数学・物理通信

9巻5号　　2019年6月

編集　新関章三・矢野　忠

2019年7月9日

目次 (Contents)

自然数の累乗和 – 補遺 1 –

秋葉 敏男

The Power Series of Natural Number – Addendum 1 –

Toshio Akiba[1]

1 はじめに

自然数 (1〜n) の q 乗の和 $\sum_{k=1}^{n} k^q \equiv S_q(n)$ の表示式としては、次のものがあげられます.

(1) q 次多項式 $f(x)$ で、$(q+1)$ 個の点 $(j, f(j)) \quad (0 \le j \le q)$ を通る様なものを表す「差分和公式」で、特に $f(j) = \sum_{k=1}^{j} k^q$ の場合、$f(n) = S_q(n)$ となります. これは、ベルヌーイ の見出した多項式で、係数の構成因子にベルヌーイ数が含まれています.[2]

(2) 関数 $f(x)$ の和 $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ を表す「オイラー・マクローリンの級数公式」においては、係数の構成因子にベルヌーイ数が含まれていて、$f(x) = x^q$ の時 $S_q(n)$ となります.[2]

(3) q の偶奇性に対応した多項式 [3]
文献 3 から後の考察で必要な公式を抜粋して置きます.

$$
\begin{aligned}
S_{2p}(n) &= S_2(n)\phi_{2p-2}(n) \qquad : \qquad S_{2p+1}(n) = S_1^2(n)\psi_{2p-2}(n) \\
S_2(n) &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad : \qquad S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2} \\
4^p(2p+1)\phi_{2p-2}(n) &\equiv 12\sum_{l=0}^{p-1}(2n+1)^{2l} - \sum_{l=1}^{p-1} 4^l \begin{pmatrix} 2p+1 \\ 2l \end{pmatrix} \phi_{2l-2}(n) \qquad (1.1) \\
4^p(2p+2)\psi_{2p-2}(n) &\equiv 16\sum_{l=0}^{p-1}(p-l)(2n+1)^{2l} - \sum_{l=1}^{p-1} 4^l \begin{pmatrix} 2p+2 \\ 2l+1 \end{pmatrix} \psi_{2l-2}(n) \qquad (1.2)
\end{aligned}
$$

(1),(2) の多項式は、低次の項から逐次的に係数が決定されるもので、数学辞典などに掲載されている公式の形ではありません. そこで、新しい漸化式を使って掲載公式を導いてみます.

2 漸化式の導出

$S_q(n)$ の漸化式の一つを、実数関数 x^q との関連から導いてみます.

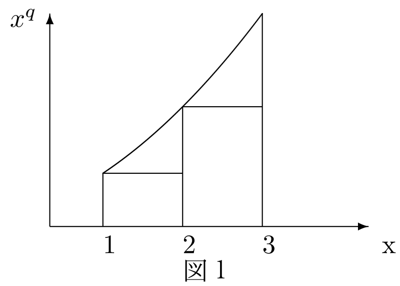

図 1

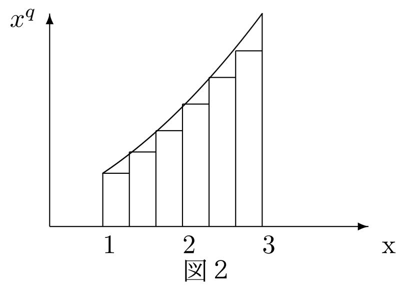

図 2

[1] tawarp@mug.biglobe.ne.jp

$\sum_{k=1}^{n} k^q$ は、図 1 に示す短冊部分の面積と考えられます.（図 1 は n = 2 の場合）
そこで、各区間 (k,k+1) を r 等分した図 2 に示す短冊部分の面積を $f_q^r(n)$ とすると

$$\begin{aligned} f_q^r(n) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{r-1}\left(k+\frac{i}{r}\right)^q \times \frac{1}{r} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{l=0}^{q}\left(\begin{array}{c} q \\ l \end{array}\right) k^{q-l}\left(\frac{i}{r}\right)^l \frac{1}{r} \\ &= \sum_{l=0}^{q}\left(\begin{array}{c} q \\ l \end{array}\right)\frac{1}{r^{l+1}}\sum_{i=0}^{r-1} i^l \sum_{k=1}^{n} k^{q-l} = \sum_{l=0}^{q}\left(\begin{array}{c} q \\ l \end{array}\right) S_{q-l}(n) \times \frac{S_l(r-1)}{r^{l+1}} \end{aligned}$$

l についての和を、偶数項と奇数項とに分けると

$$f_q^r(n) = \sum_{l=0}^{[\frac{q}{2}]}\left(\begin{array}{c} q \\ 2l \end{array}\right) S_{q-2l}(n) \times \frac{S_{2l}(r-1)}{r^{2l+1}} + \sum_{l=0}^{\{\frac{q}{2}\}}\left(\begin{array}{c} q \\ 2l+1 \end{array}\right) S_{q-2l-1}(n) \times \frac{S_{2l+1}(r-1)}{r^{2l+2}} \tag{2.1}$$

但し、$\{\frac{q}{2}\}$ は、q が偶数なら $[\frac{q}{2}]-1$ を意味し、q が奇数なら $[\frac{q}{2}]$ を意味します. そして、$S_l(n)$ などは以下の様に表されます.

$$S_{2l}(r-1) = S_2(r-1) \times \phi_{2l-2}(r-1) = \frac{r(r-1)(2r-1)}{6} \times \phi_{2l-2}(r-1) \tag{2.2}$$

$$S_{2l+1}(r-1) = S_1(r-1)^2 \times \psi_{2l-2}(r-1) = \frac{r^2(r-1)^2}{4} \times \psi_{2l-2}(r-1) \tag{2.3}$$

$$\phi_{2l-2}(r-1) = \frac{3}{2l+1}r^{2l-2} + \phi^* \quad : \quad \psi_{2l-2}(r-1) = \frac{2}{l+1}r^{2l-2} + \psi^* \tag{2.4}$$

ここに、ϕ^* 及び ψ^* は、r の $(2l-3)$ 次多項式です.[2]

式 (2.2) より

$$\frac{S_{2l}(r-1)}{r^{2l+1}} = \frac{(r-1)(2r-1)}{6r^2}\left(\frac{3}{2l+1} + \frac{\phi^*}{r^{2l-2}}\right) \tag{2.5}$$

式 (2.3) より

$$\frac{S_{2l+1}(r-1)}{r^{2l+2}} = \frac{(r-1)^2}{4r^2}\left(\frac{2}{l+1} + \frac{\psi^*}{r^{2l-2}}\right) \tag{2.6}$$

ここで r を無限大にすれば、式 (2.5) より

$$\lim_{r\to\infty}\frac{S_{2l}(r-1)}{r^{2l+1}} = \frac{1}{3}\frac{3}{2l+1} \tag{2.7}$$

そして、式 (2.6) より

$$\lim_{r\to\infty}\frac{S_{2l+1}(r-1)}{r^{2l+2}} = \frac{1}{4}\frac{2}{l+1} \tag{2.8}$$

一方、$f_q^r(n)$ において r を無限大にした時の極限値は、式 (2.7),(2.8) を用いて式 (2.1) を変形して

$$\begin{aligned} \lim_{r\to\infty} f_q^r(n) &= \sum_{l=0}^{[\frac{q}{2}]}\left(\begin{array}{c} q \\ 2l \end{array}\right) S_{q-2l}(n) \times \frac{1}{2l+1} + \sum_{l=0}^{\{\frac{q}{2}\}}\left(\begin{array}{c} q \\ 2l+1 \end{array}\right) S_{q-2l-1}(n) \times \frac{1}{2l+2} \\ &= \sum_{l=0}^{q}\left(\begin{array}{c} q \\ l \end{array}\right) S_{q-l}(n) \times \frac{1}{l+1} \end{aligned}$$

[2] 式 (1.1),(1.2) 参照

ところが、$\lim_{r\to\infty} f_q^r(n)$ は、区間 [1,n+1] での関数 x^q の定積分に収束しますから、

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{q}\begin{pmatrix} q \\ l \end{pmatrix} S_{q-l}(n)\times\frac{1}{l+1} &= \int_1^{n+1} x^q \mathrm{d}x \\ &= \frac{(n+1)^{q+1}-1}{q+1}\end{aligned}$$

変形して整理すると、次の様な漸化式が得られます.

$$\sum_{l=0}^{q}\begin{pmatrix} q+1 \\ l+1 \end{pmatrix} S_{q-l}(n) = n\sum_{l=0}^{q}(n+1)^l \tag{2.9}$$

3 $S_q(n)$ の表示式

漸化式 (2.9) において、$q-l=j$ と置換すれば

$$\sum_{j=0}^{q}\begin{pmatrix} q+1 \\ q+1-j \end{pmatrix} S_j(n) = n\sum_{j=0}^{q}(n+1)^j$$

左辺から $S_q(n)$ を取り出して

$$S_q(n) = \frac{n}{q+1}\sum_{j=0}^{q}(n+1)^j - \sum_{j=0}^{q-1}\frac{1}{q+1}\begin{pmatrix} q+1 \\ q+1-j \end{pmatrix} S_j(n) \tag{3.1}$$

