

数学・物理通信

9 卷 9 号 2020 年 1 月

編集 新関章三・矢野 忠

2020 年 1 月 9 日

目次 (Contents)

1. 鍵盤打楽器の固有振動 (2)

世戸 憲治 2

2. 「100g」は「1N」か？

世戸 憲治 11

3. ベクトルの空間回転 (改訂版)

矢野 忠 13

4. Levi-Civita の記号とベクトル解析

矢野 忠 19

5. 編集後記

矢野 忠 33

1. Characteristic Oscillations of Keyboard Percussion (2)

Kenji SETO 2

2. Is “100g” equal to “1N”?

Kenji SETO 11

3. Spatial Rotation of Vector (Revised Version)

Tadashi YANO 13

4. Levi-Civita Symbol and Vector Analysis

Tadashi YANO 19

5. Editorial Comments

Tadashi YANO 33

鍵盤打楽器の固有振動 (2)

世戸 憲治*

Characteristic Oscillations of Keyboard Percussion (2)

Kenji SETO*

1 はじめに

弦楽器や管楽器の場合，その発音機構が 1 次元的になっているので，高調波の振動数は基本振動数の整数倍になることが初めから保証される．このことは，西洋音楽にとって重要なことで，もしそうになっていないと不協和音が出てしまう．それに対し，鍵盤打楽器の場合は発音機構が 1 次元的ではないために，単なる棒状の鍵盤にしてしまうと，この高調波の振動数は基本波の整数倍にはならない．それを救うため，実際の鍵盤は図 1(b) に示すように鍵盤裏側の中央部が端の部分よりも薄くなるように作られている．

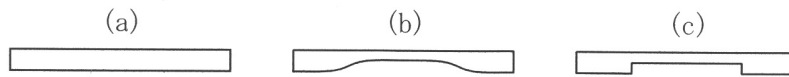


図 1 厚さ一様な鍵盤 (a)， 厚さに変化を持たせた実際の鍵盤 (b)， 今回のモデル鍵盤 (c)

前回は，この図 1(a) で示す厚さ一様な鍵盤の振動を，弾性棒の波動方程式を解くことで，高調波の振動数が基本波の整数倍にならないことを示した．今回は，鍵盤に厚さの変化を付けることで，高調波の振動数が基本波の整数倍になるようにするにはどうすればよいかを考える．ただし，この図 1(b) に示すように鍵盤の厚さを曲線的に変化させた場合は，方程式があまりに難しくなりすぎ，解析的に解くという立場では扱えなくなる．そこで，これを単純化した図 1(c) に示すように，ここでは，厚さを曲線的に変化させるのではなく，ある一定の長さのところ，段差付きで厚さを変えるという立場で考慮することにする．

2 方程式の導入とその解法

2.1 方程式の導入

鍵盤の長さを 2ℓ ，幅を a とするが，その厚さ h は図 1(c) に示すように，鍵盤の中央部は薄く h_0 とし，中心から長さ ℓ_0 より先の両端部では厚くなるように h_1 としておく．これは，鍵盤の中心を原点として，長さ方向に x 軸をとり，厚さ $h(x)$ を式で表すと， $\theta(x)$ を階段関数として，

$$h(x) = h_0\theta(\ell_0 - |x|) + h_1\theta(|x| - \ell_0) \quad (2.1)$$

と表されるものとする．

* 北海学園大学名誉教授

E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

ここで用いる波動方程式は、前回と同じ Bernoulli-Euler 梁のものを使う。すなわち、点 x , 時刻 t における鍵盤の面に対し垂直方向の変位を $V(x, t)$ としたとき、

$$\rho a h(x) V_{tt}(x, t) = -\partial_x^2 [EI(x) V_{xx}(x, t)], \quad I(x) = \frac{ah(x)^3}{12} \quad (2.2)$$

とする。ここに、変位 V に付けた添え字はその変数での微分を表す。また、 ρ は鍵盤の体積密度、 E は Young 率、 $I(x)$ は断面 2 次モーメントでこの第 2 式で定義する。

この方程式を鍵盤の端 ($x = \pm \ell$) は完全自由端として、そこでの曲げモーメント $M = EIV_{xx}$ をゼロ、また、剪断力 $Q = \partial_x(EIV_{xx})$ もゼロとして、

$$M = EI(x) V_{xx} \Big|_{x=\pm \ell} = 0, \quad Q = \partial_x [EI(x) V_{xx}] \Big|_{x=\pm \ell} = 0 \quad (2.3)$$

という境界条件を課す。また、鍵盤の厚さが変わる $x = \pm \ell_0$ の点は、方程式の接続点となるので、そこで鍵盤は折れ曲がってはいないという接続条件、

$$\lim_{x \rightarrow \pm \ell_0 + 0} V(x, t) = \lim_{x \rightarrow \pm \ell_0 - 0} V(x, t), \quad \lim_{x \rightarrow \pm \ell_0 + 0} V_x(x, t) = \lim_{x \rightarrow \pm \ell_0 - 0} V_x(x, t), \quad (2.4)$$

および、この点で曲げモーメント M と剪断力 Q が連続という接続条件

$$\lim_{x \rightarrow \pm \ell_0 + 0} EI(x) V_{xx}(x, t) = \lim_{x \rightarrow \pm \ell_0 - 0} EI(x) V_{xx}(x, t), \quad \lim_{x \rightarrow \pm \ell_0 + 0} \partial_x [EI(x) V_{xx}(x, t)] = \lim_{x \rightarrow \pm \ell_0 - 0} \partial_x [EI(x) V_{xx}(x, t)] \quad (2.5)$$

を課することになる。ただし、この条件式 (2.5) は、(2.1) 式、および、(2.2) の第 2 式を考慮すると、

$$\lim_{|x| \rightarrow \ell_0 + 0} h_1^3 V_{xx} = \lim_{|x| \rightarrow \ell_0 - 0} h_0^3 V_{xx}, \quad \lim_{|x| \rightarrow \ell_0 + 0} h_1^3 V_{xxx} = \lim_{|x| \rightarrow \ell_0 - 0} h_0^3 V_{xxx} \quad (2.6)$$

と書き換えられる。この (2.5) 式はつぎのように考えてもよい。すなわち、 EIV_{xx} が $x = \pm \ell_0$ で左右の値に違いがあると、それを微分したときにデルタ関数がでてしまう。このデルタ関数の出現を避けるには、 EIV_{xx} は $x = \pm \ell_0$ の左右で連続でなければならない。また、また、 $\partial_x [EIV_{xx}]$ が $x = \pm \ell_0$ で連続でないと、さらにこれを微分したときにデルタ関数が発生するが、方程式 (2.2) の左辺にはデルタ関数は存在し得ないので、 $\partial_x [EIV_{xx}]$ は $x = \pm \ell_0$ で連続でなければならない。

方程式を解く前に、数式簡素化のため変数の無次元化をしておく。そのため、速度の次元を持つ c と時間の次元を持つ τ を

$$c = \sqrt{\frac{E}{12\rho}}, \quad \tau = \frac{\ell}{c} \quad (2.7)$$

として導入しておく。ここで、 ℓ を長さの単位、 τ を時間の単位として、 $x, h_0, h_1, \ell_0, V, t$ を、改めて

$$x/\ell \rightarrow x, \quad h_0/\ell \rightarrow h_0, \quad h_1/\ell \rightarrow h_1, \quad \ell_0/\ell \rightarrow \ell_0, \quad V/\ell \rightarrow V, \quad t/\tau \rightarrow t \quad (2.8)$$

