

数学・物理通信

9 卷 7 号 2019 年 9 月

編集 新関章三・矢野 忠

2019 年 9 月 29 日

目次 (Contents)

1. 微分方程式における興味ある問題 (7)

—バクテリア・コロニー・パターン—

世戸 憲治 2

2. 自然対数の底, 再論 (改訂版)

矢野 忠 12

3. いろいろな定積分の求め方

矢野 忠 18

5. 編集後記

新関章三 24

1. Interesting Problems in Differential Equation (7)

—Bacteria Colony Pattern—

Kenji SETO 2

2. The Base of Natural Logarithm Revisited (Revised Version)

Tadashi YANO 12

3. Various Derivations for Definite Integrals

Tadashi YANO 18

4. Editorial Comments

Shozo NIIZEKI 24

微分方程式における興味ある問題 (7)

ーバクテリア・コロニー・パターンー

世戸 憲治 *

Interesting Problems in Differential Equation (7)

ーBacteria Colony Patternー

Kenji SETO*

1 はじめに

以前に書いた「自然界で目にする現象 (1),(2)」(「数学・物理通信」5 巻 12 号 2016 年 1 月) では、砂地に起こる風紋、あるいは、砂丘の数学モデルを扱った。今回は、この続きとして、バクテリアをシャーレで培養したときに見られるコロニー・パターンの数学モデルについて述べる。参考にした文献は、「微積分の広がり」(「数理科学：別冊」サイエンス社) の中の「応用解析の感覚 生物系に現れるパターンの理解を通して」三村昌泰著、および、インターネットで見れる論文「バクテリアのコロニー形成 ー実験とモデル化ー」松下貢著である。この中で、バクテリアがコロニーを形成するとき、シャーレの中の培地である寒天の硬さと餌となる栄養の濃度によって、その形状が変化し、5 種類のパターンに分類されることが分かっている。もちろん、筆者はこの種の生物学にはまったくの素人であるが、この 5 種類のパターンが数学的なモデルで再現されるということに、大変な興味を持ってしまった。今回は、この生物学における数学モデルを自分でも確かめてみようと思い立ち、いろいろと試したことを記すことにする。特に興味を持ったのは、コロニー・パターンが樹枝状になる場合と、同心円状になる場合であり、以下、この 2 つの場合について詳しく述べていく。ただし、この樹枝状になる場合は、筆者の解析では上手くいかなかった失敗例である。しかし、これが、どのように失敗したかということも、後学のため役に立つことと思われるので、敢えて書き留めておくことにした。

2 樹枝状パターン ー川崎モデルー

2.1 方程式の導入

シャーレの中に、培地としての寒天を薄く引き、ペプトンという餌になるものを与えて、ある種のバクテリアを接種する。ここでペプトンとは、人間で言えば、蛋白質が胃液中の消化酵素であるペプシンによって分解された中間生成物である。さらに言えば、ペプトンは腸の中の消化酵素エレブシンによって、アミノ酸に分解され、吸収される。この実験で、バクテリアとしては、枯草菌、プロテウス菌、霊菌、大腸菌などが使われるが、どの菌を用いても、一定時間、菌を培養させると、同じようなコロニー・パターンが現れることが知られている。ただし、このパターンは餌のペプトンの多寡と、寒天の濃度によって異なり、餌が豊富で、寒天が柔らかくバクテリアが動きやすいときは、ほぼ円形のコロニー・パターンとなるが、餌が少なく、寒天が硬くてバクテリアが動きにくいとき

* 北海学園大学名誉教授

E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

は、コロニー・パターンは樹枝状（糸状）になる．その他に、餌の多寡，寒天の濃度によって、全部で5種類のパターンに分類される．これらの図については、著作権の問題もあるので、ここでは引用しないこととし、「はじめに」のところで挙げた文献を参照されたい．

ここで、菌の培養によって作られるコロニー・パターンは、寒天がその面積に対し、厚さは薄いので2次元的に広がったパターンとなる．ここでは、その空間的な2次元座標を (x, y) とし、また、時間を t として、バクテリア密度を、 $B(x, y, t)$ と記すことにする．また、同様に餌となるペプトンの密度を $N(x, y, t)$ と記す．バクテリアがどのように動くかは、個々のもので違ってくると思えられるが、ここでは、その平均化したものとして、密度の大きいほうから小さい方に動くと思えられるので、拡散現象として捉えることにする．このことを考慮して、ここでは、バクテリアの時間的密度変化に対し、方程式

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \cdot (D_b \nabla B) + C_b N B \quad (2.1)$$

を設定する．ここに、右辺第1項に現れる ∇ (ナブラ) は、ベクトル微分演算子で、 x, y 方向の単位ベクトルを、それぞれ、 i, j として、

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y}, \quad (2.2)$$

と定義される．(2.1) 式のナブラを用いて表わされる項は、熱伝導方程式などでお馴染みの拡散項で、 D_b は拡散係数である．この D_b の値が大きいほどバクテリアが動きやすいことを表す．また、第2項は、バクテリアが餌を食べることで増殖する効果を表す．これがバクテリア密度 B に比例することは、Malthus の人口論でもお馴染みのものであり、その係数がその場にある餌の密度 N に比例するとした． C_b はそのときの比例係数である．

一方、餌となるペプトンの密度に対しても、方程式

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D_n \nabla^2 N - C_n B N, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.3)$$

を設定する．餌も密度が高い方から低い方に拡散するとしたのが右辺第1項で、また、第2項はバクテリアに食べられるぶんだけ餌が減少することを表す．この式に現れる係数 D_n, C_n は定数として扱う．しかし、(2.1) 式に現れる係数 D_b を定数としてしまうと、バクテリアの糸状に発達するコロニー・パターンが出せなくなる．ここでは、川崎らのモデルにしたがって、

$$D_b = D_0 N B \quad (2.4)$$

と非線形にしてしまう．つまり、拡散係数は、バクテリア密度 B 、および、餌の密度 N に比例して大きくなるものとする．これにしたがって (2.1) 式をもう一度、書き直すと、

$$\frac{\partial B}{\partial t} = D_0 \nabla \cdot (N B \nabla B) + C_b N B \quad (2.5)$$

となる．ここで、 D_0, C_b は定数として扱う．

これら2本の連立非線形偏微分方程式 (2.3) (2.5) を、適当な初期条件の基に解くことで、バクテリアのコロニー・パターンが再現されると参考文献には書かれている．ただし、これら方程式を解析的に解くことは、現状では不可能と思われるので、以下、数値的に解いた例を述べることにする．

2.2 数値計算例 1

方程式 (2.3) (2.5) を数値的に解くためには、微分を差分に置き換える必要がある．そこで、時間については、 Δt を微小時間として、前進差分の形、

$$\frac{\partial N(x, y, t)}{\partial t} \rightarrow \frac{N(x, y, t + \Delta t) - N(x, y, t)}{\Delta t}, \quad \frac{\partial B(x, y, t)}{\partial t} \rightarrow \frac{B(x, y, t + \Delta t) - B(x, y, t)}{\Delta t} \quad (2.6)$$

で置き換える．また，空間については， Δx , $(=)\Delta y$ を微小長さとし，(2.3) 式の $N(x, y, t)$ については，中心差分の形，

$$\nabla^2 N(x, y, t) \rightarrow \frac{R(x, y, t, \Delta x, \Delta y)}{\Delta x^2} \quad (2.7)$$