そこで、

$$A_q \equiv \frac{n}{q+1}\sum_{j=0}^{q}(n+1)^j \quad : \quad C_j^q \equiv \frac{1}{q+1}\begin{pmatrix} q+1 \\ q+1-j \end{pmatrix}$$

と置けば、式 (3.1) は次の様に表されます.

$$S_q(n) = A_q - \sum_{j=0}^{q-1} C_j^q S_j(n) \tag{3.2}$$

漸化式 (3.2) の累乗数 q を、付録 1 に示す要領で降下させると次の様な n の $(q+1)$ 次多項式が得られます.

$$S_q(n) = \sum_{k=1}^{q+1} a_k n^k$$

$$K_{q-k} \equiv -\sum_{l=0}^{k-1}\frac{K_{q-l}}{q-l+1}\begin{pmatrix} q-l+1 \\ k-l+1 \end{pmatrix} \quad (\text{但し、}K_q=1) \tag{3.3}$$

$$a_1 \equiv \sum_{l=0}^{q-1}\frac{q-l}{q-l+1}K_{q-l} \tag{3.4}$$

$$a_k \equiv \sum_{l=0}^{q+1-k}\frac{1}{q-l+1}\begin{pmatrix} q-l+1 \\ k \end{pmatrix} K_{q-l} \qquad (k \geq 2) \tag{3.5}$$

これで $S_q(n)$ の多項式表示が得られました. 次に、定数 K_{q-l} とベルヌーイ数との関係を求めます.

4　ベルヌーイ数による表示

定義式 (3.3) を変形すると

$$\sum_{l=0}^{k} \frac{K_{q-l}}{q-l+1} \begin{pmatrix} q-l+1 \\ k-l+1 \end{pmatrix} = 0 \tag{4.1}$$

そこで、$L_{q-l} \equiv (q-l)! \times K_{q-l}$ により L_{q-l} を導入して、式 (4.1) に代入すると $\sum_{l=0}^{k} \frac{L_{q-l}}{(k-l+1)!(q-k)!} = 0$ となり、両辺を $(q-k)!$ 倍すると次式が得られます.

$$\sum_{l=0}^{k} \frac{L_{q-l}}{(k-l+1)!} = 0 \tag{4.2}$$

左辺から L_{q-k} を取り出して

$$L_{q-k} = -\sum_{l=0}^{k-1} \frac{L_{q-l}}{(k-l+1)!}$$

これから、L_{q-l} は $L_q = q!$ に比例する事が分かりますから、$L_{q-l} = q!M_{q-l}$ の様に書けます. これを (4.2) に代入して

$$\sum_{l=0}^{k} \frac{M_{q-l}}{(k-l+1)!} = 0 \tag{4.3}$$

そこで、$l!M_{q-l} \equiv B_l$ と置けば、(4.3) は $\sum_{l=0}^{k} \frac{B_l}{(k-l+1)!l!} = 0$ となり、両辺を (k+1)!倍すると

$$\sum_{l=0}^{k} \begin{pmatrix} k+1 \\ l \end{pmatrix} B_l = 0 \tag{4.4}$$

これは、よく知られたベルヌーイ数を決める漸化式です.[4]
そして、定数 K_{q-l} とベルヌーイ数 B_l との関係は

$$\begin{aligned} K_{q-l} = \frac{L_{q-l}}{(q-l)!} &= \frac{q!M_{q-l}}{(q-l)!} \\ &= \frac{q!B_l}{l!(q-l)!} = \begin{pmatrix} q \\ l \end{pmatrix} B_l \end{aligned} \tag{4.5}$$

関係式 (4.5) を使えば、付録 2 に示す様に式 (3.4), (3.5) を変形して「ベルヌーイ数を用いた表示式」が導かれます.

付録 1 累乗数の降下計算

3 頁で導かれた漸化式 (3.2) を改めて記します.

$$S_q(n) = A_q - \sum_{j=0}^{q-1} C_j^q S_j(n) \tag{a1.1}$$

この漸化式 (a1.1) の累乗数 q を、以下の要領で降下させます.

$$S_q(n) = A_q - \sum_{j=0}^{q-1} C_j^q S_j(n) \;=\; A_q - C_{q-1}^q S_{q-1}(n) - \sum_{j=0}^{q-2} C_j^q S_j(n)$$
$$= A_q - C_{q-1}^q \left(A_{q-1} - \sum_{j=0}^{q-2} C_j^{q-1} S_j(n) \right) - \sum_{j=0}^{q-2} C_j^q S_j(n)$$
$$= A_q - C_{q-1}^q A_{q-1} + \sum_{j=0}^{q-2} \left(C_{q-1}^q C_j^{q-1} - C_j^q \right) S_j(n)$$

ここで、$K_q \equiv 1 : K_{q-1} \equiv -C_{q-1}^q$ と定義すれば

$$\begin{aligned}
S_q(n) &= \sum_{l=0}^{1} K_{q-l} A_{q-l} - \sum_{j=0}^{q-2} \left(K_{q-1} C_j^{q-1} + C_j^q \right) S_j(n) \\
&= \sum_{l=0}^{1} K_{q-l} A_{q-l} - \left(K_{q-1} C_{q-2}^{q-1} + C_{q-2}^q \right) S_{q-2}(n) - \sum_{j=0}^{q-3} \left(K_{q-1} C_j^{q-1} + C_j^q \right) S_j(n) \\
&= \sum_{l=0}^{1} K_{q-l} A_{q-l} - \left(K_{q-1} C_{q-2}^{q-1} + C_{q-2}^q \right) (A_{q-2} - \sum_{j=0}^{q-3} C_j^{q-2} S_j) - \sum_{j=0}^{q-3} \left(K_{q-1} C_j^{q-1} + C_j^q \right) S_j(n) \\
&= \sum_{l=0}^{2} K_{q-l} A_{q-l} - \sum_{j=0}^{q-3} \left(\sum_{l=0}^{2} K_{q-l} C_j^{q-l} \right) S_j(n)
\end{aligned}$$

但し、$K_{q-2} \equiv - \left(K_{q-1} C_{q-2}^{q-1} + C_{q-2}^q \right)$ と定義しています.
同様の計算を $(q-1)$ 回繰り返せば、

$$K_{q-k} \equiv -\sum_{l=0}^{k-1} K_{q-l} C_{q-k}^{q-l} = -\sum_{l=0}^{k-1} \frac{K_{q-l}}{q-l+1} \begin{pmatrix} q-l+1 \\ k-l+1 \end{pmatrix} \tag{a1.2}$$

として

$$\begin{aligned}
S_q(n) &= \sum_{l=0}^{q-1} K_{q-l} A_{q-l} - \sum_{l=0}^{q-1} K_{q-l} C_0^{q-l} S_0(n) \\
&= \sum_{l=0}^{q-1} K_{q-l} A_{q-l} - n \sum_{l=0}^{q-1} K_{q-l} \frac{1}{q-l+1} \\
&= n \sum_{l=0}^{q-1} \frac{K_{q-l}}{q-l+1} \left(\sum_{j=0}^{q-l} (n+1)^j - 1 \right) \\
&= n \sum_{l=0}^{q-1} \frac{K_{q-l}}{q-l+1} \left(\frac{(n+1)^{q-l+1} - 1}{n} - 1 \right)
\end{aligned}$$

右辺を更に変形すると

$$\begin{aligned}
S_q(n) &= \sum_{l=0}^{q-1} \frac{K_{q-l}}{q-l+1} \left(\sum_{k=0}^{q-l+1} \begin{pmatrix} q-l+1 \\ k \end{pmatrix} n^k - n - 1 \right) \\
&= \sum_{l=0}^{q-1} \frac{K_{q-l}}{q-l+1} \left(\sum_{k=2}^{q-l+1} \begin{pmatrix} q-l+1 \\ k \end{pmatrix} n^k + n(q-l) \right)
\end{aligned}$$

この二重和の並べ替えを丹念に計算すれば、

$$S_q(n) = \sum_{k=2}^{q+1}\sum_{j=0}^{q+1-k} \frac{K_{q-j}}{q+1-j}\begin{pmatrix} q+1-j \\ k \end{pmatrix} n^k + \sum_{l=0}^{q-1} K_{q-l}\frac{q-l}{q-l+1} n$$

これは、n の $(q+1)$ 次多項式ですから、a_k を下記の係数として $\sum_{k=1}^{q+1} a_k n^k$ の形に書けます.

$$a_1 = \sum_{l=0}^{q-1} \frac{q-l}{q-l+1} K_{q-l} \tag{a1.3}$$

$$a_k = \sum_{l=0}^{q+1-k} \frac{1}{q-l+1}\begin{pmatrix} q-l+1 \\ k \end{pmatrix} K_{q-l} \qquad (k \geq 2) \tag{a1.4}$$