とおき直す。この変換で方程式 (2.2) は、

$$h(x) V_{tt}(x, t) = -\partial_x^2 [h(x)^3 V_{xx}(x, t)] \quad (2.9)$$

と無次元化されたものになる。ここで使われる $h(x)$ は無次元化されたものであるが、形式的には (2.1) 式と同じものである。また、境界条件の (2.3) 式はこの無次元化で、

$$V_{xx}(x, t) \Big|_{x=\pm 1} = 0, \quad V_{xxx}(x, t) \Big|_{x=\pm 1} = 0 \quad (2.10)$$

となる。さらに、接続条件の (2.4) (2.6) 式も無次元化されるが、形式的にはそのままの形である。

2.2 固有値と固有関数

方程式 (2.9) を解くにあたり、変位 $V(x, t)$ を変数分離形とし、時間依存部分は三角関数として、

$$V(x, t) = X(x) \sin(\omega t + \delta) \quad (2.11)$$

と仮定する。ここに ω は無次元化された角振動数、 δ は位相角である。これで、方程式 (2.9) は、

$$\omega^2 h(x) X(x) = \frac{d^2}{dx^2} [h(x)^3 X_{xx}(x)] \quad (2.12)$$

と 1 変数 x のみを含むものとなる。この方程式を境界条件 (2.10) 式からでる

$$X_{xx}(x) \Big|_{x=\pm 1} = 0, \quad X_{xxx}(x) \Big|_{x=\pm 1} = 0 \quad (2.13)$$

および、接続条件 (2.4) (2.6) 式からでる

$$\begin{aligned} \lim_{|x| \rightarrow \ell_0 + 0} X(x) &= \lim_{|x| \rightarrow \ell_0 - 0} X(x), & \lim_{|x| \rightarrow \ell_0 + 0} X_x(x) &= \lim_{|x| \rightarrow \ell_0 - 0} X_x(x), \\ \lim_{|x| \rightarrow \ell_0 + 0} h_1^3 X_{xx}(x) &= \lim_{|x| \rightarrow \ell_0 - 0} h_0^3 X_{xx}(x), & \lim_{|x| \rightarrow \ell_0 + 0} h_1^3 X_{xxx}(x) &= \lim_{|x| \rightarrow \ell_0 - 0} h_0^3 X_{xxx}(x) \end{aligned} \quad (2.14)$$

の下に解くことになる。

方程式 (2.12) に含まれる $h(x)$ は区分的には定数なので、この方程式は三角関数、および、双曲線関数を用いて容易に解け、その独立解は、

$$\begin{aligned} |x| < \ell_0 \text{ のとき } X(x) &= \cos(\gamma k x), \quad \sin(\gamma k x), \quad \cosh(\gamma k x), \quad \sinh(\gamma k x) \\ |x| > \ell_0 \text{ のとき } X(x) &= \cos(k x), \quad \sin(k x), \quad \cosh(k x), \quad \sinh(k x) \end{aligned} \quad (2.15)$$

と求められる。ここで、数式簡素化のため

$$\gamma = \sqrt{\frac{h_1}{h_0}}, \quad k = \sqrt{\frac{\omega}{h_1}} \quad (2.16)$$

とおいた。

方程式 (2.12)、境界条件 (2.13)、接続条件 (2.14) はすべて x の符号反転に対し不変なので、これらを満たす解は、偶関数の場合と、奇関数の場合があり得る。そこで、係数 A, B, C, D, E, F を用いて、偶関数の解を

$$\begin{aligned} F(x) &= \left[A \cos(\gamma k x) + B \cosh(\gamma k x) \right] \theta(\ell_0 - |x|) \\ &\quad + \left[C \cos(k x) + D \sin(k |x|) + E \cosh(k x) + F \sinh(k |x|) \right] \theta(|x| - \ell_0) \end{aligned} \quad (2.17)$$

とし、奇関数の解を

$$\begin{aligned} G(x) &= \left[A \sin(\gamma k x) + B \sinh(\gamma k x) \right] \theta(\ell_0 - |x|) \\ &\quad + \operatorname{sgn}(x) \left[C \cos(k x) + D \sin(k |x|) + E \cosh(k x) + F \sinh(k |x|) \right] \theta(|x| - \ell_0) \end{aligned} \quad (2.18)$$

とおく。ここでは、 $F(x), G(x)$ で同じ係数名を用いたが、これらは、もちろん、異なるものである。これは、変数名が無用が増えてしまうのを避けるためと、同じ式になる部分があるため、式の重複を避けるためである。また、この $G(x)$ の式にある sgn は符号関数である。これら関数に (2.13) 式の 2 個、(2.14) 式の 4 個、計 6 個の条件を課すことになる。このときは、偶奇性が決まっているので、 x の正の方だけの条件を課すだけでよい。

2.2.1 偶関数 $F(x)$ の場合

(2.17) 式で定義した $F(x)$ に (2.13) の境界条件を適用すると,

$$\begin{aligned} -C \cos(k) - D \sin(k) + E \cosh(k) + F \sinh(k) &= 0 \\ C \sin(k) - D \cos(k) + E \sinh(k) + F \cosh(k) &= 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

となり, (2.14) の接続条件を適用すると,

$$\begin{aligned} A \cos(\gamma k \ell_0) + B \cosh(\gamma k \ell_0) - C \cos(k \ell_0) - D \sin(k \ell_0) - E \cosh(k \ell_0) - F \sinh(k \ell_0) &= 0 \\ -\gamma A \sin(\gamma k \ell_0) + \gamma B \sinh(\gamma k \ell_0) + C \sin(k \ell_0) - D \cos(k \ell_0) - E \sinh(k \ell_0) - F \cosh(k \ell_0) &= 0 \\ -A \cos(\gamma k \ell_0) + B \cosh(\gamma k \ell_0) + \gamma^4 [C \cos(k \ell_0) + D \sin(k \ell_0) - E \cosh(k \ell_0) - F \sinh(k \ell_0)] &= 0 \\ A \sin(\gamma k \ell_0) + B \sinh(\gamma k \ell_0) + \gamma^3 [-C \sin(k \ell_0) + D \cos(k \ell_0) - E \sinh(k \ell_0) - F \cosh(k \ell_0)] &= 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

となる. これは 6 個の係数 A, B, C, D, E, F に対する 6 個の条件式である. ここで, 変数を減らすため, 初めに, この第 1 式に γ^4 を掛けたものに第 3 式を加え, また, 第 2 式に γ^3 を掛けたものに第 4 式を加えると, それぞれ, C, D が消えて,

$$\begin{aligned} (\gamma^4 - 1)A \cos(\gamma k \ell_0) + (\gamma^4 + 1)B \cosh(\gamma k \ell_0) - 2\gamma^4 E \cosh(k \ell_0) - 2\gamma^4 F \sinh(k \ell_0) &= 0 \\ -(\gamma^4 - 1)A \sin(\gamma k \ell_0) + (\gamma^4 + 1)B \sinh(\gamma k \ell_0) - 2\gamma^3 E \sinh(k \ell_0) - 2\gamma^3 F \cosh(k \ell_0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

となる. ここで, (2.19) 式から C, D を E, F の関数として求めてしまうと,

$$C = ER_1(k) + FR_2(k), \quad D = ER_3(k) + FR_4(k) \quad (2.22)$$

ここに,

$$\begin{aligned} R_1(k) &= \cos(k) \cosh(k) - \sin(k) \sinh(k), & R_2(k) &= \cos(k) \sinh(k) - \sin(k) \cosh(k) \\ R_3(k) &= \sin(k) \cosh(k) + \cos(k) \sinh(k), & R_4(k) &= \sin(k) \sinh(k) + \cos(k) \cosh(k) \end{aligned} \quad (2.23)$$