とする．ここに， $R(x, y, t, \Delta x, \Delta y)$ は，数式簡略化のため導入したもので，

$$R(x, y, t, \Delta x, \Delta y) = N(x + \Delta x, y, t) + N(x - \Delta x, y, t) + N(x, y + \Delta y, t) + N(x, y - \Delta y, t) - 4N(x, y, t) \quad (2.8)$$

と定義しておく．また，(2.5) 式に現れる $\nabla \cdot (NB\nabla B)$ については，(2.2) 式から

$$\nabla \cdot (NB\nabla B) = \frac{\partial}{\partial x} \left(NB \frac{\partial B}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(NB \frac{\partial B}{\partial y} \right) \quad (2.9)$$

となるので，2 個ずつある x , y の両微分とも中心差分を用いて，

$$\nabla \cdot (NB\nabla B) \rightarrow \frac{S_1(x, y, t, \Delta x, \Delta y)}{(2\Delta x)^2} \quad (2.10)$$

ここに， $S_1(x, y, t, \Delta x, \Delta y)$ は

$$\begin{aligned} S_1(x, y, t, \Delta x, \Delta y) = & N(x + \Delta x, y, t)B(x + \Delta x, y, t) \left[B(x + 2\Delta x, y, t) - B(x, y, t) \right] \\ & - N(x - \Delta x, y, t)B(x - \Delta x, y, t) \left[B(x, y, t) - B(x - 2\Delta x, y, t) \right] \\ & + N(x, y + \Delta y, t)B(x, y + \Delta y, t) \left[B(x, y + 2\Delta y, t) - B(x, y, t) \right] \\ & - N(x, y - \Delta y, t)B(x, y - \Delta y, t) \left[B(x, y, t) - B(x, y - 2\Delta y, t) \right] \end{aligned} \quad (2.11)$$

と定義する．

この差分化で方程式 (2.3) (2.5) は

$$N(x, y, t + \Delta t) = N(x, y, t) + D_n \frac{\Delta t}{\Delta x^2} R(x, y, t, \Delta x, \Delta y) - C_n \Delta t B(x, y, t) N(x, y, t) \quad (2.12)$$

および，

$$B(x, y, t + \Delta t) = B(x, y, t) + D_0 \frac{\Delta t}{(2\Delta x)^2} S_1(x, y, t, \Delta x, \Delta y) + C_b \Delta t N(x, y, t) B(x, y, t) \quad (2.13)$$

となる．ここで， Δx をバクテリア 1 個分のサイズと考えて，以下，これを長さの単位とし，これまで使ってきた座標 (x, y) を，改めて，

$$x/\Delta x \rightarrow x, \quad y/\Delta y \rightarrow y \quad (2.14)$$

と置き直すことにする．

また， Δt をバクテリアが 1 回増殖する時間と考えて，これを時間の単位とし，時間 t を改めて，

$$t/\Delta t \rightarrow t \quad (2.15)$$

とおく．さらに，数式簡略化のため，

$$D_n \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = \alpha \quad (2.16)$$

とおく．この α の値は実際に数値計算をするときに決めるが，解が十分大きな t に対し収束するためには，この α の値は 1 より十分小さいものでなければならない．この置き換えで方程式 (2.12) (2.13) は

$$N(x, y, t + 1) = N(x, y, t) + \alpha R(x, y, t, 1, 1) - C_n \Delta t B(x, y, t) N(x, y, t) \quad (2.17)$$

および,

$$B(x, y, t+1) = B(x, y, t) + \frac{D_0 \alpha}{4D_n} S_1(x, y, t, 1, 1) + C_b \Delta t N(x, y, t) B(x, y, t) \quad (2.18)$$

となる. さらにパラメータを減らすため, $N(x, y, t)$, $B(x, y, t)$ を, 改めて,

$$C_n \Delta t B(x, y, t) \rightarrow B(x, y, t), \quad C_b \Delta t N(x, y, t) \rightarrow N(x, y, t) \quad (2.19)$$

と置き直す. この置き換えで, (2.17) に表れる R は N の 1 次式, また, (2.18) 式に表れる S_1 は B の 2 次, N の 1 次ということを考慮して, これらの式を書き直すと,

$$N(x, y, t+1) = N(x, y, t) + \alpha R(x, y, t, 1, 1) - B(x, y, t) N(x, y, t) \quad (2.20)$$

および,

$$B(x, y, t+1) = B(x, y, t) + \mu \alpha S_1(x, y, t, 1, 1) + N(x, y, t) B(x, y, t) \quad (2.21)$$

となる. ここで, μ は,

$$\mu = \frac{D_0}{4D_n C_n C_b \Delta t^2} \quad (2.22)$$

と定義する. これですべての変数が無次元化されたことになる.

あとは, 初期条件を, 餌のペプトンについては全空間に一様に分布, また, バクテリアについては原点を中心とする半径 ℓ の範囲内に接種するものとして,

$$N(x, y, 0) = N_0, \quad B(x, y, 0) = \begin{cases} B_0, & \sqrt{x^2 + y^2} < \ell \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (2.23)$$

と設定し, 方程式 (2.20) (2.21) を数値的に解いて, t の値が 1 ずつ増えたときの N , B の値を求めていく. このとき, パラメータとして残るものは, $\alpha, \mu, N_0, B_0, \ell$ の 5 個である. これらパラメータを

$$\alpha = 0.1, \quad \mu = 0.1, \quad N_0 = 0.6, \quad B_0 = 1, \quad \ell = 5 \quad (2.24)$$

として $t = 800$ まで数値計算したときのバクテリアの密度 $B(x, y, 800)$ を図 1 に示す.

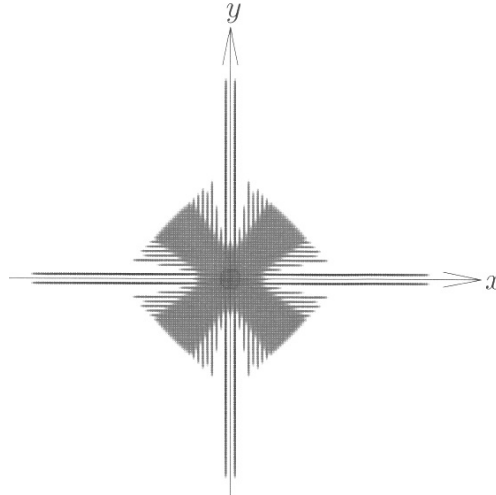


図 1 川崎モデル 1, $B(x, y, 800)$

この図を見てわかるとおり, 樹枝状パターンとは似ても似つかないもので, x, y 方向に細い線が針のように何本もできている. しかも, ここで不思議なことに, 解こうとしていた元の方程式 (2.3) (2.5) は原点周りの回転に

対し不変であり、初期値として与えた条件 (2.23) 式も回転に対し不変なので、解も原点周りの回転に対し不変にならなければならないはずである。そうっていないのは、微分方程式を差分化して差分方程式にしたことが原因であろう。したがって、もし、樹枝状パターンが再現されるのであれば、それは微分方程式が主役を演じるものではなく、主役を演じるのは差分方程式の方だろうと考えられる。なお、参考までに、初期値を与える領域を円ではなく、楕円にしたり、長方形にしたりも試してみたが、時間を追っていくと、円にした場合とほぼ同じパターンになってしまうことを付け加えておく。