付録 2 ベルヌーイ数による表示式

式 (4.4) において、$k=q-1$ の場合は

$$\sum_{l=0}^{q-1}\begin{pmatrix} q \\ l \end{pmatrix} B_l = 0 \tag{a2.1}$$

次に、$B_{2l+1}=0 \quad (l \geq 1)$ に注意して、漸化式 (a2.1) を変形すれば (但し、q を $q+1$ で置換しています)

$$B_0 + (q+1)B_1 + \sum_{l=1}^{[\frac{q}{2}]}\begin{pmatrix} q+1 \\ 2l \end{pmatrix} B_{2l} = 0$$

$B_0 = 1, B_1 = -1/2$ を用いて整理すると

$$\sum_{l=1}^{[\frac{q}{2}]}\begin{pmatrix} q+1 \\ 2l \end{pmatrix} B_{2l} = \frac{q-1}{2} \tag{a2.2}$$

そして、3 節で導出された多項式の係数 (3.4),(3.5) はベルヌーイ数を用いて、以下の様に書き換えられます.

$$a_1 = \sum_{l=0}^{q-1} \frac{q-l}{q-l+1}\begin{pmatrix} q \\ l \end{pmatrix} B_l \tag{a2.3}$$

$$a_k = \sum_{l=0}^{q+1-k} \frac{1}{q-l+1}\begin{pmatrix} q \\ l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q-l+1 \\ k \end{pmatrix} B_l \qquad (k \geq 2) \tag{a2.4}$$

(a2.1),(a2.2) を使って a_1, a_k を変形した結果は ($m \geq 1$ として)

$$a_1 = B_q \tag{a2.5}$$

$$a_{q-2m} = 0 \tag{a2.6}$$

$$a_{q-2m+1} = \frac{1}{2m}\begin{pmatrix} q \\ 2m-1 \end{pmatrix} B_{2m} \tag{a2.7}$$

これらの係数を用いれば、$S_q(n)$ はベルヌーイ数に依って表示されます.[4]

$$S_q(n) = \frac{1}{q+1} n^{q+1} + \frac{1}{2} n^q + \sum_{m=1}^{[\frac{q}{2}]} \frac{1}{2m}\begin{pmatrix} q \\ 2m-1 \end{pmatrix} B_{2m} n^{q+1-2m} \tag{a2.8}$$

参考文献

[1] 森口・宇田川・一松 著「岩波数学公式 II」(岩波書店 1957) p.11 参照

[2] E.Hairer and G.Wanner 「Analysis by Its History」(Springer 1995)
蟹江幸博 訳 「解析教程」上 (丸善出版 2012)
p. 13〜p. 18(多項式の係数決定問題)　及び p.190〜p.194(II.10 オイラー・マクローリンの和公式) 参照

[3] 秋葉敏男「自然数のべき乗の級数」数学・物理通信 5 巻 7 号 (2015)
公式 (1.1)〜(1.3) 及び、$\{\kappa_j\}, \{\lambda_j\}$ については、§ 3.3 公式のまとめ (p.8〜 p.9) 参照

[4] ベルヌーイ数　http://ja.wikipedia
第一頁に、漸化式が掲載されています. $S_q(n)$ の表示式は、第四頁に記載されています.

自然数の累乗和 – 補遺 2 –

秋葉 敏男

The Power Series of Natural Number – Addendum 2 –

Toshio Akiba[1]

1 はじめに

自然数 (1〜n) の q 乗の和 $\sum_{k=1}^{n} k^q \equiv S_q(n)$ の表示式として、q の偶奇性に対応した多項式があります. [1] 文献を要約すると、下記のとおりです.

$$S_{2p}(n) = S_2(n)\phi_{2p-2}(n) \quad : \quad S_{2p+1}(n) = S_1^2(n)\psi_{2p-2}(n)$$

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad : \quad S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$4^p(2p+1)\phi_{2p-2}(n) \equiv 12\sum_{l=0}^{p-1}(2n+1)^{2l} - \sum_{l=1}^{p-1} 4^l \begin{pmatrix} 2p+1 \\ 2l \end{pmatrix} \phi_{2l-2}(n) \tag{1.1}$$

$$4^p(2p+2)\psi_{2p-2}(n) \equiv 16\sum_{l=0}^{p-1}(p-l)(2n+1)^{2l} - \sum_{l=1}^{p-1} 4^l \begin{pmatrix} 2p+2 \\ 2l+1 \end{pmatrix} \psi_{2l-2}(n) \tag{1.2}$$

漸化式 (1.1),(1.2) より、$\phi_{2p-2}(n), \psi_{2p-2}(n)$ は n の $(2p-2)$ 次多項式である事が示されます.($\phi_0 = \psi_0 = 1$)

$$\phi_{2p-2} = \sum_{k=0}^{2p-2} a_k n^k = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_{2k}(n+1/2)^{2k} \quad : \quad \psi_{2p-2} = \sum_{k=0}^{2p-2} b_k n^k = \sum_{k=0}^{p-1} \beta_{2k}(n+1/2)^{2k} \tag{1.3}$$

文献の末尾で、この多項式の係数和、零点などについて結果のみ示しましたが、ここでは係数の母関数について考察します.

2 数列 $\{\kappa_j\}, \{\lambda_j\}$ の母関数

第 1 節 (はじめに) で示した 多項式 (1.3) の係数の計算式には、定数列 $\{\kappa_j\}, \{\lambda_j\}$ が用いられています.
これらは、再帰的に下記の様に定義されました.($\kappa_p = 1, \lambda_p = 1$)[1]

$$\kappa_{p-k} \equiv -\sum_{j=0}^{k-1} \frac{\kappa_{p-j}}{2p-2j+1} \begin{pmatrix} 2p-2j+1 \\ 2p-2k \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

$$\lambda p - k \equiv -\sum_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda_{p-j}}{2p-2j+2} \begin{pmatrix} 2p-2j+2 \\ 2p-2k+1 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

ここで、$(2p-2k)!\kappa_{p-k} \equiv K_{p-k}$ と定義して、式 (2.1) に代入すれば下記の漸化式が成立ちます.

$$K_{p-k} = -\sum_{j=0}^{k-1} \frac{K_{p-j}}{(2k-2j+1)!} \tag{2.3}$$

[1]tawarp@mug.biglobe.ne.jp

この関係式から、K_{p-k} は $K_p=(2p)!$ の定数倍である事が分かりますから、$\{\gamma_k\}$ を或る定数列として $K_{p-k}=(2p)!\gamma_k$ と表せます. これを式 (2.3) に代入すれば

$$\gamma_k=-\sum_{j=0}^{k-1}\frac{\gamma_j}{(2k-2j+1)!} \tag{2.4}$$

そして、K_{p-k} の定義式に代入すれば

$$\kappa_{p-k}=\frac{(2p)!\gamma_k}{(2p-2k)!} \tag{2.5}$$

次に、$(2p-2k+1)!\lambda_{p-k}\equiv L_{p-k}$ と定義して、式 (2.2) に代入すれば

$$L_{p-k}=-\sum_{j=0}^{k-1}\frac{L_{p-j}}{(2k-2j+1)!}$$

となりますから、$\{\delta_k\}$ を或る定数列として、$L_{p-k}=(2p+1)!\delta_k$ と書けて、次の関係式が得られます.

$$\delta_k = -\sum_{j=0}^{k-1}\frac{\delta_j}{(2k-2j+1)!} \tag{2.6}$$

$$\lambda_{p-k} = \frac{(2p+1)!\delta_k}{(2p-2k+1)!} \tag{2.7}$$

ところが、γ_k の漸化式 (2.4) は

$$\sum_{j=0}^{k}\frac{\gamma_j}{(2k-2j+1)!}=0 \tag{2.8}$$

と変形できますから、$g_{2j}\equiv(2j)!\times\gamma_j$ により g_{2j} を導入すれば、式 (2.8) は

$$\sum_{j=0}^{k}g_{2j}\begin{pmatrix}2k+1\\2j\end{pmatrix}=0 \tag{2.9}$$

となります.
定数列 $\{g_{2j}\}$ の母関数 $G(x)$ は、付録に示す計算法で求める事が出来て、下記の様になります.

$$G(x)=\frac{x}{\sinh(x)}=\frac{2x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$$

そして、δ_k の漸化式 (5.6) は γ_k の漸化式と同一ですから、$h_{2j}\equiv(2j)!\times\delta_j$ の母関数は、上記の $G(x)$ と一致します. 導関数は一意的ですから $g_{2j}=h_{2j}$ となり、$\{\kappa_j\},\{\lambda_j\}$ は以下の様に表示されます.

$$\kappa_{p-k}=\begin{pmatrix}2p\\2k\end{pmatrix}g_{2k} \quad : \quad \lambda_{p-k}=\begin{pmatrix}2p+1\\2k\end{pmatrix}g_{2k}$$

付録　$\{g_{2j}\}$ の母関数

$\{\alpha_{2m}\}$ を実数列として、以下の関数を導入します.

$$G(x) \equiv \sum_{l=0}^{\infty}\frac{g_{2l}}{(2l)!}x^{2l} \tag{a1.1}$$

$$A(x) \equiv \sum_{m=0}^{\infty}\alpha_{2m}x^{2m} \tag{a1.2}$$

$$B(x) \equiv G(x)\times A(x)\equiv\sum_{j=0}^{\infty}\beta_{2j}x^{2j} \tag{a1.3}$$