と定義する. この C, D を (2.20) の第 1 式, 第 2 式に代入すると,

$$\begin{aligned} A \cos(\gamma k \ell_0) + B \cosh(\gamma k \ell_0) - ES_1(k, \ell_0) - FS_2(k, \ell_0) &= 0 \\ -\gamma A \sin(\gamma k \ell_0) + \gamma B \sinh(\gamma k \ell_0) - ES_3(k, \ell_0) - FS_4(k, \ell_0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

となる. ここに,

$$\begin{aligned} S_1(k, \ell_0) &= \cosh(k \ell_0) + \cos(k \ell_0)R_1(k) + \sin(k \ell_0)R_3(k) \\ S_2(k, \ell_0) &= \sinh(k \ell_0) + \cos(k \ell_0)R_2(k) + \sin(k \ell_0)R_4(k) \\ S_3(k, \ell_0) &= \sinh(k \ell_0) - \sin(k \ell_0)R_1(k) + \cos(k \ell_0)R_3(k) \\ S_4(k, \ell_0) &= \cosh(k \ell_0) - \sin(k \ell_0)R_2(k) + \cos(k \ell_0)R_4(k) \end{aligned} \quad (2.25)$$

と定義する. これで, 4 個の係数 A, B, E, F に関する 4 本の式 (2.21) (2.24) ができた. これらはすべて, イコールゼロの形をしているので, これら係数がすべてゼロにならないためには, 係数行列式の値がゼロでなければならない. すなわち,

$$\Lambda_F(k) = \begin{vmatrix} (\gamma^4 - 1) \cos(\gamma k \ell_0) & (\gamma^4 + 1) \cosh(\gamma k \ell_0) & -2\gamma^4 \cosh(k \ell_0) & -2\gamma^4 \sinh(k \ell_0) \\ -(\gamma^4 - 1) \sin(\gamma k \ell_0) & (\gamma^4 + 1) \sinh(\gamma k \ell_0) & -2\gamma^3 \sinh(k \ell_0) & -2\gamma^3 \cosh(k \ell_0) \\ \cos(\gamma k \ell_0) & \cosh(\gamma k \ell_0) & -S_1(k, \ell_0) & -S_2(k, \ell_0) \\ -\gamma \sin(\gamma k \ell_0) & \gamma \sinh(\gamma k \ell_0) & -S_3(k, \ell_0) & -S_4(k, \ell_0) \end{vmatrix} \quad (2.26)$$

と行列式を定義したとき,

$$\Lambda_F(k) = 0 \quad (2.27)$$

でなければならない. これから, γ, ℓ_0 の値を与えたとき, それに依存した形で k の値が決まる.

2.2.2 奇関数 $G(x)$ の場合

(2.18) 式で定義した奇関数 $G(x)$ に (2.13) の境界条件を適用すると前出の (2.19) 式と同じものがでる. したがって, これらの式から係数 C, D を求めると, (2.22) (2.23) 式と同じものになる.

さらに, この $G(x)$ に (2.14) 式の接続条件を適用すると,

$$\begin{aligned} A \sin(\gamma k \ell_0) + B \sinh(\gamma k \ell_0) - C \cos(k \ell_0) - D \sin(k \ell_0) - E \cosh(k \ell_0) - F \sinh(k \ell_0) &= 0 \\ \gamma A \cos(\gamma k \ell_0) + \gamma B \cosh(\gamma k \ell_0) + C \sin(k \ell_0) - D \cos(k \ell_0) - E \sinh(k \ell_0) - F \cosh(k \ell_0) &= 0 \\ -A \sin(\gamma k \ell_0) + B \sinh(\gamma k \ell_0) + \gamma^4 [C \cos(k \ell_0) + D \sin(k \ell_0) - E \cosh(k \ell_0) - F \sinh(k \ell_0)] &= 0 \\ -A \cos(\gamma k \ell_0) + B \cosh(\gamma k \ell_0) + \gamma^3 [-C \sin(k \ell_0) + D \cos(k \ell_0) - E \sinh(k \ell_0) - F \cosh(k \ell_0)] &= 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

となる. ここで, C, D を消去するために, 第 1 式に γ^4 を掛けたものと第 3 式を加え, また, 第 2 式に γ^3 を掛けたものと第 4 式を加えると,

$$\begin{aligned} (\gamma^4 - 1)A \sin(\gamma k \ell_0) + (\gamma^4 + 1)B \sinh(\gamma k \ell_0) - 2\gamma^4 E \cosh(k \ell_0) - 2\gamma^4 F \sinh(k \ell_0) &= 0 \\ (\gamma^4 - 1)A \cos(\gamma k \ell_0) + (\gamma^4 + 1)B \cosh(\gamma k \ell_0) - 2\gamma^3 E \sinh(k \ell_0) - 2\gamma^3 F \cosh(k \ell_0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

を得る. ここで, (2.22) 式の C, D を (2.28) 式の第 1, 第 2 式に代入すると,

$$\begin{aligned} A \sin(\gamma k \ell_0) + B \sinh(\gamma k \ell_0) - ES_1(k, \ell_0) - FS_2(k, \ell_0) &= 0 \\ \gamma A \cos(\gamma k \ell_0) + \gamma B \cosh(\gamma k \ell_0) - ES_3(k, \ell_0) - FS_4(k, \ell_0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

となる. ここで, $S_i(k, \ell_0)$, ($i = 1, 2, 3, 4$) は (2.25) 式で定義するものである. これで, A, B, E, F に関する 4 本の式 (2.29) (2.30) を得たが, これらはすべて, イコールゼロの形をしているので, それらがすべてゼロにならないためには, その係数行列式の値がゼロでなければならない. すなわち,

$$\Lambda_G(k) = \begin{vmatrix} (\gamma^4 - 1) \sin(\gamma k \ell_0) & (\gamma^4 + 1) \sinh(\gamma k \ell_0) & -2\gamma^4 \cosh(k \ell_0) & -2\gamma^4 \sinh(k \ell_0) \\ (\gamma^4 - 1) \cos(\gamma k \ell_0) & (\gamma^4 + 1) \cosh(\gamma k \ell_0) & -2\gamma^3 \sinh(k \ell_0) & -2\gamma^3 \cosh(k \ell_0) \\ \sin(\gamma k \ell_0) & \sinh(\gamma k \ell_0) & -S_1(k, \ell_0) & -S_2(k, \ell_0) \\ \gamma \cos(\gamma k \ell_0) & \gamma \cosh(\gamma k \ell_0) & -S_3(k, \ell_0) & -S_4(k, \ell_0) \end{vmatrix} \quad (2.31)$$

と定義したとき,

$$\Lambda_G(k) = 0 \quad (2.32)$$

でなければならない, これから, γ, ℓ_0 を与えられたものとして, k の値が決まる.

ここまでに, k の値を決めるための方程式 (2.27) (2.32) を得たが, このときの解はすべて飛び飛びに決まるであろう. $\Lambda_F(k) = 0$ から得た解を小さい方から $k_0, k_2, k_4, \dots$ と偶数番号を付け, $\Lambda_G(k) = 0$ から得た解を小さい方から $k_1, k_3, k_5, \dots$ と奇数番号を付ける. 証明はしていないがこのとき, これらの大小関係は $k_0 < k_1 < k_2 < k_3 < k_4 \dots$ となるであろう. これらを k の固有値と呼び, そのときの関数 $F(x), G(x)$ を固有値依存性を明記して $F(x, k_n), G(x, k_n)$ のように表し, 固有関数と呼ぶ.