2.3 数値計算例 2

という訳で、差分化の仕方を変えるとまた違ったパターンになるのではと考えられる。これまでは、(2.9) 式において、2 個ずつある x, y の微分を中心差分としていた。もう一つの方法として、初めに作用する x 微分を前進差分、後で作用する x 微分を後退差分とし、これとは逆に、初めに作用する x 微分を後退差分とし、後で作用する x 微分を前進差分としたものを、足して 2 で割るという方法に変えてみる。 y 微分についても同様である。このときは、(2.10) 式に替わって、

$$\nabla \cdot (NB\nabla B) \rightarrow \frac{S_2(x, y, t, \Delta x, \Delta y)}{2(\Delta x)^2} \quad (2.25)$$

と置く。ここに、 S_2 を

$$\begin{aligned} S_2(x, y, t, \Delta x, \Delta y) = & \\ & + N(x, y, t)B(x, y, t)[B(x + \Delta x, y, t) - B(x, y, t)] - N(x - \Delta x, y, t)B(x - \Delta x, y, t)[B(x, y, t) - B(x - \Delta x, y, t)] \\ & + N(x + \Delta x, y, t)B(x + \Delta x, y, t)[B(x + \Delta x, y, t) - B(x, y, t)] - N(x, y, t)B(x, y, t)[B(x, y, t) - B(x - \Delta x, y, t)] \\ & + N(x, y, t)B(x, y, t)[B(x, y + \Delta y, t) - B(x, y, t)] - N(x, y - \Delta y, t)B(x, y - \Delta y, t)[B(x, y, t) - B(x, y - \Delta y, t)] \\ & + N(x, y + \Delta y, t)B(x, y + \Delta y, t)[B(x, y + \Delta y, t) - B(x, y, t)] - N(x, y, t)B(x, y, t)[B(x, y, t) - B(x, y - \Delta y, t)] \end{aligned} \quad (2.26)$$

と定義する。この差分化で、方程式 (2.3) は、差分方程式 (2.12) になるのは前と同じであるが、方程式 (2.5) の方は

$$B(x, y, t + \Delta t) = B(x, y, t) + D_0 \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2} S_2(x, y, t, \Delta x, \Delta y) + C_b \Delta t N(x, y, t) B(x, y, t) \quad (2.27)$$

となる。以下、 α の定義 (2.16) 式、時間 t の無次元化 (2.15) 式をそのまま定義し、(2.17) 式は前のままであるが、(2.18) 式の方は、

$$B(x, y, t + 1) = B(x, y, t) + \frac{D_0 \alpha}{2D_n} S_2(x, y, t, 1, 1) + C_b \Delta t N(x, y, t) B(x, y, t) \quad (2.28)$$

となり、最後の N, B の無次元化 (2.19) 式で、最終的に (2.20) (2.21) 式と同じ形、

$$\begin{aligned} N(x, y, t + 1) &= N(x, y, t) + \alpha R(x, y, t, 1, 1) - B(x, y, t) N(x, y, t), \\ B(x, y, t + 1) &= B(x, y, t) + \mu \alpha S_2(x, y, t, 1, 1) + N(x, y, t) B(x, y, t) \end{aligned} \quad (2.29)$$

となる。ただし、 μ だけは、前のものの 2 倍になっていて

$$\mu = \frac{D_0}{2D_n C_n C_b \Delta t^2} \quad (2.30)$$

と定義する。

この式を用いて、 $t = 2000$ まで数値計算したものを図 2 に示す。ただし、パラメータの値は、前のものと同じく、

$$\alpha = 0.1, \quad \mu = 0.1, \quad N_0 = 0.6, \quad B_0 = 1, \quad \ell = 5 \quad (2.31)$$

とした。

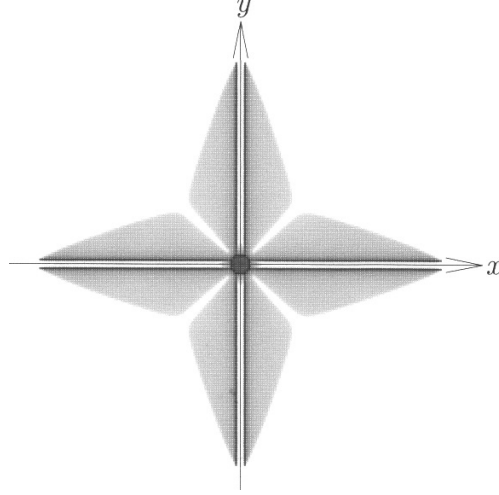


図 2 川崎モデル 2, $B(x, y, 2000)$

この図を見ても樹枝状パターンとはほど遠いものであり、むしろ花びらと言った方がよい。これは差分化の仕方次第で出来上がる図形がまったく異なってしまうことを示す良い例である。したがって、先に述べたように微分方程式が主要な役割をはたしているのではなく、主役は差分方程式が担っていると言えよう。

3 同心円状パターン —三村モデル—

3.1 方程式の導入

三村モデルは、細胞に活性化したものと仮眠状態の不活性のものの 2 種類があることに着目したものである。以下、活性細胞の密度を $B_a(x, y, t)$ 、不活性細胞の密度を $B_i(x, y, t)$ とする。活性細胞は餌を食べ動き回るが、一定の割合で不活性になり餌を食べなくなり動かなくなる。このときの方程式は、餌の密度を前と同じく $N(x, y, t)$ として、

$$\frac{\partial B_a}{\partial t} = D_0 \nabla^2 B_a - EB_a + C_b N B_a, \quad \frac{\partial B_i}{\partial t} = EB_a \quad (3.1)$$

および、 N の時間変化については、(2.3) 式と同じ、

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D_n \nabla^2 N - C_n B_a N \quad (3.2)$$

となる。ここで、 D_0 , E , C_b , D_n , C_n はすべて定数とする。(3.1) の第 1 式、右辺の 1 項目は拡散項、2 項目は不活性細胞に変化するために密度が減少する分を、また、3 項目は餌を食べて増殖する分を表す。第 2 式は、不活性細胞の時間変化を表す。

3.2 数値計算例 1

前節と同じく、この式を、時間については前進差分、空間については中心差分をとって、差分方程式に変換すると、

$$B_a(x, y, t + \Delta t) = B_a(x, y, t) + D_0 \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} S(x, y, t, \Delta x, \Delta y) - E \Delta t B_a(x, y, t) + C_b \Delta t N(x, y, t) B_a(x, y, t),$$

$$B_i(x, y, t + \Delta t) = B_i(x, y, t) + E \Delta t B_a(x, y, t) \quad (3.3)$$

および、

$$N(x, y, t + \Delta t) = N(x, y, t) + D_n \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} R(x, y, t, \Delta x, \Delta y) - C_n \Delta t B_a(x, y, t) N(x, y, t) \quad (3.4)$$

となる。ここに、 S, R は、(2.8) 式と同様に、

$$S(x, y, t, \Delta x, \Delta y) = B_a(x + \Delta x, y, t) + B_a(x - \Delta x, y, t) + B_a(x, y + \Delta y, t) + B_a(x, y - \Delta y, t) - 4B_a(x, y, t)$$

$$R(x, y, t, \Delta x, \Delta y) = N(x + \Delta x, y, t) + N(x - \Delta x, y, t) + N(x, y + \Delta y, t) + N(x, y - \Delta y, t) - 4N(x, y, t) \quad (3.5)$$

とする。この後、(2.14) (2.15) と同じく、時間、空間の無次元化、

$$t/\Delta t \rightarrow t, \quad x/\Delta x \rightarrow x, \quad y/\Delta y \rightarrow y \quad (3.6)$$

をし、(2.16) 式と同じく α , および, β を

$$D_n \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \alpha, \quad E \Delta t = \beta \quad (3.7)$$

