき級数の収束半径に関する論文も大筋ではできあがっているのですが、完成していません。

コーシーの定理がまずあって、それをアダマールが深化させた、その定理は現在コーシー・アダマールの定理と呼ばれています。

はじめ、この定理を上極限、下極限の概念を学ばない者にとってはコーシーが得た形でしか学ばないのですが、これをアダマールが上極限の概念によって拡張したものとなっています。

そのことのわかりやすい解説を論文として書く予定ですが、編者（新関）の都合で遅くなっています。そのうちに必ず完成させます。

皆様には今後ともに、ご愛読をお願いします。

（新関章三）