定義式 $B(x)$ により、β_{2j} は次の様に表されます.

$$\beta_{2j} = \sum_{l=0}^{j} \frac{g_{2l}}{(2l)!}\alpha_{2j-2l} = \sum_{l=0}^{j} \begin{pmatrix} 2j+1 \\ 2l \end{pmatrix} g_{2l} \frac{(2j-2l+1)!}{(2j+1)!}\alpha_{2j-2l}$$

そこで、因子 $\frac{(2j-2l+1)!}{(2j+1)!}\alpha_{2j-2l}$ が添字 l に依存しない因子 c_j に等しくなる様に α_{2m} を調整して見ます.

$$c_j \equiv \frac{(2j-2l+1)!}{(2j+1)!}\alpha_{2j-2l} \tag{a1.4}$$

式 (a1.4) において、$l = j$ と置くと $\alpha_0 = (2j+1)! \times c_j$ となりますから

$$\alpha_{2j-2l} = \frac{\alpha_0}{(2j-2l+1)!} \tag{a1.5}$$

そして、第 5 節の式 (2.8) を考慮すれば、$j > 0$ に対して

$$\beta_{2j} = c_j \sum_{l=0}^{j} \begin{pmatrix} 2j+1 \\ 2l \end{pmatrix} g_{2l} = 0$$

但し、$j = 0$ の時は $\beta_0 = g_0 \times \alpha_0 = \alpha_0$ ですから、下記の表式が得られます.

$$A(x) = \alpha_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m} \quad : \quad B(x) = \alpha_0$$

一方、$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} = \sinh(x)$ より $xA(x) = \alpha_0 \sinh(x)$ となりますから、母関数 $G(x) = B(x)/A(x)$ は

$$G(x) = \frac{x}{\sinh(x)}$$

となります.

参考文献

[1] 秋葉敏男，自然数のべき乗の級数，数学・物理通信 5 巻 7 号 (2015)
公式 (1.1)〜(1.3) 及び、$\{\kappa_j\}, \{\lambda_j\}$ については、§ 3.3 公式のまとめ (p.8〜 p.9) 参照

集合の濃度

秋葉 敏男

Cardinality of a Set

Toshio Akiba[1]

1　はじめに

数学の研究分野は，幾何学，代数学そして解析学に大別されますが，この他に集合論を端緒とする数理論理学（数学基礎論）は，数学全般の基礎論理体系を構成していると思われます．　一方，数学の全分野において，数の概念が基本にあると考えられます．　図形の長さ・面積の大小比較，代数系（抽象空間）に導入される計量，そして解析学での極限操作・近傍の概念など，いずれも数の大小の概念に裏打ちされて認識されているのではないでしょうか. 集合の研究においても，数の集合の解析から始まっています.

そこで，数の概念を簡単におさらいした後，集合の濃度について考察してみたいと思います.

2　数の概念と集合

数の概念は，実数の構成を以って一つの完成里程に至っています. 自然数は離散的ですが，実数（有理数や平方根などの非有理数）は，これを大小の順に並べるとすきまがなく，連続的に数直線上に分布していると認識されます.

連続的分布であれば，そこに刃物を当てれば必ず手ごたえがある筈で,「有理数の切断による実数の定義」は,同様の発想から生まれたのではないかと思っています. 実数の定義には同値なものが 4 種ほどあり，それまでの微積分学研究で前提とされていた「数の連続性」を具備する様に構成されており，大小関係・四則演算も自然に拡張されたことで，解析学の基礎は固まりました.

実数論は，カントールによっても考察されましたが，カントールは集合論の創始者としてよく知られています. 集合の濃度の概念を導入し，可算濃度 ($\aleph_0$) は連続濃度 ($\aleph$) より小さいことを明らかにしました.　そして，両者の中間濃度は存在しないと予想しています.（連続体仮説）

しかし，この集合論（カントール流の素朴集合論）においては種々の背理が発見されます. カントール自身の指摘によるものやラッセルの背理などがあり，これらの背理への省察からツェルメロ及びフレンケルによって公理論的集合論（ZF 集合論）が体系化されました.[2]これによって，野放図に得体の知れない集合が混入しないようにして，矛盾の無い集合論を展開しようとした訳です. そして，連続体仮説もこの ZF 集合論により考察される事になります.

ところで，集合の濃度は $\aleph_0$ と $\aleph$ のみではありません. 濃度 a を持つ集合 A の部分集合全体からなる集合（A の積集合と呼ばれ 2^A と表されます）の濃度 2^a は a より大きいですから[3]，積集合の階層的構成を繰り返せば,真に増加する濃度の無限列 $\{a, a_1 = 2^a, a_2 = 2^{a_1}, \cdots\cdots\}$　が得られます. ちなみに，$\aleph = 2^{\aleph_0}$ であり，$a = \aleph_0$ の場合は $\{\aleph_0, \aleph_1 = 2^{\aleph_0}, \aleph_2 = 2^{\aleph_1}, \cdots\cdots\}$ なる無限列が得られ，$\aleph_i$ と $\aleph_{i+1}$ との間には中間濃度は存在しないと言う予想は，一般連続体仮説と呼ばれています..

この問題に対して，まずゲーデルが「ZF 集合論においては，一般連続体仮説の否定命題を証明出来ない」ことを示しました. (1938 年)　ついで，1963 年にコーエンが「一般連続体仮説を証明出来ない」ことを示しま

[1]tawarp@mug.biglobe.ne.jp
[2]文献 5 第 3 章
[3]文献 [1]p72

す[4]． これにより，一般連続体仮説という命題とその否定命題が共に証明不可能であり,「ZF 集合論においては決定不可能命題である」と結論されました．

では具体的な「数の集合」の場合はどうなのでしょうか？

3 数の集合の濃度

N を自然数の集合 $\{1, 2, \cdots\cdots\}$，Q を有理数の集合，R を実数の集合とし，$(R - Q) \equiv X$ を無理数の集合と呼びます．そして，集合 A の濃度を $p(A)$ で表せば，

$$\aleph_0 \equiv p(N) = p(Q) < p(R) \equiv \aleph$$

$$R = Q \cup X \qquad (Q \cap X = \emptyset)$$

まずつぎの二つの命題を証明しておきます．

[命題１] $p(X) > \aleph_0$

[証明] もし $p(X) \leqq \aleph_0$ ならば，X の元は可付番ですから $X = \{x_i | x_i < x_{i+1}\}$ と表せます． そこで，$Q = \{q_i | q_i < q_{i+1}\}$ として，$Q \cup X = \{q_i, x_i\}$ のように並べ替えて，つぎのような写像を導入します．

$$\phi(q_i) = q_{2i-1}$$

$$\phi(x_i) = q_{2i}$$

この対応づけにより，$p(Q \cup X) = p(Q)$ であることが分かりますから，$p(R) = \aleph_0$ となり不合理です．よって，$p(X) > \aleph_0$ [証明終]

[命題２] 個数 n の有理数集合 Q_n と無理数の無限集合 $\mathbf{Y}$ との和集合の濃度は，$\mathbf{Y}$ の濃度に等しい

[証明]

$$Q_n = \{q_i | q_i < q_{i+1}\}$$

$$Y = \{y_a, y_b, \ldots\ldots | y_a < y_b < \ldots\ldots\}$$

として，Y の中から任意に n 個の元をとりだしてつぎのように並べ替えます．

$$Y = \{y_1, y_2, \ldots y_n, \eta_a, \eta_b \ldots | y_i < y_{i+1}, y_i \neq \eta_\xi, \eta_a < \eta_b < \ldots\}$$

そして，写像 f を下記のように定義します．

$$f(q_i) = y_i$$

$$f(y_\xi) = \eta_\xi$$

この対応付けにより $p(Q_n \cup Y) = p(Y)$ であることが分かります． [証明終]

そこで，Q の部分集合を Q'，X の部分集合を X' として，それらの和集合を Ξ とします．

$$\Xi = Q' \cup X' \qquad (Q' \cap X' = \emptyset \quad)$$

集合 Ξ の濃度は以下のように計算されます．

（A）無理数の部分集合 X' が有限集合の場合

$X' = \{x'_1, x'_2, \cdots\cdots, x'_n | x'_i < x'_{i+1}\}$ と表せます．

（A-１） 有理数の部分集合 Q' が有限集合の時，Ξ は有限集合ですから $p(\Xi) < \aleph_0$ です．

（A-２） Q' が無限集合の時

[4] 文献 [1]p279,p284

$$Q = \{q_1, q_2, \cdots\cdots | q_i < q_{i+1}\} \qquad Q' = \{q_1', q_2', \cdots\cdots | q_i' < q_{i+1}'\}$$

と表せば，つぎの写像 ϕ により $p(Q' \cup X') = p(Q)$ であることが分かります．

$$\begin{aligned} \phi(x_i') &= q_i \\ \phi(q_i') &= q_{i+n} \end{aligned}$$

つまり，$p(\Xi) = p(Q) = \aleph_0$

（B）無理数の部分集合 X' が無限集合の場合

$X' = \{x_a', x_b', \cdots\cdots | x_a' < x_b' < \cdots\cdots\}$　　$X = \{x_a, x_b, \cdots\cdots | x_a < x_b < \cdots\cdots\}$ と表せば