2.3 Maxima を用いた計算

固有値方程式 (2.27) (2.32) を手計算で解析するのはあまりにも大変である。実際, (2.26) (2.31) 式で定義される行列式を展開し, その中に含まれる $S_i(k, \ell_0)$, $i = 1, 2, 3, 4$, さらに, その中に含まれる $R_i(k)$, $i = 1, 2, 3, 4$ に (2.23) (2.25) 式の定義を代入すると, その項数は実に 184 項にもなる。以下では, 数式処理ソフト Maxima を用いた解析を試みるが, その前に $\ell_0 = 0$, または, $\ell_0 = 1$ という特別な場合は, 手計算で処理できるので述べておこう。この場合はどちらも厚さ変化のない単純な弾性棒になる。

初めに, $\ell_0 = 0$ の方から, (2.26) (2.31) 式の Λ_F , Λ_G は

$$\Lambda_F(k) = -4\gamma^3 S_3(k, 0), \quad \Lambda_G(k) = 4\gamma^5 S_2(k, 0) \quad (2.33)$$

となるので, これがゼロということは, $S_3(k, 0) = 0$, $S_2(k, 0) = 0$ となり, これから, $R_3(k) = 0$, $R_2(k) = 0$ で, 結局,

$$\tan(k) = -\tanh(k), \quad \tan(k) = \tanh(k) \quad (2.34)$$

となる。これは, 前回の「鍵盤打楽器の固有振動 (1)」で求めた厚さが一様の場合の固有値方程式と一致する。

つぎに, $\ell_0 = 1$ の場合は,

$$S_1(k, 1) = 2 \cosh(k), \quad S_2(k, 1) = 2 \sinh(k), \quad S_3(k, 1) = 2 \sinh(k), \quad S_4(k, 1) = 2 \cosh(k) \quad (2.35)$$

となるので, これを用いて, Λ_F , Λ_G を計算すると,

$$\Lambda_F(k) = -4[\cos(\gamma k) \sinh(\gamma k) + \sin(\gamma k) \cosh(\gamma k)], \quad \Lambda_G(k) = 4[\cos(\gamma k) \sinh(\gamma k) - \sin(\gamma k) \cosh(\gamma k)] \quad (2.36)$$

となるので, これらがゼロであるためには,

$$\tan(\gamma k) = -\tanh(\gamma k), \quad \tan(\gamma k) = \tanh(\gamma k) \quad (2.37)$$

である。この解は, (2.34) 式で求めた k を γ で割ったものが解となる。

これ以上のことは手計算では無理なので, 以下, Maxima を用いて数値計算をする。ここでは, 鍵盤の薄い部分の厚さ h_0 は, 厚い部分 h_1 の半分として, (2.16) 第 1 式で定義される γ の値を

$$\gamma = \sqrt{\frac{h_1}{h_0}} = \sqrt{2} \quad (2.38)$$

とおき, 薄い部分の長さの鍵盤の長さに対する比 ℓ_0 を, $\ell_0 = 0.25, 0.50, 0.75$ の 3 とおりについて, 固有値方程式 (2.27) (2.32) を解いてみた。結果の k_n の値を小数 4 桁の範囲で, $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ の 6 個づつあげると,

$$\begin{array}{lllllll} \ell_0 = 0.25 & \text{に対し} & k_n = & 1.6745, & 3.3815, & 5.2253, & 6.2701, & 7.7663, & 9.4657 \\ \ell_0 = 0.50 & \text{に対し} & k_n = & 1.5596, & 2.8131, & 4.2726, & 5.8687, & 7.3742, & 8.5593 \\ \ell_0 = 0.75 & \text{に対し} & k_n = & 1.5303, & 2.6508, & 3.8039, & 4.9844, & 6.2015, & 7.4568 \end{array} \quad (2.39)$$

となる。どの k_n も, ℓ_0 が大きくなるにつれ, その値は小さくなる。これは, ℓ_0 が大きくなるにしたがい, 厚さが薄い部分が増え曲がりやすくなるので, それだけゆっくりした振動になるためである。

k_n の値が決まると (2.16) の第 2 式から, ω_n の値が,

$$\omega_n = h_1 k_n^2 \quad (2.40)$$

と決まる．これは無次元化された固有角振動数である．これから最も低い振動数である ω_0 に対する高調波の振動数 $\omega_n (n = 1, 2, 3, 4, 5)$ の比が決まる．結果は、

$$\begin{array}{llllll} \ell_0 = 0.25 & \text{に対し} & \omega_n/\omega_0 = & 4.0780, & 9.7378, & 14.0213, & 21.5112, & 31.9548 \\ \ell_0 = 0.50 & \text{に対し} & \omega_n/\omega_0 = & 3.2535, & 7.5053, & 14.1598, & 22.3567, & 30.1195 \\ \ell_0 = 0.75 & \text{に対し} & \omega_n/\omega_0 = & 3.0004, & 6.1782, & 10.6082, & 16.4210, & 23.7418 \end{array} \quad (2.41)$$

という値になる．ここで、注目すべきことは、これら比の値がいかに整数値に近いかということである．整数値に近ければきれいな澄んだ音がするが、整数値でないときは濁った不協和音がでてしまう． $\ell_0 = 0.25$ のときは、第 1, 第 2, 第 3 高調波の振動数が基本波の 4 倍, 10 倍, 14 倍に近い．また、 $\ell_0 = 0.75$ のときは、第 1, 第 2 高調波の振動数が基本波の 3 倍, 6 倍に近い値になる．それ以上の高調波は振幅が小さいので無視できる． γ の値や ℓ_0 の値をもっと微調整することで、より整数倍に近い値がでることが期待できる．しかし、2 個のパラメータ γ, ℓ_0 を動かしながら数値計算を実行していくのは面倒なので、ここではこれ以上、立ち入らない．

2.4 固有関数の正規化

2 個の固有値を $k_n, k_{n'}$ とする．このとき、 n と n' の偶奇性が違えば、元になる関数の偶奇性も異なると考えられる．ここで、例えば、 n が偶数、 n' が奇数とした場合、それらの関数 $F(x, k_n)$ と $G(x, k_{n'})$ の積に重みの $h(x)$ を付けた積分が

$$\int_{-1}^1 h(x) F(x, k_n) G(x, k_{n'}) dx = 0 \quad (2.42)$$

となることは、 $h(x)$ が偶関数なので、当然のことである．したがって、固有関数の直交性を求めるときは、偶関数同士、あるいは、奇関数同士の積分を考えるとよい．以下では、偶関数同士の場合を考えることにする．

ここで、固有値とはかぎらない 2 個の k を k, k' とし、それらに属する関数を $F(x, k), F(x, k')$ とする．これら関数は (2.12) 式を満たし、

$$\omega^2 h(x) F(x, k) = \frac{d^2}{dx^2} [h(x)^3 F_{xx}(x, k)], \quad \omega'^2 h(x) F(x, k') = \frac{d^2}{dx^2} [h(x)^3 F_{xx}(x, k')] \quad (2.43)$$

が成り立っている．ここで、 k と ω , および、 k' と ω' は (2.16) 第 2 式の関係にある．この第 1 式に $F(x, k')$ を掛け、第 2 式に $F(x, k)$ を掛けて、辺々を引き算すると、

$$\begin{aligned} & (\omega^2 - \omega'^2) h(x) F(x, k) F(x, k') \\ &= \frac{d}{dx} \left[F(x, k') \frac{d}{dx} [h(x)^3 F_{xx}(x, k)] - F(x, k) \frac{d}{dx} [h(x)^3 F_{xx}(x, k')] \right. \\ & \quad \left. + F_x(x, k) h(x)^3 F_{xx}(x, k') - F_x(x, k') h(x)^3 F_{xx}(x, k) \right] \end{aligned} \quad (2.44)$$