と定義する。最後に、(2.19) 式と同じ B_a, B_i, N の無次元化

$$C_n \Delta t B_a \rightarrow B_a, \quad C_n \Delta t B_i \rightarrow B_i, \quad C_b \Delta t N \rightarrow N \quad (3.8)$$

と定義し直す。これで方程式 (3.3) (3.4) は

$$B_a(x, y, t + 1) = B_a(x, y, t) + \mu \alpha S(x, y, t, 1, 1) - \beta B_a(x, y, t) + N(x, y, t) B_a(x, y, t),$$

$$B_i(x, y, t + 1) = B_i(x, y, t) + \beta B_a(x, y, t) \quad (3.9)$$

および、

$$N(x, y, t + 1) = N(x, y, t) + \alpha R(x, y, t, 1, 1) - B_a(x, y, t) N(x, y, t) \quad (3.10)$$

となる。ここに、 μ を

$$\mu = \frac{D_0}{D_n} \quad (3.11)$$

と定義する。

この方程式に、初期条件 (2.23) 式を、 B_i にも拡張した形

$$N(x, y, 0) = N_0, \quad B_a(x, y, 0) = \begin{cases} B_0, & \sqrt{x^2 + y^2} < \ell \\ 0, & \text{else} \end{cases}, \quad B_i(x, y, 0) = 0 \quad (3.12)$$

を適用して解くことになる。ここではパラメータを

$$\alpha = 0.025, \quad \beta = 0.3, \quad \mu = 0.1, \quad N_0 = 8, \quad B_0 = 1, \quad \ell = 5 \quad (3.13)$$

として、 $t = 250$ まで計算したときの活性、不活性両細胞の和 $B_a(x, y, 250) + B_i(x, y, 250)$ の分布パターンを図 3 に示す。

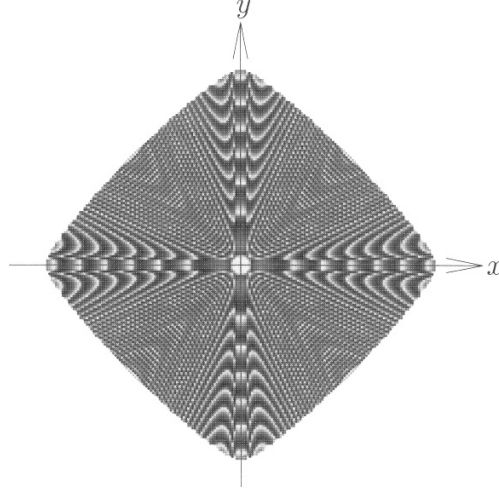


図 3 三村モデル 1, $B_a(x, y, 250) + B_i(x, y, 250)$

前節でもそうであったが，元になる微分方程式 (3.1) (3.2) が原点周りの回転に対し不変で，初期条件も回転不変の形にしたにもかかわらず，差分化した段階で回転対称性が破れてしまい， x, y 方向の依存性があらわに表れている．これでは同心円状パターンとはなりそうもない．

3.3 数値計算例 2

そこで，強制的に同心円状にさせるため， B_a, B_i, N の空間依存性は原点からの距離 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ のみの関数と仮定してしまおう．すなわち，これら変数を，改めて， $B_a(r, t), B_i(r, t), N(r, t)$ と書くことにし， ∇^2 を 2 次元の極座標表示から，

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \quad (3.14)$$

としてしまう．この設定で，(3.9) (3.10) 式は，

$$B_a(r, t+1) = B_a(r, t) + \mu\alpha S(r, t, 1, 1) - \beta B_a(r, t) + N(r, t)B_a(r, t), \quad B_i(r, t+1) = B_i(r, t) + \beta B_a(r, t) \quad (3.15)$$

および，

$$N(r, t+1) = N(r, t) + \alpha R(r, t, 1, 1) - B_a(r, t)N(r, t) \quad (3.16)$$

となる．ここに，

$$\begin{aligned} S(r, t, 1, 1) &= B_a(r+1, t) + B_a(r-1, t) - 2B_a(r, t) + \frac{1}{2r} [B_a(r+1, t) - B_a(r-1, t)] \\ R(r, t, 1, 1) &= N(r+1, t) + N(r-1, t) - 2N(r, t) + \frac{1}{2r} [N(r+1, t) - N(r-1, t)] \end{aligned} \quad (3.17)$$

である．この式に基づいてパラメータの値を (3.13) 式とし， $t = 250$ まで計算したときの活性，不活性両細胞の和 $B_a(r, 250) + B_i(r, 250)$ を図 4 に，また，活性細胞のみの $B_a(r, 250)$ を図 5 に示す．

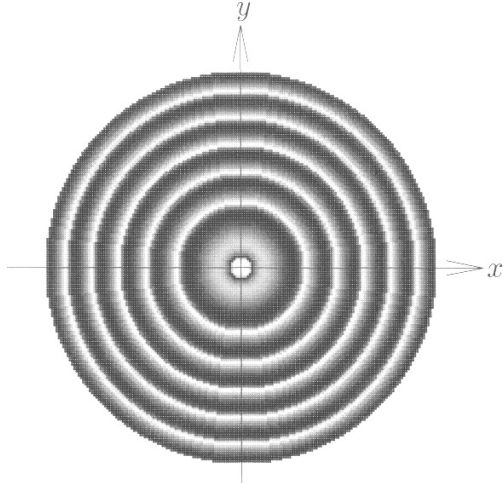


図 4 三村モデル 2, $B_a(r, 250) + B_i(r, 250)$

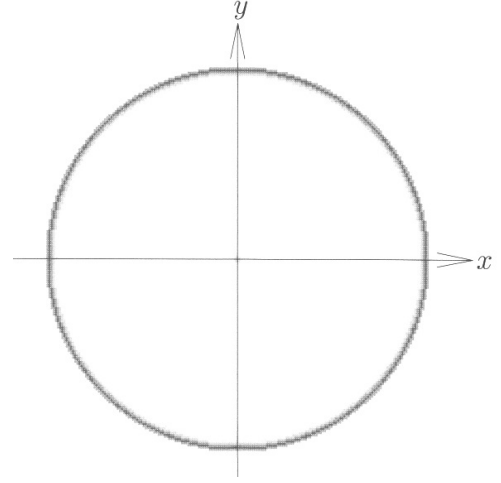


図 5 三村モデル 2, $B_a(r, 250)$

図 4 から、同心円状に細胞密度の濃淡ができてるのが見てとれる。また、この図 5 から、活性細胞 B_a の方は、ほぼ、円の周辺部にしか存在していないので、円の内部にあるのは、ほとんどが不活性細胞 B_i ということになる。これは、初めに円の周辺部で活性細胞が餌を食べて増殖したあと、いったん、不活性になり、餌を食べなくなり増殖もしなくなって密度が低い部分ができ、ある程度時間がたつとまた活性細胞が増殖しだすということをくり返すためと考えられる。このときの動径方向の濃淡の周期は N_0 、および、 μ の値に大きく依存するが、その依存の仕方はかなり複雑で、詳しいことは分かっていない。

4 おわりに

残念ながら、ここでは樹枝状パターンをうまく出すことはできなかった。前にも述べたように、回転対称な微分方程式に回転対称な初期値を与えた場合、出てくる解も回転対称になるはずで、樹枝状パターンなどというまったく対称性を破った解がでると考える方がおかしいのである。そこで、初期値を回転対称ではない形で与えてもみたが、これもうまくいかない。これは微分方程式を差分方程式に作り替えるときに対称性が破れて出てくるものと考えられる。そこで、3 節の 3.3 で角度方向を無視した極座標を用いた解析をしたが、これに角度依存性も含めた極座標表示から差分化してもやってみたが、これもうまくはいかなかった。