写像 $\psi(x_\xi') = x_\xi$ により　$p(X') = p(X)$ であることが分かります．

（B-１） Q' が無限集合の時

写像 $\varphi(q_i') = q_i$ により $p(Q') = p(Q)$ である事が分かりますから，

$$p(\Xi) = p(Q' \cup X') = p(Q \cup X) = p(R) = \aleph$$

（B-２） Q' が n 個の元から成る有限集合 $\{q_i' | q_i' < q_{i+1}'\}$ の時，上記の命題１，２により

$$p(Q' \cup X') = p(X') = p(X) > \aleph_0$$

となります．そして，$X \subset R$ ですから $p(X) < \aleph$ は明らかです．　したがって，

$$\aleph_0 < p(\Xi) < \aleph$$

となり，$p(\Xi)$ は中間濃度です．

4　むすび

中間濃度の存在例を示すのであれば，$p(X)$ の計算だけで十分でした．前節の濃度計算では，数の大小の順序関係が１対１の対応付けの決め手になっています．一般の集合では，この種の順序関係は不明ですから，連続体仮説の検証は容易ではないことが推し測られます．

参考文献

[1] 吉永良正 『ゲーデル・不完全性定理』　講談社 (2000)

[2] 吉田洋一・赤摂也 『数学序説』　培風館 (1970)

現代の抽象数学への歩みをかみくだいて説明しています．８章で実数論と集合論，９章で数学基礎論を紹介しています．

[3] 高木貞治 『解析概論』　岩波書店 (1948)

付録（一）で「有理数の切断による実数の定義」が述べられています．　そして，第一章で四種の実数の定義の同値性が示されています．

[4] 高木貞治 『数の概念』　岩波書店 (1989)

付録にカントールの実数論が紹介されています

[5] 竹内外史 『集合とは何か』　講談社 (2001)

積集合，ZF 集合論という用語はこの書物に依っています．

微分方程式における興味ある問題 (5)
ー光の閉じ込めはできるか？ー

世戸 憲治 *　　　吉田　文夫 †

Interesting Problems in Differential Equation (5)
ーIs It Possible to Trap a Light ?ー

Kenji SETO*　　　Fumio YOSHIDA†

1　はじめに

前回は，光が屈折率の異なるところを飛ぶときにどのような経路をとるかということを，蜃気楼を例として解析してみた．今回は，屈折率の変化をうまく取り入れることで，光を一定の場所から出れないように，つまり，光を閉じ込めてしまうことはできるかという問題を考える．もちろん，鏡を使えば，このようなことは簡単にできる．最も簡単な例は，2 枚の鏡を向かい合わせに平行に置いておき，その中を光が反射して往復するようにすればよい．三枚の鏡を正三角形の各頂点に，三角形の中心に対し，垂直に向くように立てておき，その中を光が，この正三角形に沿って走るようにする方法もある．これを一般化すると，n 枚の鏡を正 n 角形の各頂点に，それぞれ，中心を向くように並べておき，その中を光が正 n 角形に沿って走るようにするという方法もある．これと同じことを鏡を使わないで，屈折率の違いだけでできるかということが，今回の問題である．屈折率がある一定の大きさを持つ媒質で正 n 角形を作っておき，その中を光が走るとき，うまく角度が合うと光は，ちょうど，鏡で囲まれた中を走るように閉じ込めができるであろう．これは，光の境界面への入射角が屈折率によって決まる臨界角より大きければ，全反射が起こるので可能となるはずである．この n の値を無限にした極限では，光は円運動をすることになる．

この問題に入る前に，変分法における Beltrami の積分を紹介しておく．いま，関数 $y = y(x)$ の汎関数 $F(y, y')$,　$(y' = dy/dx)$ があって，その積分，

$$\int F(y, y')dx \tag{1.1}$$

を最小 (最大) にするように関数 $y = y(x)$ を決めるという問題を考える．これはよく知られたように，Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F(y, y')}{\partial y'}\Big) - \frac{\partial F(y, y')}{\partial y} = 0 \tag{1.2}$$

を解くことで求められる．この方程式は一般に 2 階の微分方程式になるが，ここでの例のように，変分をとるときの被積分関数 $F(y, y')$ が x を明示的に含まないときは，Beltrami の積分が使える．これは $F(y, y')$ を x で微分すると，

$$\frac{d}{dx}F(y, y') = \frac{\partial F(y, y')}{\partial y}y' + \frac{\partial F(y, y')}{\partial y'}y'' \tag{1.3}$$

* 北海学園大学名誉教授　　E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp
† 北海学園大学名誉教授　　E-mail: fyoshida@hgu.jp

となるが，ここで，右辺 1 項目の $\partial F(y,y')/\partial y$ に (1.2) 式の Euler-Lagrange 方程式を用いると，

$$\frac{d}{dx}F(y,y') = \Big(\frac{d}{dx}\frac{\partial F(y,y')}{\partial y'}\Big)y' + \frac{\partial F(y,y')}{\partial y'}y'' = \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F(y,y')}{\partial y'}y'\Big) \tag{1.4}$$

となるので，この両辺を x で積分すると， C を積分定数として，

$$F(y,y') - y'\frac{\partial F(y,y')}{\partial y'} = C \tag{1.5}$$

となる．これが Beltrami の積分と言われるものである．もちろん，関数 $F(y,y')$ が簡単な形のときは，この Beltrami の積分を使わなくてもそれほど面倒でないこともあり，前回は，敢えてこれを使わなかった．しかし，問題によっては，これを使うと，使わないとでは，大きな違いがでることがある．

なお，これに付け加えておくと，この Beltrami の積分は Noether の定理の一種で，(1.1) 式で，x を時間，$y(x)$ を時刻 x における質点の位置座標とみなし，F を Lagrangian と考えると，(1.5) 式左辺の符号を替えたものは Hamiltonian になっている．したがって，この Beltrami の積分式はエネルギー保存則に対応する．

以下では，この積分を使って解析していく．なお，この Beltrami の積分に関しては別の導出法があるので，「付録」で取り挙げることにする．

2　光の閉じ込めはできるか？

以下では，光の屈折率を変化させることで，光をある一定の範囲内に閉じ込め，外に出ないようにすることができるかということを考える．そのため，ここでは，2 次元の極座標 (r,θ) を用い，光の屈折率 n が θ に依存せずに，r のみの関数 $n(r)$ の場合を考える．ここで，$n(r)$ は連続な単調関数とする．また，この屈折率に対し，条件

$$n(r) \geq 1, \qquad \lim_{r\to\infty} n(r) = 1 \tag{2.1}$$

を課す．光の経路は曲線 $r = r(\theta)$ で与えられるものとする．この曲線上で微小距離だけ離れた 2 点 (r,θ) と $(r+dr, \theta+d\theta)$ を結ぶ線分の長さ ds は，

$$ds = \sqrt{(rd\theta)^2 + (dr)^2} = \sqrt{r^2 + r'^2}\ d\theta, \qquad r' = dr/d\theta \tag{2.2}$$

となる．真空中の光速度を c とすると，原点から距離 r における光速度は $c/n(r)$ なので，この微小距離だけ離れた 2 点を飛ぶ時間は $n(r)ds/c$ であり，したがってこの曲線上を飛ぶトータルの時間を T とすると，

$$T = \frac{1}{c}\int F(r,r')d\theta, \qquad F(r,r') = n(r)\sqrt{r^2 + r'^2} \tag{2.3}$$

となる．前回同様，Fermat の原理により，光はこの積分値が最小になるような経路をとるので，変分法を用いて解くことになる．このとき，この被積分関数 F は，θ を明示的に含まないので，Beltrami の積分が使え，(1.5) 式の y を r として計算すると，

$$\frac{r^2 n(r)}{\sqrt{r^2 + r'^2}} = C \tag{2.4}$$

となる．これを r' について解き，変数分離して積分形にすると，θ_0 を積分定数として，

$$\int \frac{C dr}{r\sqrt{[\,r\,n(r)\,]^2 - C^2}} = \int d\theta = \theta + \theta_0 \tag{2.5}$$

となる．以下では，この屈折率 $n(r)$ に具体的な形を与えて，議論していくことにする．

2.1 その 1

ここでは，屈折率 $n(r)$ が，

$$n(r) = 1 + \frac{a}{r} \tag{2.6}$$

と与えられる場合を考える．a は長さの次元を持つ正の定数とする．この例では中心 $(r = 0)$ に行くほど屈折率が大きくなり，中心では無限大になる．これを (2.5) 式に代入すると，

$$\int \frac{C dr}{r\sqrt{(r+a)^2 - C^2}} = \theta + \theta_0 \tag{2.7}$$

となる．この左辺の積分は

$$r = \frac{1}{t} \tag{2.8}$$

と変数変換すると，$a \neq C$ として，

$$\text{左辺} = -\int \frac{C dt}{\sqrt{(a^2 - C^2)\left[\left(t + \dfrac{a}{a^2 - C^2}\right)^2 - \dfrac{C^2}{(a^2 - C^2)^2}\right]}} \tag{2.9}$$