となる．この式の両辺を x で -1 から 1 まで積分するが、そのとき、関数 F は (2.17) 式で見るように $x = \pm \ell_0$ を境として、異なる定義になるので、積分の方も

$$\int_{-1}^1 \rightarrow \int_{-1}^{-\ell_0-0} + \int_{-\ell_0+0}^{+\ell_0-0} + \int_{+\ell_0+0}^1 \quad (2.45)$$

と各区分に分ける必要がでてくる．このとき、接続条件である (2.14) 式が成立しているものとする、 $x = \pm \ell_0$ のところで $F, F_x, h^3 F_{xx}, (d/dx)[h^3 F_{xx}]$ が各々連続になるので、そこでの境界値は相殺され、形式的には -1

から 1 までの積分としてよい。結果は、

$$\begin{aligned}
(\omega^2 - \omega'^2) \int_{-1}^1 h(x) F(x, k) F(x, k') dx \\
= \left[F(x, k') \frac{d}{dx} [h(x)^3 F_{xx}(x, k)] - F(x, k) \frac{d}{dx} [h(x)^3 F_{xx}(x, k')] \right. \\
\left. + F_x(x, k) h(x)^3 F_{xx}(x, k') - F_x(x, k') h(x)^3 F_{xx}(x, k) \right]_{-1}^1 \quad (2.46)
\end{aligned}$$

となる。ここで、さらに、境界条件 (2.13) の第 1 式が成立するものとする、 $F_{xx}(\pm 1, k) = F_{xx}(\pm 1, k') = 0$ となるので、

$$\int_{-1}^1 h(x) F(x, k) F(x, k') dx = \frac{h_1^3}{\omega^2 - \omega'^2} \left[F(x, k') F_{xxx}(x, k) - F(x, k) F_{xxx}(x, k') \right]_{-1}^1 \quad (2.47)$$

となる。ここで、 $x = \pm 1$ で $h(x) = h_1$ を用いた。さらに、この式右辺の大括弧中は奇関数であることから

$$\int_{-1}^1 h(x) F(x, k) F(x, k') dx = \frac{2h_1^3}{\omega^2 - \omega'^2} \left[F(1, k') F_{xxx}(1, k) - F(1, k) F_{xxx}(1, k') \right] \quad (2.48)$$

となる。ここで、最後の条件である (2.13) の第 2 式が成立して、 k, k' が固有値 $k_n, k_{n'}$ になると、右辺の大括弧中がゼロとなるので、もし、 $k_n \neq k_{n'}$ のときは、異なる固有値に属する固有関数同士の直交性が

$$\int_{-1}^1 h(x) F(x, k_n) F(x, k_{n'}) dx = 0, \quad n \neq n' \quad (2.49)$$

と求められる。同じ固有値になるときは、(2.48) 式右辺は 0/0 となるので、先に $k' = k_n$ とおき、その後で、 $k \rightarrow k_n$ の極限をとる。すなわち、(2.16) の第 2 式を用いて ω を k で表し、l'Hopital の定理を使うと固有関数の直交性の式

$$\int_{-1}^1 h(x) F(x, k_n) F(x, k_{n'}) dx = N_{F,n}^2 \delta_{n,n'}, \quad N_{F,n}^2 = \frac{h_1}{2k_n^3} \left[\partial_k F_{xxx}(1, k) \right]_{k=k_n} F(1, k_n) \quad (2.50)$$

を得る。ここに、 $N_{F,n}$ は正規化定数で、 $F(x, k_n)/N_{F,n}$ が正規化された固有関数となる。

同様に、奇関数 $G(x, k_n)$ 同士の直交式

$$\int_{-1}^1 h(x) G(x, k_n) G(x, k_{n'}) dx = N_{G,n}^2 \delta_{n,n'}, \quad N_{G,n}^2 = \frac{h_1}{2k_n^3} \left[\partial_k G_{xxx}(1, k) \right]_{k=k_n} G(1, k_n) \quad (2.51)$$

も得られ、 $N_{G,n}$ が正規化定数となる。

2.5 再び Maxima を用いた計算

ここでは、前節の方法にしたがって、正規化された固有関数を求めてみる。(2.17) (2.18) 式で定義される関数 $F(x), G(x)$ に対し、(2.14) 式の接続条件を課すと、(2.20) 式、あるいは、(2.28) 式の各 4 本ずつの式がでる。さらに、(2.13) 式の境界条件を課すと (2.19) 式の 2 本の式がでるが、このうちの第 1 式のみを採用し、合計各々 5 本の式を考える。これらの式で γ, ℓ_0 の値は与えておき、また、 k を固有値 k_n とし、6 個ある係数 A, B, C, D, E, F のうち、 A は 1 とおき、残りの 5 個の係数 B, C, D, E, F をこれら 5 本の式から Maxima を用いて求める。これで固有関数 $F(x, k_n), G(x, k_n)$ が決まるが、これはまだ正規化されたものではない。正規化するには、前節の正規化定数 $N_{F,n}, N_{G,n}$ を求める必要がある。そのとき、 $[\partial_k F_{xxx}(1, k)]_{k=k_n}, [\partial_k G_{xxx}(1, k)]_{k=k_n}$ も求める必要がでる。これは、 Δk を微小量として、 k を $k = k_n + \Delta k$ とし、係数 A, B, C, D, E, F を決め、その後、 $F_{xxx}(1, k), G_{xxx}(1, k)$ を Δk で割るとよい。以下の図 2 に、 $\gamma = \sqrt{2}, \ell_0 = 0.75$ としたときの固有関数を $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ について示す。

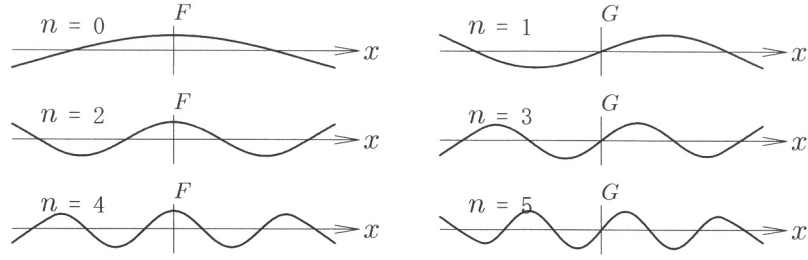


図 2 固有関数 $F(x, k_n)$, $(n = 0, 2, 4)$, $G(x, k_n)$, $(n = 1, 3, 5)$, $\gamma = \sqrt{2}$, $\ell_0 = 0.75$ の場合

この図で見るとかぎりでは、前回述べた厚さ一様の場合の固有関数のグラフとあまり変わらない。どのグラフも $n + 2$ 個のゼロ点を持つ。

3 おわりに

方程式 (2.12) を解くのに何週間もかかってしまった。この式で、鍵盤の厚さ $h(x)$ に段差を付けてしまうと、それを微分したときにデルタ関数がでてしまい、しかももう一度微分するので、普通に考えるとデルタ関数の微分まで入り込む。これをどう処理するのかと考えてしまったからである。結果としてはデルタ関数が入り込まないように連続条件を作ってしまうということであった。気付いてしまえば当たり前のことであるが、気付くまでが問題である。

今回は、鍵盤の厚さに段差を付けた解析をした。この段差をしないで 2 次曲線で近似するという方法も考えてみたが、この場合は既成の関数では解けなくなるので、諦めてしまった。次回はこの厚さを直線で近似したものを扱うことにする。

[謝辞]

ここで扱った鍵盤打楽器の固有振動を解析してみようと思い立ったのは、前回も述べたように、小方厚著「音律と音階の科学」、および、同著者の「視て聴くドレミ」を読んだためである。小方氏からは、これら本のもとになった本、Neville H. Fletcher & Thomas D. Rossing 著 “The Physics of Musical Instruments, Second Edition” Springer を見せていただいた。この本の中では図 1(b) に示す鍵盤の固有振動も扱っているが、これはさらに、他の論文から引用されたもので、詳しくは分からないが、おそらく有限要素法を用いて解析したものと思われる。ここでは振動方程式を解析的に解くという立場で扱ったので、やむなく図 1(c) の段差付きで鍵盤の厚さを変えるものになってしまった。これらの本を快く見せていただいた小方厚氏に心から感謝いたします。