このまま終わるのはちょっと残念すぎるので、フラクタルを用いて描いた樹枝状パターンを載せておく。これは、ある一本の直線を描くサブルーチンを作っておき、そのサブルーチンの中で、元の長さがある一定の割合で縮小し、角度を変えた直線を、複数本、描くように、自分自身のサブルーチンを呼び出すことである。もちろんこのようなことをすると、無限に呼び出しが続き止まらなくなってしまう。それを避けるための抜け道を作っておく必要があるが、これは、直線の長さがある一定値より小さくなったときは、サブルーチンを抜けるようにしておく。この原理にしたがって、描いた樹枝状パターンを図 6、図 7 に示す。ここでは、1 つの接点で 3 分岐するようにした。

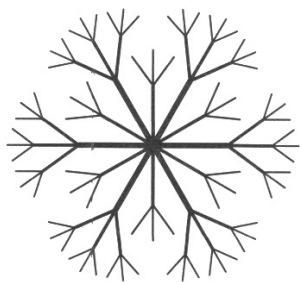


図 6 フラクタルモデル 1

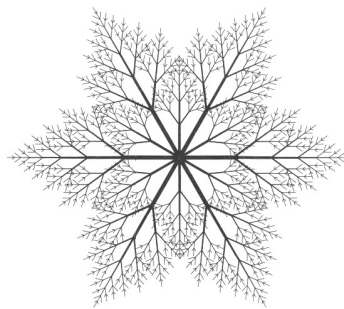


図 7 フラクタルモデル 2

これら 2 つの図形の違いは、線分の長さがどれほど小さくなったときにサブルーチンを抜け出すかということである。バクテリアが作るコロニーの樹枝状パターンはこの図 6 に近いものである。それに対し、図 7 の方は、バクテリアのコロニーパターンというよりは、雪の結晶模様に近いものである。

[謝辞]

今回も、京都大学名誉教授の中西襄先生にこの原稿を見ていただき、大変有益なコメントをいただきました。ここに、その内容を掲載させていただきます。

『バクテリアのふるまいは気まぐれで、微分方程式で取り扱うようなものではなく、確率過程とみなすべきではないでしょうか。もちろん統計的な意味では微分方程式に従う可能性はありますが、それはバクテリアの総数のような大局的な量で、パターンを描く局所的な数を、確定値を扱う微分方程式で記述するのは無理なような気がします。もともと、問題自身が discrete な話なのに、微分方程式をたてて数値計算のためにそれを離散的にするのは、どう考えてもまわりくどい推論です。最初から離散的に問題を設定すれば、座標軸設定による不自然さが避けられます。例えば、平面を合同な正三角形に分割し、その頂点にのみバクテリアが居ることができるものとする、 60° 回転対称性を保証することができます。』

いつも、丁寧なコメントを書いていただく先生に、心から感謝いたします。

自然対数の底, 再論 (改訂版)

矢野 忠^{*1}

The Base of Natural Logarithm Revisited (Revised Version)

Tadashi YANO^{*2}

1 はじめに

このエッセイはすでに愛数協^{*3}の機関誌「研究と実践」に掲載されたものである [1]. 「研究と実践」の読者は主として小学校の先生方であるから, この「数学・物理通信」に掲載すれば, より広い読者が期待できる. なお, 「数学・物理通信」に投稿するにあたり, 細かな修正を加えた.

自然対数の底 e について 2 回書いたが [2], [3], その後私にとって新しいことをいくつかのところで読んだ.

一つは自然対数の底 e の導入のしかたであり, もう一つは e の近似値の求め方である. それらについて新しい観点から述べてみよう.

2 自然対数の底の導入

2.1 積分による自然対数の底の定義

「数学教室」の最近号かどこかで読んだのだと思うが, 自然対数の底 e を

$$\int_1^a \frac{1}{x} dx = 1 \quad (2.1)$$

となる a と定義するというのを見た. 「えっ, そうかな」と思ってすぐに積分してみた.

$$\int_1^a \frac{1}{x} dx = [\log_e x]_1^a = \log_e a = 1 \quad (2.2)$$

であるから, 対数の性質から

$$\log_e a = 1 \quad (2.3)$$

は

$$a = e \quad (2.4)$$

となる. したがって, これで自然対数の底 e を定義できることがわかる.

2.2 $1/x$ の下の面積による定義

このことを知って, 以前からもっていた本『ヒト, 数学に出会う』(Les Plus Belles Formules Mathématiques (もっとも美しい数学の公式)) [4] を開いてみたら, この本に双曲線関数 $\frac{1}{x}$ と x 軸と $x = 1$ から $x = a$ までの面

^{*1} 元愛媛大学工学部

^{*2} yanotad@earth.ocn.ne.jp

^{*3} 愛数協とは愛媛県数学教育協議会の略称で, 民間教育団体の数学教育協議会の下部団体である.

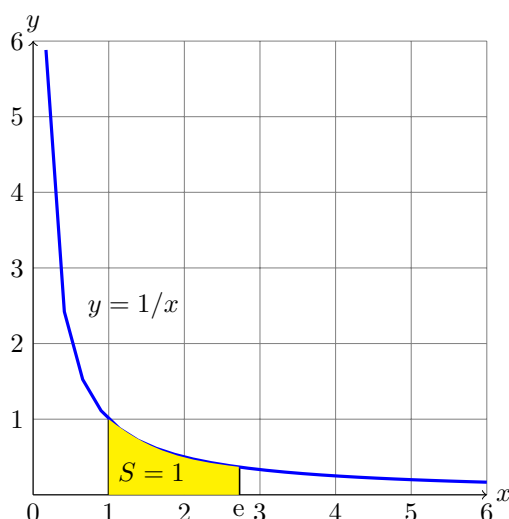


図1 双曲線 $y = 1/x$ の面積による自然対数 e の定義

積がちょうど 1 になるようにとったときに、その右端の x の値が $a = e$ となっているとあった (図1 参照)*4。これはもちろん上に述べた定積分が 1 となるということを単に幾何学的に言い直したものにすぎないが、こういう解釈をすれば定積分で定義したときになんとか難しいと思った式も直観的にわかるようになる。

逆に考えると (2.1) はつまり自然対数の底 e の面積による定義を解析的に表したにすぎない。だから、(2.1) の積分で表された式をみたときに、そのグラフ的な意味を考えると直観的に理解できる。数式はある意味では学術的なところがあるが、それを自由に使いこなせるようになると世界が広がってくる。

2.3 公理的な定義

2.3.1 ベーレンツの定義

『5分でのしむ数学 50 話』 (Fünf Minuten Mathematik) [6] には公理的な自然対数の底 e の定義がある (文章は原文を少し変更した)。

- (1) 求める関数 f は x が 0 のときに関数 $f(0) = 1$ という値をとる。
- (2) この関数 $f(x)$ が微分可能な関数とする。すなわち、どんな x の値に対しても関数の傾きが求められる。
- (3) ある x の値に対する関数の傾きを $f'(x)$ と表せば、このとき常に $f'(x) = f(x)$ が成り立つ。