となる．以下，$a > C$ の場合と $a < C$ の場合に分けて，さらに，t から s への変数変換

$$t + \frac{a}{a^2 - C^2} = \begin{cases} \dfrac{C}{a^2 - C^2} \cosh s, & a > C \\ \dfrac{C}{C^2 - a^2} \cos s, & C > a \end{cases} \tag{2.10}$$

をすると，この (2.9) 式の積分は実行され，

$$(2.9) = \begin{cases} -\dfrac{C}{\sqrt{a^2 - C^2}} s, & a > C \\ \dfrac{C}{\sqrt{C^2 - a^2}} s, & C > a \end{cases} \tag{2.11}$$

と求められる．ここで，変数を元の r に戻すと，(2.7) 式の積分結果として，

$$\begin{aligned} r &= \frac{a^2 - C^2}{C \cosh\left[\dfrac{\sqrt{a^2 - C^2}}{C}(\theta + \theta_0)\right] - a}, \qquad a > C \\ r &= \frac{C^2 - a^2}{C \cos\left[\dfrac{\sqrt{C^2 - a^2}}{C}(\theta + \theta_0)\right] + a}, \qquad C > a \end{aligned} \tag{2.12}$$

を得る．これらの式はいずれの場合も分母がゼロとなることがあり，r の値はそこで発散してしまう．したがって，この場合は光を閉じ込めることは，一般には，できない．

しかし，この (2.12) の第 1 式で，$C \to a$ の極限をとると，

$$r = \frac{2a}{(\theta + \theta_0)^2 - 1} \tag{2.13}$$

となる．この解も特定の θ のところで分母がゼロとなるので，r は発散してしまうが，それ以上に θ の値を大きくすると原点に巻き付くように螺旋を描きながら落ちていく解となるので，これは光の閉じ込めになっている．このときの (2.13) 式で $a = 1$, $\theta_0 = 0$ とし，(x, y) 座標系に変換したときのグラフを図 1，図 2 に示す．

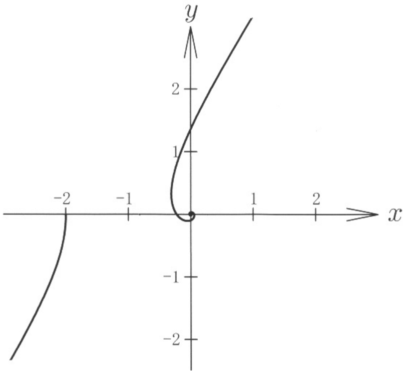

図 1

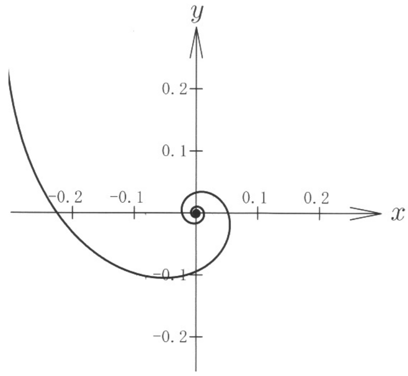

図 2

この図 1 で，x 軸上の -2 から始まり下の方に伸びている曲線は，$0 \leqq \theta < 1$ の範囲で描いたものであり，また，図の右上の方から伸びてきて原点に巻き付いているのは，$1 < \theta < 20$ の範囲で描いたものである．この図では原点付近の様子がよく分からないので，原点近傍だけを 10 倍に拡大して描いたのが図 2 である．これは，ちょうど，ブラック・ホールに光が落ちて込んでいく様子を連想させる．ただし，この $C \to a$ の場合というのは，少し特殊すぎるのでこの解の安定性という点で問題があるかもしれない．

一方，(2.12) の第 2 式は太陽の周りを動く遊星の軌道を極座標で表したものと同じ式になっているが，離心率に当たる C/a が 1 よりも大きくなっているので，その軌道は楕円ではなく双曲線になっている．さらに，この場合は $C \to a$ の極限をとると $r \to 0$ となるので，これも，光の閉じ込めとは言えないであろう．

2.2　その 2

屈折率 $n(r)$ の変化をもう少し大きくとると光の閉じ込めができるかもしれない．ここでは，

$$n(r) = 1 + \frac{a^2}{r^2} \tag{2.14}$$

という場合を考えてみる．これを (2.5) 式に代入すると，

$$\int \frac{\sqrt{2}\,C\ dr}{\sqrt{(r^2+a^2)^2 - 2C^2r^2}} = \theta + \theta_0 \tag{2.15}$$

となる．ただし，ここでは，あとの式をきれいにするため，積分定数 C を改めて $\sqrt{2}\,C$ とおいた．この積分の被積分関数の平方根の中身は r の 4 次式となるので，一般に，楕円積分となる．ここでは，不等式

$$C > \sqrt{2}\,a \tag{2.16}$$

を仮定して，この (2.15) 式の平方根の中を変形すると，

$$(r^2+a^2)^2 - 2C^2r^2 = (r^2+a^2-C^2)^2 - C^2(C^2-2a^2) = (r^2-p^2)(r^2-q^2) \tag{2.17}$$

ここに，$p,\ q$ を，

$$p^2 = C^2 - a^2 + C\sqrt{C^2-2a^2}, \qquad q^2 = C^2 - a^2 - C\sqrt{C^2-2a^2} \tag{2.18}$$

と定義する．この $p,\ q$ は，ともに長さの次元を持つ正の実数で，

$$p > q > 0 \tag{2.19}$$

であることに注意する．また，特に，これら p, q の定義式で，a を固定，C を変数と考えたとき，p は増加関数，q は減少関数となる．

ここで，この (2.15) 式の左辺の積分で r から s に

$$r = qs \tag{2.20}$$

と変数変換をすると，この式は

$$\int \frac{\sqrt{2}\,C\ ds}{p\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} = \theta + \theta_0 \tag{2.21}$$

となる．ただし，k は

$$k = \frac{q}{p} < 1 \tag{2.22}$$

で，楕円積分の母数となる．これで (2.21) 式は Jacobi の楕円関数 sn を用いて

$$s = \mathrm{sn}\Big[\frac{p}{\sqrt{2}\,C}(\theta + \theta_0),\ k\Big] \tag{2.23}$$

となるので，(2.20) 式で元の r に戻すと，解曲線は，

$$r = q\ \mathrm{sn}\Big[\frac{p}{\sqrt{2}\,C}(\theta + \theta_0),\ k\Big] \tag{2.24}$$

と求められる．これは r の値が発散することなく一定値の範囲内に留まるので，光を閉じ込めたことになるのではないか．しかし，この r の値は，θ の値によって，正になったり負になったり，ゼロになることもある．負になることは良いとしても，ゼロになることは，$r = 0$ の屈折率が無限大になるところを通過することになるので，これは，実現不可能な数学的解にすぎないのかもしれない．つぎの「その 3」で，この問題の改良バージョンを扱うことにする．

もう一つの解は，(2.20) 式に替わって，r から s に

$$r = \frac{p}{s} \tag{2.25}$$

と変数変換をすると (2.15) 式は (2.21) 式の符号を変えた

$$-\int \frac{\sqrt{2}\,C\ ds}{p\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} = \theta + \theta_0 \tag{2.26}$$

となる．k は前に与えた (2.22) 式で定義される楕円積分の母数である．これから，このときの解曲線は

$$r = -\frac{p}{\mathrm{sn}\Big[\dfrac{p}{\sqrt{2}\,C}(\theta + \theta_0),\ k\Big]} \tag{2.27}$$

と求められるが，この解は，分母がゼロとなることがあるので，r はその点で発散してしまい，光の閉じ込めにはならない．

2.3 その 3

「その 2」で紹介した方法では，屈折率が無限大となる原点を通るので，実現性という点で無理がある．ここでは，原点でも無限大にはならないように，(2.14) 式の屈折率 $n(r)$ を少し改良して，

$$n(r) = 1 + \frac{a^2}{r^2 + b^2} \tag{2.28}$$

とした場合を考えてみよう．ここに，b は，長さの次元を持つ正の量とする．この $n(r)$ を (2.5) 式に代入すると，

$$\int \frac{C(r^2+b^2)dr}{r\sqrt{r^2(r^2+a^2+b^2)^2-C^2(r^2+b^2)^2}} = \int d\theta = \theta+\theta_0 \tag{2.29}$$

となる．この積分は，r から s への変数変換

$$r^2 = b^2 s \tag{2.30}$$

と同時に，変数を減らすために，

$$\frac{a}{b} = \alpha, \qquad \frac{C}{b} = \gamma \tag{2.31}$$

とおくことにすると，

$$\int \frac{\gamma(s+1)ds}{2s\sqrt{s(s+\alpha^2+1)^2-\gamma^2(s+1)^2}} = \theta+\theta_0 \tag{2.32}$$