なお、この小方氏から見せていただいた本のなかでは、図 1 (b) に示す実際の鍵盤における高調波の振動数の基本振動数に対する比が載っていて、 $n = 0, 1, 2, 3, 4$ に対し、

$$\frac{\omega_n}{\omega_0} = 1, \quad 3.96, \quad 10.67, \quad 19.17, \quad 27.02 \quad (3.1)$$

となっている。この場合は、第 1 高調波の振動数が基本波のほぼ 4 倍、第 2 高調波が 10 倍になっている、ここでの解析の (2.41) 式、 $\ell_0 = 0.25$ のときに近い値になっている。

もう一つ、お断りしておかなければならないことがある。それは前回まで、波動関数のノルムを 1 にすることを「規格化」と言っていたが、今回からはこれを「正規化」という言葉に改めることにした。これは、編集者の矢野忠氏から、最近「規格化」より「正規化」という言葉の方が多く使われるようになった、という注意を受けたからである。このことに関し、矢野忠氏に感謝申し上げる。

「100g」は「1N」か？

世戸 憲治*

Is “100g” equal to “1N”?

Kenji SETO*

1 はじめに

たまたま、中学生の理科の教科書を見ることがあり、エーッと、驚いてしまった。力の単位のことである。中学 1 年用の教科書『未来へひろがるサイエンス 1』（啓林館）の P.210 に力の大きさ というのが載っていて、そこには、つぎのように書かれている。

「物体にはたらく重力の大きさを重さという。約 100g の物体にはたらく重力の大きさ（重さ）を 1 ニュートン（記号 N）といい、力の大きさを表す単位に使う。」

これを読んだ中学生はどう思うだろうかと考えてしまった。まるで、「100cm = 1m」のごとく、g と N では、まったく次元が違うにもかかわらず、「100g = 1N」と思ってしまうのではないかと。物理屋の私でさえ、普段は、質量と重さを区別しないで、1kg の重さのことを単に 1 キロなどと言ったりするので、ましてや、質量と重さの区別を知らない中学生が読むと、混同してしまうのは当然である。この教科書の書き方は、「100g」のところに、「約」というのが付いていて、これが何を意味するか、中学生には意味不明であろう。もっとも、この部分には注意書きが付いていて、

「100g の物体にはたらく重力の大きさ（重さ）は、正確には約 0.98N である。以後、この教科書では、100g の物体にはたらく重力の大きさを 1N と考えることにする。」

というのが付いている。私から見るとこの注意書きはまったくナンセンスである。「正確には」と言いながら、再び、「約 0.98N」と「約」が付いている。正確に言うのであれば、どうして「約」が付くのだと言いたくなる。これは本質的なことを抜きにしてしまったための言い逃れとしか考えられない。すなわち、一番いけないのは、この 100g の重さが 1N の定義のごとく書かれていることである。

2 どうして、こんなことになったのか？

Newton 力学は 3 つの法則から成り立っている。第 1 法則：慣性の法則、第 2 法則：運動の法則、第 3 法則：作用・反作用の法則、である。力の単位である N は、この第 2 法則の $F = ma$ に準拠して、質量 $m = 1\text{kg}$ の物体に作用して、加速度 $a = 1\text{m/s}^2$ を生じるときの力を $F = 1\text{N}$ と定義している。したがって、この第 2 法則を説明することなく、力の単位 N を持ちだすのは無理というものだろう。と思って、中学校の教科書を 1 年生用から、3 年生用までを調べてみると、このうち、第 1 法則：慣性の法則と第 3 法則：作用・反作用の法則は 3 年生用の教科書で説明されている。しかし、第 2 法則：運動の法則に関しては、ある物体に力が作用すると、その力の向きによって、速さと同じ方向であれば速さは大きくなり、逆向きの場合は速さは小さくなる、というごく定性的な

* 北海学園大学名誉教授

E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

説明があるだけである。しかも、この中で「加速度」という言葉は一切使われていない。これでは力の単位 N を定義することはできるはずもない。では何故に、これほどまでに無理をして、力の単位 N を持ち出したのか疑問が残る。この単位 N が中学校の教科書に登場したのは、2002 年からで、それまでは、力の単位は、kg 重、あるいは、kgf が使われていた。

さらに、いまの教科書を調べてみると、1 年生用のものに、圧力の話が載っていて、その単位が、

$$\text{圧力 (N/m}^2\text{)} = \frac{\text{力の大きさ (N)}}{\text{力のはたらく面積 (m}^2\text{)}}, \quad 1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ Pa}$$

として、単位パスカル (Pa) が導入されている。確かにこの Pa という単位を kgf で書こうとすると面倒なことになってしまう。また、3 年生用の教科書では、仕事、および、仕事率の単位が、

$$\text{仕事 (J)} = \text{力の大きさ (N)} \times \text{力の向きに動いた距離 (m)}, \quad 1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\text{仕事率 (W)} = \frac{\text{仕事 (J)}}{\text{仕事にかかった時間 (s)}}, \quad 1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$$

として、ジュール (J) とワット (W) が導入されている。これらの単位もすべてニュートン (N) が基本になっているので、これを kgf を使って定義しようとする、かえっておかしなことになってしまう。これが是が非でも、単位ニュートン (N) を、中学校の教科書に載せてしまった理由であろう。

そうであるならば、加速度を用いた運動の法則から正しいやり方で、力の単位 N を導入するか、それが無理なら、N をはじめ、Pa, J, W も、すべて、中学の教科書に載せることは止めにするかのどちらかだと思う。これは私の勝手気ままな極論であろうか。あるいは、百歩譲って、

「力の大きさは単位ニュートン（記号 N）を用いて表わされるが、この単位は力学の運動法則に基づいて定義される。中学校ではこの運動法則について詳しくは学ばないため、その方法についてここでは述べる。この単位を用いると、大きさ 1N の力は、およそ 100g の物体に作用する重力の大きさにほぼ等しい」
とでも書いてくれれば、まだ許せる気にもなるのだが。

3 おわりに

先に述べたように、力の単位 N が中学校の教科書に登場したのは 2002 年のことであるから、もう 20 年近くも前のことである。これまでも、この件に関しては種々の議論があったのかもしれない。ただ、私はいまになって初めて知ったので、批判めいたことを書く気になってしまった。私が中学生のときは当然ながら、N や J などという単位は知らなかったし、W も電球のワット数で知っていた程度である。もっとも、私の学生時代は、物理で用いられる単位と言えば、まだ cgs 単位で、力の単位はダイン (dyn)、仕事の単位はエルグ (erg) という時代であった。後で、MKS 単位系に慣れるのに大変な苦勞をさせられた。

話し変わって、今回、中学生が使う教科書を読んでみて感じたことを記すと、いまだきの教科書は、内容的にもかなり高度になり、カラフルな写真や絵がたくさん載っていることに驚いたことである。興味ある生徒にとっては楽しく勉強ができるのかもしれない。しかし、興味を持たない生徒にとっては、すべてが行き過ぎになってしまい、かえって反発してしまうのではと危惧しないでもない。

ベクトルの空間回転（改訂版）

矢野 忠^{*1}

Spatial Rotation of Vector (Revised Version)