この 3 つの要請を満たす関数はただ一つしか存在せず、それは $f(x) = e^x$ であることをつぎのような手順で示すことができる。

1. 3 つの要請を満たす関数が一義的に決めることができる。
2. つぎに $x = 1$ のときのこの関数 $f(x)$ の値を e と定義する。

こういう方針を与えられたが、さてこのことをどうやって示すことができるのだろうか。その説明は [6] には載っていないので、ここで考えてみよう。いま、

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots \quad (2.5)$$

*4 この面積による自然対数の底の定義はすでに [5] に述べられており、詳しい授業プランも示されている。

と表されるとしよう。このとき、この関数 $f(x)$ は要請 (2) から微分できて、その導関数は

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots \quad (2.6)$$

となる。

要請 (3) により、 $f'(x) = f(x)$ の条件を無限級数で書き直すと

$$f(x) - f'(x) = (a_0 - a_1) + (a_1 - 2a_2)x + (a_2 - 3a_3)x^2 + (a_3 - 4a_4)x^3 + \cdots = 0 \quad (2.7)$$

となる。どんな x の値に対しても上の条件が成り立つためには、すべての項の係数が 0 にならねばならない。すなわち、

$$a_0 - a_1 = 0, \quad a_1 - 2a_2 = 0, \quad a_2 - 3a_3 = 0, \quad a_3 - 4a_4 = 0, \quad \cdots$$

が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0, \\ a_2 &= \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2!}a_0, \\ a_3 &= \frac{1}{3}a_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2!}a_0 = \frac{1}{3!}a_0, \\ a_4 &= \frac{1}{4}a_3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3!}a_0 = \frac{1}{4!}a_0, \\ &\cdots \\ a_n &= \frac{1}{n}a_{n-1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(n-1)!}a_0 = \frac{1}{n!}a_0 \end{aligned}$$

が得られる。この係数を (2.5) の $f(x)$ の式へ代入すれば、

$$f(x) = a_0 \left(1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots \right) \quad (2.8)$$

となる。要請 (1) の $f(0) = 1$ を用いると

$$a_0 = 1 \quad (2.9)$$

が得られ、この $f(x)$ の $x = 1$ のときの値を e とおけば、

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots \quad (2.10)$$

で自然対数の底 e が定義できる。これは以前に e の近似値の求めるときに用いた式であった [2]。また、(2.9) の $a_0 = 1$ を (2.8) に代入すれば、

$$f(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots := e^x \quad (2.11)$$

となる。ここで、 $:=$ は (2.11) の中辺の無限級数を記号 e^x と表すという意味である。すなわち、 $f(x) = e^x$ であり、(2.11) の無限級数は指数関数 e^x の Maclaurin 展開である*5。

ごちゃごちゃして面倒であったが、この定義は簡単にいうとつぎのようになる。いま

$$f'(x) = f(x) \text{ かつ } f(0) = 1 \text{ のとき } e := f(1) \quad (2.12)$$

で定義される。

*5 微分方程式 $f'(x) = f(x)$ を解けば、 $f(x) = Ce^x$ が得られ、 $f(0) = 1$ という初期条件をおけば、 $f(x) = e^x$ となることは微分方程式の解き方を知っている人には自明である。上に示した方法もこの微分方程式の解き方の一つである。

2.3.2 志賀の定義

微分を使わないもう一つの公理的な e の定義を見てみよう [7]. それには二つの定理を使う. まず予備定理として

(予備定理) すべての実数 x に対して定義された関数 $y = F(x)$ が, つぎの 2 つの性質をもつとする.

$$(a) F(x + x') = F(x) + F(x')$$

$$(b) x_n \rightarrow x_0 \quad (n \rightarrow \infty) \text{ のとき } F(x_n) \rightarrow F(x_0)$$

このとき, $F(1) = k$ とおくと,

$$F(x) = kx \tag{2.13}$$

が成り立つ (証明は略する. [7] を参照).

この予備定理を使うとつぎの定理が成り立つことが証明できる [8].

(定理) すべての実数 x に対して定義された関数 $y = f(x)$ が, つぎの 3 つの性質をもつとする.

$$(a) f(1) \neq 0$$

$$(b) f(x + x') = f(x)f(x')$$

$$(c) x_n \rightarrow x_0 \quad (n \rightarrow \infty) \text{ のとき } f(x_n) \rightarrow f(x_0)$$

このとき, $f(1) = a$ とおくと, $a > 0$ で

$$f(x) = a^x \tag{2.14}$$

が成り立つ (証明は略する. [8] 参照).

この定理で $f(1) = e$ とすれば, $f(1) = a^1 = a$ であつたから, $a = e$ であることがわかる.

3 自然対数の底の近似値

自然対数の底の近似値の求め方についてはすでに [2] に報告したが, それについても最近『数値計算術』 [9] を読んでつぎのようなことを知った.

これは漸化式を使って自然対数の底の近似値を求めるということである. まず e の近似値を求めるには

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots \tag{3.1}$$

という級数を用いるが, その一般項は

$$a_n = \frac{1}{n!} \tag{3.2}$$

である. ここで

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n \tag{3.3}$$

であり, n の階乗 (factorials) という. この $n!$ は $(n-1)!$ とは

$$n! = (n-1)! \times n, \quad (n \geq 2) \tag{3.4}$$

の関係にある. もし $n = 1$ のときに (3.4) が成り立つようにするには $0! = 1$ と定義すればよい.

この一般項 a_n とその一つ前の項 a_{n-1} との比をとれば,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{n} \tag{3.5}$$

であるから、漸化式

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n} \quad (3.6)$$

が得られる．ところで (3.2) から

$$a_0 = \frac{1}{0!} = 1 \quad (3.7)$$

であった．

$a_0 = 1$ を出発値として、漸化式 (3.6) で順々に計算していけば、

$$\begin{aligned} a_0 &= 1.000000000 \\ a_1 &= 1.000000000 \\ a_2 &= 0.500000000 \\ a_3 &= 0.166666666 \\ a_4 &= 0.041666666 \\ a_5 &= 0.008333333 \\ a_6 &= 0.001388888 \\ a_7 &= 0.000198412 \\ a_8 &= 0.000024801 \\ a_9 &= 0.000002755 \\ a_{10} &= 0.000000275 \end{aligned}$$

と各項の計算が簡単に一回の割り算をすることで得られる．後はこれらをすべてたし算してやればよい．そうすると

$$e = 2.718281796 \cdots \quad (3.8)$$

が得られる．このもっと正確な近似値は $e = 2.718281828459045$ であるので差をとってみれば、計算値は小数位以下 7 桁まで正しい．この計算法だと階乗を計算した後で、割り算をするという手間をかける必要がなくなるので大いに計算が簡略化される．

なんでもやり方によっては計算が簡単な上に精度もいい方法があるということを知った．もっとも e として大抵の場合にここまで精度よく計算する必要はない．科学技術者でもなければ e の近似値として 2.72 くらいだと知っているだけで十分だろう．

4 おわりに

このごろ円周率が約 3 という小学校での教え方から、その近似値を 3.14 に戻すという．太平洋戦争直後に小学校教育を受けた私なども円周率はおよそ 3 という教育を受けた世代だった．一方、この自然対数の底の方は高校まで学ぶことはなく、その近似値が 2.5 くらいなのか 2.7 くらいなのか 50 歳くらいまでうろ覚えであった．ましてや自然対数の底 e をどういう風に導入するのかについて関心をもったことは、まったくなかった．なんて恥ずかしい．

アメリカでは物理系の大学院生が学位試験を受ける前には、重要な定数を一生懸命に暗記しているという話を、大学の 2 年のころアメリカ帰りの物理の O 先生から聞いたことがある．そのときにはなんて小学生みたいなど思ったものだが、しかしこれは本当は必要な教育の一つだったのだと思う．