となる．ここに，s, α, γ はすべて無次元量である．この平方根の中は s の 3 次式なので，Cardano 公式を使うとその因数分解ができる．ただし，この公式を使用することは，無用に煩雑にするだけなので，ここでは実行しないことにする．この 3 次式の部分を $f(s)$

$$f(s) = s(s+\alpha^2+1)^2-\gamma^2(s+1)^2 \tag{2.33}$$

とおくことにし，この $f(s)$ が，正の実数 s_1, s_2, s_3 を用いて，

$$f(s) = (s-s_1)(s-s_2)(s-s_3), \qquad 0<s_1<s_2<s_3 \tag{2.34}$$

と因数分解ができるための条件を求めてみよう．このためには，まず，

$$f(0) = -\gamma^2 < 0 \tag{2.35}$$

なので，あとは，この 3 次式の極大点，極小点が s 正の側にあり，その極大値が正で，極小値が負であればよい．f の微係数 f' は，

$$f'(s) = 3s^2+2\big[2(\alpha^2+1)-\gamma^2\big]s+(\alpha^2+1)^2-2\gamma^2 \tag{2.36}$$

となるので，これをゼロとおいて，極大点，極小点の s 座標を求めると，

$$s_{(\pm)} = \frac{1}{3}\Big[\gamma^2-2(\alpha^2+1)\pm\sqrt{[\gamma^2-2(\alpha^2+1)]^2-3[(\alpha^2+1)^2-2\gamma^2]}\Big] \tag{2.37}$$

と得られる．ここで，$s_{(-)}$ が正であるためには，大括弧中の 1,2 項目が正，かつ，平方根の中の 2 項目が負から，

$$2(\alpha^2+1) < \gamma^2 < \frac{1}{2}(\alpha^2+1)^2 \tag{2.38}$$

となるが，この式が成立するためには，

$$\alpha^2 > 3 \tag{2.39}$$

でなければならない．もう一つの条件は (2.37) 式の平方根の中が正という条件で，これは γ^2 の 2 次式となるので $g(\gamma^2)$ とおくと，

$$g(\gamma^2) = \big[\gamma^2-2(\alpha^2+1)\big]^2-3\big[(\alpha^2+1)^2-2\gamma^2\big] = \big[\gamma^2-(2\alpha^2-1)\big]^2-3\alpha^2(\alpha^2-2) \tag{2.40}$$

となる．この最右辺の式の 2 項目は，(2.39) 式から必ず負になるので，因数分解され，

$$g(\gamma^2) = \Big[\gamma^2-(2\alpha^2-1)+\sqrt{3\alpha^2(\alpha^2-2)}\Big]\Big[\gamma^2-(2\alpha^2-1)-\sqrt{3\alpha^2(\alpha^2-2)}\Big] \tag{2.41}$$

となるので，これが正であるためには，

$$\gamma^2 < 2\alpha^2 - 1 - \sqrt{3\alpha^2(\alpha^2-2)}, \qquad \text{or} \qquad \gamma^2 > 2\alpha^2 - 1 + \sqrt{3\alpha^2(\alpha^2-2)} \tag{2.42}$$

であればよい．ここで，(2.38) (2.42) にでてくる 4 個の関数の大小関係は，$\alpha^2 > 3$ の領域で

$$2\alpha^2 - 1 - \sqrt{3\alpha^2(\alpha^2-2)} < 2(\alpha^2+1) < 2\alpha^2 - 1 + \sqrt{3\alpha^2(\alpha^2-2)} < \frac{1}{2}(\alpha^2+1)^2 \tag{2.43}$$

となることに注意すると，これらの不等式をまとめて，

$$\alpha^2 > 3, \qquad \text{かつ} \qquad 2\alpha^2 - 1 + \sqrt{3\alpha^2(\alpha^2-2)} < \gamma^2 < \frac{1}{2}(\alpha^2+1)^2 \tag{2.44}$$

となる．ただし，ここまでの条件は，関数 $f(s)$ が，(2.34) 式のように正の s_1，s_2，s_3 を用いて因数分解されるための必要条件でしかない．残る条件は，関数 $f(s)$ の極大値が正，極小値が負という条件

$$f(s_{(-)}) > 0, \qquad\qquad f(s_{(+)}) < 0 \tag{2.45}$$

が必要になる．実際に (2.37) 式で定義される $s_{(\pm)}$ を (2.33) 式の $f(s)$ に代入すると，γ^2 の 3 次式の他に，平方根の中に γ^2 の 2 次式が混じったものになるので，これを解析的に解くことはほとんど絶望的である．そこで，(2.44) (2.45) 式を数値的に計算し，これら不等式が満たされる領域を求めたものを以下の図 3 に示す．

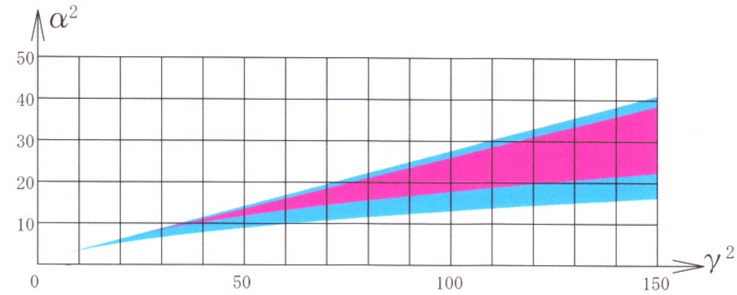

図 3

この図は，γ^2 を横軸，α^2 を縦軸にとり，それぞれ，$0 \leq \gamma^2 \leq 150$，$0 \leq \alpha^2 \leq 50$ の範囲内で，この中を縦横 0.1 刻みで走査させながら，これら不等式を評価したものである[*1]．そこで，(2.44) 式が成立するときは青色の点をプロットし，かつその中で，(2.45) 式が成立するときは，赤色の点をプロットした．したがって，この赤色で示された部分が，(2.33) 式で定義された関数 $f(s)$ が (2.34) 式のように正の s_1，s_2，s_3 を用いて因数分解される領域である．このときの関数 $f(s)$ の具体例を 2 つ図 4，図 5 に示す．

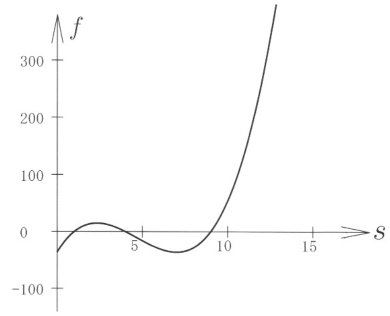

図 4　$\gamma^2 = 36$，$\alpha^2 = 10$ のときの関数 $f(s)$

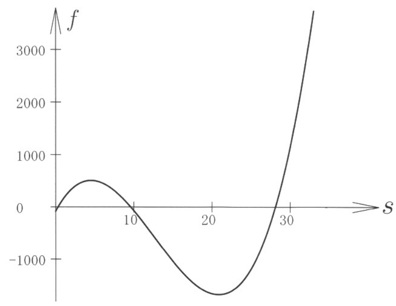

図 5　$\gamma^2 = 80$，$\alpha^2 = 20$ のときの関数 $f(s)$

[*1] 本来ならば，α^2 を横軸，γ^2 を縦軸にとるべきかもしれない．しかし，これでは縦長のグラフになってしまい無駄なスペースをとってしまうので，ここではこれら変数を縦横逆にとることにした．

これらの図から，3 次関数 $f(s)$ が，3 個の正のゼロ点を持つ領域が，パラメータ γ^2, α^2 に依存した形で，存在することが確かめられる．これを用い，ここから先は，関数 $f(s)$ が (2.34) 式のように因数分解されたものとして，これを (2.32) 式に代入すると

$$\int \frac{\gamma(s+1)ds}{2s\sqrt{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)}} = \theta + \theta_0 \tag{2.46}$$

となる．ここで，変数 s は

$$0 < s_1 \leq s \leq s_2 \tag{2.47}$$

の範囲内を動くものとして，s から t へのさらなる変数変換

$$\sqrt{\frac{s-s_1}{s_2-s_1}} = t \tag{2.48}$$

を施すと，(2.46) 式は

$$\frac{\gamma}{\sqrt{s_3-s_1}}\left[\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} + \frac{1}{s_1}\int \frac{dt}{(1+c\,t^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\right] = \theta + \theta_0 \tag{2.49}$$

となる．ここに，k は楕円積分の母数であり，c はパラメータで

$$k^2 = \frac{s_2-s_1}{s_3-s_1} < 1, \qquad c = \frac{s_2-s_1}{s_1} > 0 \tag{2.50}$$

と定義する．ここに表れる 2 個の積分は，それぞれ，Jacobi の第 1 種楕円積分，第 3 種楕円積分で，その記号を使って，

$$\frac{\gamma}{\sqrt{s_3-s_1}}\left[\mathrm{arc\,sn}(t,\,k) + \frac{1}{s_1}\mathit{\Pi}\Big(\arcsin(t);\,c,\,k\Big)\right] = \theta + \theta_0 \tag{2.51}$$