Tadashi YANO^{*2}

1 はじめに

この「数学・物理通信」に「ベクトルの空間回転」を書いた [1]。これはその改訂版である。

前のエッセイ「ベクトルの空間回転」では、ベクトルの回転軸のまわりの回転として、普通には負の角としてとられる回転方向を選んでた。これは依拠した文献ゴールドスタイン『古典力学』での回転方向が負の方向にとられていたためである [2]。

それで、回転方向を普通の正の方向に変えた記述にすることが望ましかった。実は、ゴールドスタインの『古典力学』を参照する前には Altmann の書を読んでおり、この書の「ベクトルの空間回転」の説明が簡潔であることに感銘をうけていた [3]。しかし、いまからみるとなぜだかわからないのだが、どこかわからないところがあったらしく、この Altmann の説明を採用しなかった^{*3}。

だが、最近になってこの Altmann の説明とそれを読んだときにつくったノートを読んでも、不可解な箇所はまったくなく^{*4}。これがこのエッセイ「ベクトルの空間回転」（改訂版）を書く理由である。

さて、ベクトルなどの空間回転を取り扱う方法として

1. ベクトルによる表現
2. 行列による表現
3. 四元数による表現
4. 鏡映変換による表現
5. Euler 角による表現

による表現等があるとこれまで何回も述べてきた。そして、表現 2, 3, 4, 5 については [4] - [8] ですでに述べた。

ところが 1. ベクトルによる表現 については、これがもっともよく知られた空間回転の表現であるにもかかわらず、今までまったく触れなかった。これは著者にとって目新しい表現を先に調べてみたかったためであり、それ以外には特に理由がない。

しかし、やはり空間回転のベクトルによる表現について述べておくこと、またそれが空間回転の行列表現と同一であることを確認することは欠かすことができない。

まず、第 2 節で空間回転のベクトルによる表現 Rodrigues の回転公式^{*5}を求め、第 3 節でそれが以前に求めた行列表現に一致することを見ることにしよう [11]。

^{*1} 元愛媛大学工学部

^{*2} yanotad@earth.ocn.ne.jp

^{*3} いまとなってははっきりしないが、たぶん、 $\mathbf{a}$ の係数 x, y の求め方がわからなかったのであろう。

^{*4} このノートの作成は 2018 年 10 月より以前だったことは私の 2018 年 10 月に書いたブログがあることからわかった。もっともノート作成がそのころだとすれば、それは『四元数の発見』を発行した数年後である。

^{*5} これを Altmann は円錐変換 (conical transformation) と呼んでいる [3]。円錐変換という名称は 2 節で示す図 1 からわかるように回転軸 $\mathbf{n}$ のまわりの円錐上をいつもベクトルが動くからである。

2 ベクトルの空間回転

ある回転軸のまわりの有限な角のベクトルの回転については多くの文献で述べられている．それらの説明はどれも難しくはないが，ここでは説明が簡潔な [3] にしたがって説明をしよう．図 1 で示されたようにベクトル $\mathbf{r}$

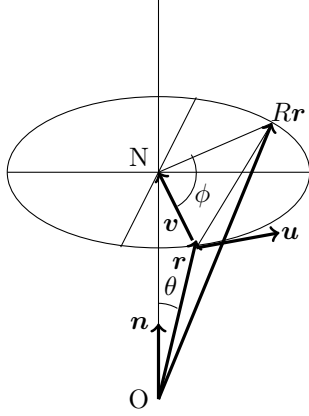


図 1 $\mathbf{n}$ のまわりのベクトル $\mathbf{r}$ の空間回転

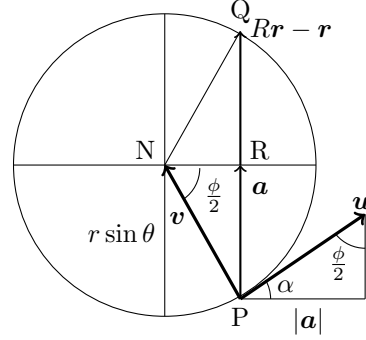


図 2 ベクトル $\mathbf{r}$ の空間回転の断面図

を，ベクトルの始点 O を動かさないように固定して，単位ベクトル $\mathbf{n}$ で表される回転軸 ON のまわりに反時計方向に ϕ だけ回転させるとする．このとき回転後のベクトルは $R\mathbf{r}$ となる．ここで R はこの回転を表す演算子で詳しくは $R(\phi\mathbf{n})$ と表し，この回転は回転軸 $\mathbf{n}$ のまわりの反時計方向の回転角 ϕ をもっている．

当然のことながら，ベクトル $\mathbf{r}$ はこの回転によって位置と方向は変わるが，その大きさは変わらない．すなわち， $|\mathbf{r}| = |R\mathbf{r}|$ が成り立っている．また二つのベクトル $\mathbf{r}$ と $R\mathbf{r}$ の始点も図 1 に示されたように変わらない．

したがって， $R\mathbf{r}$ は頂点 O を先端とする円錐をつくる^{*6}．すなわち， $R\mathbf{r}$ はこの円錐の母線となる．また，回転軸 $\mathbf{n}$ に垂直な断面は半径 $r \sin \theta$ の円を描く．

いま図 2 に示したように，ベクトル $\overrightarrow{PQ} = R\mathbf{r} - \mathbf{r}$ の方向とそれに垂直な方向を二つの平面上の座標軸とし，その原点を点 N にとる．

いま

$$\overrightarrow{PR} = \mathbf{a} \quad (2.1)$$

とすれば，図 1 と図 2 からわかるように

$$R\mathbf{r} - \mathbf{r} = 2\mathbf{a} \quad (2.2)$$

である．これから

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2}(R\mathbf{r} - \mathbf{r}) \quad (2.3)$$

が得られる．さらに，図 2 の点 P での円の接線方向のベクトル $\mathbf{u}$ とそれに垂直な円の中心方向のベクトル $\mathbf{v}$ を考える．すなわち，

$$\mathbf{u} = \mathbf{n} \times \mathbf{r}, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{n} \times \mathbf{u} \quad (2.5)$$

である^{*7}．

^{*6} 動かす前のベクトル $\mathbf{r}$ はもちろんこの円錐の上にある．

^{*7} (2.4) と (2.5) についての注意を付録 1 に述べる．

そうすると、ベクトル $\mathbf{a}$ は互いに垂直で（したがって、一次独立な）ベクトル $\mathbf{u}$ とベクトル $\mathbf{v}$ との一次結合で

$$\mathbf{a} = x\mathbf{u} + y\mathbf{v} \quad (2.6)$$

と表すことができる。ここで係数の x, y を求めれば、ベクトル $\mathbf{a}$ が定まる。また、ベクトル $\mathbf{a}$ が定まれば、 $R\mathbf{r}$ が

$$R\mathbf{r} = \mathbf{r} + 2\mathbf{a} \quad (2.7)$$

から求まる。

したがって、 $\mathbf{a}$ の係数 x, y を求めればよい。いまベクトル $\mathbf{u}$ とベクトル $\mathbf{v}$ とは互いに垂直にとられているから、 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ である。ベクトル $\mathbf{a}$ とベクトル $\mathbf{u}$ または $\mathbf{v}$ とのスカラー積をとれば、係数 x, y が求められる*⁸。

この結果は

$$x = \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2}, \quad (2.8)$$

$$y = \sin^2 \frac{\phi}{2} \quad (2.9)$$

であるから、 $\mathbf{a}$ が求まった。

ところで (2.7) と (2.6) から、 $\mathbf{r}$ の回転 $R\mathbf{r}$ は

$$R\mathbf{r} = \mathbf{r} + 2x\mathbf{u} + 2y\mathbf{v} \quad (2.10)$$

と表される。ここで

$$2x = 2 \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} = \sin \phi, \quad (2.11)$$

$$2y = 2 \sin^2 \frac{\phi}{2} = 1 - \cos \phi \quad (2.12)$$

であり、さらに $\mathbf{a}$ を表すために、便宜的に導入した $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ を $\mathbf{n}$ と $\mathbf{r}$ とで表せば

$$\mathbf{u} = \mathbf{n} \times \mathbf{r}, \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r}), \\ &= \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r} \end{aligned} \quad (2.13)$$