(2008. 3. 1)(2019.9.14 改訂)

参考文献

- [1] 矢野 忠, 自然対数の底, 再論, 研究と実践 (愛数協) No. 104 (2010.5) 17-22
- [2] 矢野 忠, 自然対数の底 e の近似値, 研究と実践 (愛数協) No. 66 (1998.6) 21-22,
『数学散歩』(国土社, 2005.1) 84-86 に再録
- [3] 矢野 忠, 自然対数の底, 数学・物理通信, 8 巻 2 号 (2018.3.15) 11-15
- [4] L. サーレム, F. テスタール, C. サーレム (深川洋一 訳), 『ヒト, 数学に出会う』(丸善, 1994.3) 64-65
- [5] 矢野 寛, 面積から入る指数, 対数関数の微積分, 研究と実践 (愛数協) No. 13-14 (1984.4) 43-50
- [6] E. ベーレンツ (鈴木 直 訳), 『5 分でたのしむ数学 50 話』(岩波書店, 2007.12) 10-14
- [7] 志賀浩二, 『数学 3 をたのしむ』(岩波書店, 2003.6) 21-23
- [8] 志賀浩二, 『数学 3 をたのしむ』(岩波書店, 2003.6) 23-24
- [9] 森口繁一, 『数値計算術』 (日本評論社, 1987.12) 12-14

いろいろな定積分の求め方

矢野 忠¹

Various Derivations for Definite Integrals

Tadashi YANO²

1 はじめに

このエッセイでは定積分を求めるためにどんな方法があるかを考えてみよう。多くの方々がこれらの方法をすでに知っているのだが、ここではそれらの定積分の方法をまとめておく。

私自身はあまり数学に強くないので、私の知らない方法がまだたくさんあるだろう。それでその定積分を求める方法の一部にしか触れられないことになるだろう。

もちろん、単に積分をすれば、問題が解決するというような単純な事柄はあまりない。それでも、定積分をして問題の解決をしなければならない場合もあるかもしれない。また、積分することは微分することよりも難しいのが一般的である。だから、いつでも数式に頼って積分するだけではなく、数値的に積分するということも知っておかなくてはならない。

2 定積分の方法

知っているものしか上げられないのだが、以下のような方法があるだろう。

1. 区分求積法

積分の意味がよくわかるが、計算が面倒である。級数の和が求まらないと積分できない。

2. 不定積分による方法

これが正攻法である。微分積分学の基本定理が重要である。

3. 複素積分

Cauchy の積分定理が重要である。複素解析の本来の目的は実関数では積分できない関数を複素関数として取り扱って積分するためだという人もいる。

4. 無限級数の和による定積分

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{6} \quad (2.1)$$

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15} \quad (2.2)$$

$$\int_0^\infty \frac{x^5}{e^x - 1} dx = \frac{8\pi^6}{63} \quad (2.3)$$

この定積分を求めるには ζ 関数の特殊な値を使う [1].

¹元愛媛大学工学部

²yanotad@earth.ocn.ne.jp

5. 積分記号下での微分による積分

積分記号内のパラメータで微分によって積分を求める.

6. 数値積分

Newton-Cotes, Gauss- (Legendre, Hermite, Laguerre), 適応型 Newton-Cotes, 二重指数関数型積分他がある. 最後の二つは日本人の発明である.

7. Monte Carlo 法による多重積分法

これも数値積分法の一つであろうが, 前の数値積分とは区別することとした. 多重積分をするにはこの方法がお勧めである. 低次元の積分ではあまり収束がよくない.

最近では数式処理のソフトが一般的になっているので, この項目も入れるべきかもしれないが, ここでは省略をした.

3 区分求積法

$y = x^2$ という放物線曲線より下で x 軸よりも上の面積で $x = 0$ から $x = a$ までの定積分を求めることを考えよう. すなわち積分記号で表すと

$$I = \int_0^a x^2 dx \quad (3.1)$$

の定積分を区分求積法で求めてみよう. $x = 0$ から $x = a$ までを n 等分する. そして小さな短冊形の面積を求め, その分割数 n を無限に大きくするという極限をとる. すなわち,

$$\begin{aligned} & \frac{a}{n} \left[0 + \left(\frac{a}{n}\right)^2 + \left(\frac{2a}{n}\right)^2 + \left(\frac{3a}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{na}{n}\right)^2 \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{k^2}{n^2}\right) a^2 \left(\frac{a}{n}\right) \\ &= \frac{a^3}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \frac{a^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{a^3}{6} \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

ところで

$$\begin{aligned} \int_0^a x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{a^3}{6} \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right) \right] \\ &= \frac{a^3}{6} \end{aligned} \quad (3.3)$$

これで定積分 I は求まったが, このときには

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (3.4)$$

とこの級数 $\sum_{k=1}^n k^2$ が求められなければ, 定積分ができないのが欠点である. またそれだけでなく一般にこのような級数の和を求めることはいつでもできるとはかぎらない³.

³しかし, 自然数のべきの和はベルヌーイ多項式を用いて表される.

だから、この区分求積法は定積分が図形を細かく分けて、それを足し上げるという単純な操作で求められる。これは定積分の意味を示すという点ではとても教育的であるが、その手続きは面倒であり、またいつでも可能だという訳でない。そういうことを避けることができる方法はつぎの不定積分を用いて定積分を求める方法である。

4 不定積分から定積分を求める

この方法はまったく正攻法の定積分の仕方であり、微積分学のテキストの教えるところはこの方法である。この方法の偉大さは疑う余地がない。

微分するという演算と不定積分を求めるという演算とが互いに逆演算になっているということがその基本になっている。これについてはすべての微積分のテキストで取り扱われているので、いまさらここで述べることもない。

5 複素積分

複素積分については、どの複素解析のテキストにも詳しいのでこれについては述べない。また機会があればとり上げることもあるだろう。

6 無限級数の和で求める定積分

この方法を知ったのは [2] によってである。これには

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad (6.1)$$

の計算が載っていた⁴。この方法によれば、

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx, \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx, \int_0^{\infty} \frac{x^5}{e^x - 1} dx, \dots, \int_0^{\infty} \frac{x^n}{e^x - 1} dx \quad (6.2)$$

等が積分できる。ただし、ここで n は奇数とする。

その積分の手順を

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx &= \int_0^{\infty} \frac{x^3 e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx \\ &= \int_0^{\infty} (x^3 e^{-x} + x^3 e^{-2x} + x^3 e^{-3x} + \dots) dx \end{aligned} \quad (6.3)$$

で示そう。

積分公式

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-ax} dx = \frac{6}{a^4} \quad (6.4)$$

を用いると

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx &= 6 \left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots \right) \\ &= \frac{6}{90} \pi^4 \\ &= \frac{\pi^4}{15} \end{aligned} \quad (6.5)$$

⁴ 固体の比熱の低温での評価を与える計算である。

と求められる。ただし、ここでツェータ関数 $\zeta(x)$ の $x = 4$ のときの値

$$\zeta(4) = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90} \quad (6.6)$$

を用いている。

だから、この定積分の値を求めるにはどうしてもツェータ関数 $\zeta(x)$ の $x = 4$ のときの値がわかっていなければならない。

同様に、任意の n の値に対して定積分

$$\int_0^\infty \frac{x^n}{e^x - 1} dx = \sum_{r=1}^\infty \frac{n!}{r^{n+1}} \quad (6.7)$$