と表される．これで簡潔な書き方にはなるが，この式は第 3 種の楕円積分が入ってくるので，その振る舞いがよく見えてこない．これから解析的に t を θ の関数として求めることも不可能であり，残念ながら，数値的に計算していくことも大変面倒になってしまう．ただ，言えることは，(2.30) (2.47) 式から r の動き得る範囲は

$$0 < b\sqrt{s_1} \leq r \leq b\sqrt{s_2} \tag{2.52}$$

となるので，光は原点を通らずに一定の範囲内に収まることになる．これで，光の閉じ込めになっているはずであるが，数学的にきれいな形で示せないのは残念である．

参考までに，$s_2 = s_3$ となる重解の場合は，結果が初等関数で表されるので，それを紹介しておく．この場合は (2.50) 式から，母数の k が $k = 1$ となるので，(2.49) 式の積分は，被積分関数の平方根がなくなり，

$$\frac{\gamma}{\sqrt{s_3-s_1}}\left[\int \frac{dt}{1-t^2} + \frac{1}{s_1}\int \frac{dt}{(1+c\,t^2)(1-t^2)}\right] = \theta + \theta_0 \tag{2.53}$$

となる．これは初等関数の範囲内で積分され

$$\frac{\gamma}{s_2\sqrt{s_2-s_1}}\left[(1+s_2)\mathrm{arc\,tanh}(t) + \sqrt{c}\,\arctan(\sqrt{c}\,t)\right] = \theta + \theta_0 \tag{2.54}$$

という結果を得る[*2]．この式は，(2.51) 式の $k \to 1$ とした極限である．これも t を θ の関数として明示的に表すことはできない．しかし，

$$\lim_{t\to 1}\mathrm{arc\,tanh}(t) \to \infty, \qquad \lim_{t\to 1}\arctan(\sqrt{c}\,t) = \text{finite} \tag{2.55}$$

[*2] $\mathrm{arc\,tanh}(t) = \frac{1}{2}\log[(1+t)/(1-t)]$ に注意

となることに注意し，この事実を逆に言い表わすと，θ が大きくなるにつれ t の値は 1 に近ずくことを意味する．したがって，(2.48) 式から s が s_2 に近ずき，さらに，(2.30) 式から，光は，究極的に，半径 $r = b\sqrt{s_2}$ の円周上を回転することになる．このような一例を，つぎの図 6，図 7 に示す．

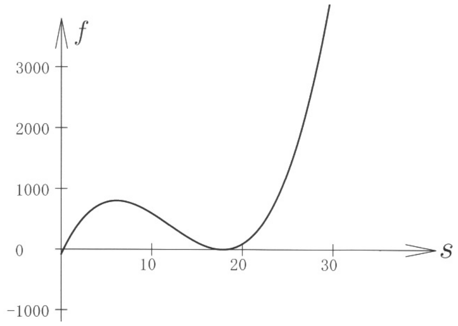

図 6　$s_2 = s_3$ となるときの関数 $f(s)$

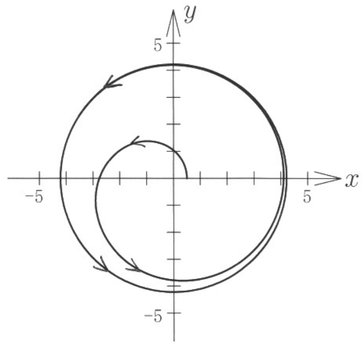

図 7 光が飛ぶ軌跡

このうち図 6 は $s_2 = s_3$ となるときの関数 $f(s)$ の様子，および，図 7 は，実際に光が飛ぶ軌跡を示す．このときの γ^2，α^2，s_1，s_2 の値は

$$\gamma^2 = 80, \quad \alpha^2 = 21.056, \quad s_1 = 0.25, \quad s_2 = 17.8 \tag{2.56}$$

である．図 7 は，t の値を 0 から 0.99999 まで，0.000001 きざみで動かし，(2.54) 式を用いて，t に対する θ を求めておき，さらに (2.48) (2.30) 式から t に対する s，r を求め，$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ によって，(x, y) 座標系に変換して描いたものである．ただし，ここでは，b を長さの単位として 1 とした．初め，光は原点から $r = \sqrt{s_1} = 0.5$ だけ離れたところから出発し，最終的に，半径 $r = \sqrt{s_2} = 4.219$ の円周上を回転することになる．これでようやく，光の閉じ込めが，数学的にもきれいな形で作ることができた．

3　おわりに

今回は，屈折率を連続的に変化させることで光の閉じ込めはできるかということを考えてみた．結果としては，できるにはできるが数学的には結構煩雑な式になってしまうことが分かった．「はじめに」のところで書いたように，このようなことは鏡を使うと簡単にできることである．また，鏡を使わない場合は，光を臨界角以上の大きさで屈折率の大きい方から小さい方に入射させると全反射が起こるので，これは鏡を使うのと同じ効果がだせる．さらに，屈折率が不連続に変化する層を多層にし，層の厚さを無限小，層の数を無限大にする極限を考えると，これは結果的に，屈折率が連続的に変化する場合でも光の閉じ込めができるはずと考えられる．

前節の「その 3」で扱った (2.54) 式の解は，この屈折率の連続変化で起こる全反射を利用して，光を円運動させたものと考えられる．また，(2.51) 式の解は，b を長さの単位としたとき，半径 r が $\sqrt{s_1}$ から $\sqrt{s_2}$ の範囲で変化しながら回転する運動，すなわち，一般相対論における水星の近日点移動のような運動，あるいは，それをもっと大げさにした運動になるはずである．しかし，それを数学的にきれいな形で表すことができなかったのは，少し残念である．

4　付録：Beltrami 積分について

「はじめに」のところで，Beltrami 積分を紹介したが，これは，つぎのようにして得ることもできる．すなわち，変分をとる式を

$$\int F(y, y')dx \tag{4.1}$$

としたとき，この解曲線 $y = y(x)$ で，一旦，x と y の立場を逆にして，$x = x(y)$ と考える．すなわち，y を独立変数，x を従属変数とする．このとき，この積分式は

$$\int F\bigl(y, 1/(dx/dy)\bigr)\frac{dx}{dy}dy \tag{4.2}$$

となるので，これに対し Euler-Lagrange 方程式を作ると，この被積分関数は x を明示的に含まないので，

$$\frac{d}{dy}\Bigl[\frac{\partial}{\partial(dx/dy)}F\bigl(y, 1/(dx/dy)\bigr)\frac{dx}{dy}\Bigr] = 0 \tag{4.3}$$

となる．これを積分し，積分定数を C として，

$$\frac{\partial}{\partial(dx/dy)}\Bigl[F\bigl(y, 1/(dx/dy)\bigr)\frac{dx}{dy}\Bigr] = C \tag{4.4}$$

となるが，ここで，$dy/dx = y'$ とすると，この式は

$$\frac{\partial}{\partial y'^{-1}}\Bigl[\frac{F(y, y')}{y'}\Bigr] = C \tag{4.5}$$

となり，さらに，

$$\frac{\partial}{\partial y'^{-1}} = \Bigl(\frac{dy'}{dy'^{-1}}\Bigr)\frac{\partial}{\partial y'} = -y'^2\frac{\partial}{\partial y'} \tag{4.6}$$

となるので，(4.5) 式は，

$$F(y, y') - y'\frac{\partial F(y, y')}{\partial y'} = C \tag{4.7}$$

となって，(1.5) 式で紹介した Beltrami 積分になっている．この方法は一見かえって煩雑にしたように見えるが，実際例に適用してみると簡単であることが分かる．例えば，(2.3) 式に相当する式は，r を積分変数にとると，

$$T = \frac{1}{c}\int G(r, \theta')dr, \qquad G(r, \theta') = n(r)\sqrt{(r\theta')^2 + 1}, \qquad \theta' = \frac{d\theta}{dr} \tag{4.8}$$

となり，これに対する Euler-Lagrange 方程式を作ると，この G が θ を明示的に含まないので，

$$\frac{d}{dr}\Bigl(\frac{\partial}{\partial\theta'}G(r, \theta')\Bigr) = 0, \qquad \text{これから} \qquad \frac{\partial}{\partial\theta'}G(r, \theta') = C \tag{4.9}$$

となり，この第 2 式に (4.8) 式の $G(r, \theta')$ を代入すると直ちに，前に得た (2.4) 式が導出できる．

[謝辞]

今回も，京都大学名誉教授の中西襄先生にこの原稿を見ていただき，たくさんのコメントをいただきました．ここに，謹んで感謝いたします．

編集後記

皆様にはご健勝にお過ごしのことと存じます．

「数学・物理通信」9 巻 5 号を発行します．6 月の発行は 4 号でおしまいにするつもりだったが，秋葉さんからの投稿を半年以上も忘れていたので，一挙に掲載するために 5 号を発行することにした．

これは私が編集者としてのぬかりがあったということで，内容の吟味はしなかった。しかし、秋葉さんによれば、累乗和の論文は 9 巻 3 号の吉泉さんと同じような発想であるが，吉泉さんよりも具体的に議論を展開しているとなれば、載せないわけにはいかない．

編集者としての今回のような不始末もあるが，すべての投稿を受けつけているわけではない．それは編集者の裁量に任せていただくしかない．

皆様には今後ともに，ご愛読をお願いします．

（矢野　忠）