と求めることができる [3]。

この方法の応用としてつぎのような積分

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x + 1} dx = \frac{\pi^2}{12} \quad (6.8)$$

も求めることができるだろう。

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x}{e^x + 1} dx &= \int_0^\infty \frac{x e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx \\ &= \int_0^\infty (x e^{-x} - x e^{-2x} + x e^{-3x} - \cdots) dx \end{aligned} \quad (6.9)$$

積分

$$\int_0^\infty x e^{-ax} dx = \frac{1}{a^2} \quad (6.10)$$

を用いると

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x}{e^x + 1} dx &= \int_0^\infty (x e^{-x} - x e^{-2x} + x e^{-3x} - \cdots) dx \\ &= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \cdots \\ &= \frac{\pi^2}{12} \end{aligned} \quad (6.11)$$

ここで級数の和

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \cdots = \frac{\pi^2}{12} \quad (6.12)$$

を用いた。

7 積分記号下での微分による積分

積分記号内のパラメータで微分によって積分を求める。この方法についてはすでに [4], [5], [6] で述べたが、上の積分の方法で得られた結果を用いて定積分公式が得られる。一例をあげよう。

ところで、6 節で求められた定積分 (6.11) で $x = au$ とおけば

$$\int_0^\infty \frac{au}{e^{au} + 1} d(au) = \frac{\pi^2}{12} \quad (7.1)$$

であるから

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^{ax} + 1} dx = \frac{\pi^2}{12a^2} \quad (7.2)$$

が得られる。定積分 (7.2) をパラメータ a で両辺を微分して $a = 1$ とおけば、つぎの定積分の公式

$$\int_0^\infty \frac{x^2 e^x}{(e^x + 1)^2} dx = \frac{\pi^2}{6} \quad (7.3)$$

を得ることができる [7].

8 数値積分

数値積分なら 2 節で述べたように Newton-Cotes, Gauss- (Legendre, Hermite, Laguerre), 適応型 Newton-Cotes, 二重指数関数型積分等がある。最後の二つは日本人の発明である。説明は省くが、文献をあげておこう。

一番基本的な数値積分で基本的なのは Newton-Cotes 積分であろう。これは昔の文献だが、[8] がわかりやすかった。いまでは、この文献よりも分かりやすい文献があるだろう。Gauss 積分については [9] が詳しい。もっとも重みの式の導出は中途半端である。

Gauss 積分の一般論が数値解析の本に出ているが、素人のためにその重みの導出を Gauss-Legendre 積分については調べたことがある [10].

適応型 Newton-Cotes 積分は研究上で使ったことがあるが、これは名古屋大学におられた二宮先生のつくられたいわゆる二宮ライブラリにあるが、図書館などで手に入る文献としては [11] を見ればよい。

二重指数関数型積分は森正武氏の発明した数値積分法である。これは [12] に詳しい。

Monte Carlo 法による多重積分法については [13] をみればよい。

9 おわりに

いくつかの定積分の求め方を述べた。さらに数値積分法とか Monte Carlo 法による多重積分の説明もすべきだった。しかし、最近は数値計算をすることから遠ざかっているのので、それらの説明をするのは別の機会にしたい。

10 補遺 (2.1), (2.3) の定積分の導出

この補遺では (2.1), (2.3) に示した定積分を導出しよう。ただし、(6.7) の一般公式を使わないで具体的に求めることにする。

まず (2.1) の定積分を導出しよう。被積分関数は

$$\begin{aligned} \frac{x}{e^x - 1} &= \frac{x e^{-x}}{1 - e^{-x}} \\ &= x(e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots) \end{aligned}$$

であるから

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} dx = \int_0^\infty x(e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots) dx \quad (10.1)$$

を項別積分すればよい。

ここで $a > 0$ のとき

$$\int_0^\infty x e^{-ax} dx = \frac{1}{a^2} \quad (10.2)$$

を用いれば、

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} dx = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

が求められる。これで (2.1) が導かれた。

つぎに (2.3) の定積分を求めよう。被積分関数は

$$\frac{x^5}{e^x - 1} = x^5 e^{-x} (1 + e^{-x} + e^{-2x} + \cdots) \quad (10.3)$$

と表される。ここで、

$$\int_0^\infty x^5 e^{-nx} dx = \frac{\Gamma(6)}{n^6} = \frac{5!}{n^6} \quad (10.4)$$

である。ここで $\Gamma(x)$ はガンマ関数である。したがって

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^5}{e^x - 1} dx &= 5! \left(\frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \cdots \right) \\ &= \frac{5! \pi^6}{945} \\ &= \frac{8\pi^6}{63} \end{aligned}$$

が求められる。これで (2.3) が導かれた。

ちなみに定積分 (2.1)-(2.3) と (6.7) は [3] に載っている。

(2017. 11. 10)

参考文献

- [1] 森口, 宇田川, 一松, 『数学公式 III』(岩波全書, 1960) 39-40
- [2] 小谷正雄, 『量子力学 I』(岩波全書) 15
- [3] 森口, 宇田川, 一松, 『数学公式 I』(岩波全書, 1956) 234
- [4] 矢野 忠, 微分をして積分を求める 1, 数学・物理通信 7 巻 9 号 (2017.12.1) 21-25
- [5] 矢野 忠, 微分をして積分を求める 2, 数学・物理通信 7 巻 10 号 (2017.12.22) 2-8
- [6] 矢野 忠, 微分をして積分を求める 3, 数学・物理通信 7 巻 10 号 (2017.12.22) 9-11
- [7] C. Kittel (宇野, 津屋, 森田, 山下 訳) 『固体物理学入門』上 第 7 版 (丸善, 1998) 171
- [8] 森口繁一, 高田勝, 『数値計算法 I』(岩波講座 現代応用数学 B13.I) (岩波書店) 54-58
- [9] 山内二郎, 宇野利雄, 一松 信, 『電子計算機のための数値計算法 III』(培風館, 1972) 280-301
- [10] 矢野 忠, 『数学散歩』(国土社, 2005) 179-189
- [11] 森正武, 『Fortran 77 数値計算プログラミング』(岩波書店, 1986) 187-204
- [12] 森正武, 『Fortran 77 数値計算プログラミング』(岩波書店, 1986) 168-186
- [13] 宮武修, 脇本和昌 『乱数とモンテカルロ法』(森北出版, 1978) 55-58

編集後記

皆様にはご健勝にお過ごしのことと存じます。10月が近づいて、ようやくすこし暑さがやわらいでまいりました。

「数学・物理通信」9巻7号を発行します。

今号には3編の論文を掲載しました。一つは物理学の現象を数学的手段で解明した論文であり、そのため一見すると数学の論文のように見えます。このような論文を広い意味で数学の論文と称してもいいのではないかという人もおられますが、私はつぎのように考えています。論文の結末が物理的表現か、または、数学的表現かのいずれかによって判断する。

この基準にしたがえば、明らかに最初の論文は物理学の論文と判断されます。この論文は物理学的现象を数学という道具でみごとに捉えた力作であり、また、2, 3番目の論文は数学の論文ということになります。

2, 3番目の論文は対数関数と指数関数とにまつわる、数学的性質を著者自身の目で調べ上げたものだと思います。近い将来、これら2つの論文に関連した、もう一つ別の研究を純粋数学的立場から提示したいと私も考えています。

春風や千里の道も一歩から

それはともかく、私たち編集者はこのサーキュラーの発行を続けられるために、皆様方の投稿を望んでいます。

(新関章三)