となる。なお、(2.13) ではベクトル三重積で、中央項ルールを用いた [9]。

これらを代入すれば、最終的に

$$R\mathbf{r} = \mathbf{r} \cos \phi + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})(1 - \cos \phi) + (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \sin \phi \quad (2.14)$$

と表される*⁹。これがベクトルの回転を表す式であり、Rodrigues の回転公式と呼ばれている。

この式を行列で表せば $SO(3)$ と同じ式が得られることを 3 節で示すことにしよう。

3 行列による表示

前節で求めた Rodrigues の回転公式 (2.14) を行列表示にするには $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}' := R\mathbf{r} = (x', y', z')$, $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ と各ベクトルを成分で表し、それを行列で書き表せばよい。

このままの表示でもいいのだが、ベクトルの成分を数字を添字とした文字で $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$, $(x', y', z') = (x'_1, x'_2, x'_3)$ および $(n_x, n_y, n_z) = (n_1, n_2, n_3)$ と表すことにしよう。

*⁸ 係数 x, y を求める計算は付録 2 に示す。

*⁹ (2.14) の計算は付録 3 に示す。

このとき, (2.14) の中に出てくるベクトル $\mathbf{n}$ と $\mathbf{r}$ のスカラー積とベクトル積は

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 \quad (3.1)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{r} = (n_2 x_3 - n_3 x_2, n_3 x_1 - n_1 x_3, n_1 x_2 - n_2 x_1) \quad (3.2)$$

と表される.

これから (2.14) は

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \cos \phi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + (1 - \cos \phi)(n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3) \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} + \sin \phi \begin{pmatrix} n_2 x_3 - n_3 x_2 \\ n_3 x_1 - n_1 x_3 \\ n_1 x_2 - n_2 x_1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

となる. したがって

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos \phi + (1 - \cos \phi)n_1(n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3) + \sin \phi(n_2 x_3 - n_3 x_2) \\ x_2 \cos \phi + (1 - \cos \phi)n_2(n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3) + \sin \phi(n_3 x_1 - n_1 x_3) \\ x_3 \cos \phi + (1 - \cos \phi)n_3(n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3) + \sin \phi(n_1 x_2 - n_2 x_1) \end{pmatrix}$$

である. これをちょっと書き直せば

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c + (1 - c)n_1^2 & (1 - c)n_1 n_2 - s n_3 & (1 - c)n_1 n_3 + s n_2 \\ (1 - c)n_1 n_2 + s n_3 & c + (1 - c)n_2^2 & (1 - c)n_2 n_3 - s n_1 \\ (1 - c)n_1 n_3 - s n_2 & (1 - c)n_2 n_3 + s n_1 & c + (1 - c)n_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

ここで $c = \cos \phi, s = \sin \phi$ の略記を用いている. これは『四元数の発見』[12] の (6.5.5)-(6.5.7) と一致している.

4 おわりに

今までに「四元数と空間回転 1-3」, 「空間回転と SU(2)」とそれにこのエッセイにおいて, ベクトルなどの空間回転についてほとんどのことを述べてきたが, それでもまだ Euler 角による空間回転の表現については触れることができていない.

だんだん四元数から離れることになるが, 次回はそれについて述べることにしたい.

5 付録 1 (2.4), (2.5) についての注意

この付録 1 では (2.4), (2.5) についての注意を述べておこう.

この (2.4) と (2.5) では点 O に始点があったベクトル $\mathbf{r}$ と $\mathbf{n}$ との始点を図 2 の点 P になるように平行移動させたベクトル $\mathbf{r}$ と $\mathbf{n}$ を考えている.

$\mathbf{n}$ は始点が点 P で, 図 2 のある紙面に垂直なベクトルとなり, またベクトル $\mathbf{r}$ は始点は同じ点 P だが, 紙面に垂直な, 法線ベクトル $\mathbf{n}$ から角度 θ だけ傾いたベクトルとなる. この相互関係は始点を P にするようにベクトル $\mathbf{r}$ と $\mathbf{n}$ を点 O から平行移動させても変わらない.

本来, ベクトル $\mathbf{r}$ も $\mathbf{n}$ も始点 O に固定された, 位置ベクトルとして考えられたが, ベクトル $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ を定義するときには, 始点の位置を点 O から点 P に自由に移動できる自由ベクトルとして扱われている.

6 付録 2 (2.6) の係数 x, y の求め方

この付録 2 では (2.6) の係数 x, y を求めよう.

(2.6) の $\mathbf{a}$ を表している 2 つの独立なベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ は互いに垂直であるから,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (6.1)$$

が成り立っている。

また、 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ と $\mathbf{n}$ との3つのベクトルは互いに直交している。このことはベクトル $\mathbf{n}$ を始点が P になるように平行移動させれば明らかであろう。

まず $\mathbf{a}$ と $\mathbf{u}$ のスカラー積をとると。

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = xu \cdot \mathbf{u} \quad (6.2)$$

となる。これは

$$xu^2 = au \cos \frac{\phi}{2}, \quad u = |\mathbf{u}| \quad (6.3)$$

となる。したがって、 x は

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{u} \cos \frac{\phi}{2} \\ &= \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} \end{aligned} \quad (6.4)$$

と求められる。これが (2.8) である。

(6.4) で

$$\begin{aligned} \frac{a}{u} &= \cos \alpha \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2} \right) \\ &= \sin \frac{\phi}{2} \end{aligned} \quad (6.5)$$

であることを用いた。

つぎに $\mathbf{a}$ と $\mathbf{v}$ とのスカラー積をとると

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = yv \cdot \mathbf{v} \quad (6.6)$$

となる。これは

$$yv^2 = av \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2} \right), \quad v = |\mathbf{v}| \quad (6.7)$$

となる。したがって y は

$$\begin{aligned} y &= \frac{a}{v} \sin \frac{\phi}{2} \\ &= \sin^2 \frac{\phi}{2} \end{aligned} \quad (6.8)$$

と求められる。これが (2.9) である。

(6.8) で

$$\begin{aligned} \frac{a}{v} &= \cos \alpha \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2} \right) \\ &= \sin \frac{\phi}{2} \end{aligned} \quad (6.9)$$

であることを用いた。

(2.10) の $R\mathbf{r}$ の計算に必要なから, ついでに $2x, 2y, 1 - 2y$ を計算しておく.

$$2x = 2 \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} = \sin \phi, \quad (6.10)$$

$$2y = 2 \sin^2 \frac{\phi}{2} = 1 - \cos \phi, \quad (6.11)$$

$$1 - 2y = 1 - (1 - \cos \phi) = \cos \phi \quad (6.12)$$

これらは (2.10) と (7.1) で必要になる (2.11), (2.12) と $1 - y$ である.

7 付録 3 (2.14) の計算

この付録 3 では (2.10) から (2.14) への計算を述べよう. まず (2.10) は

$$R\mathbf{r} = \mathbf{r} + 2x\mathbf{u} + 2y\mathbf{v} \quad (2.10)$$

であった.

ここで, $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ は (2.4) と (2.13) で表されたので, これらを (2.10) に代入すれば,

$$\begin{aligned} R\mathbf{r} &= \mathbf{r} + 2x(\mathbf{n} \times \mathbf{r}) + 2y[\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}] \\ &= (1 - 2y)\mathbf{r} + 2x(\mathbf{n} \times \mathbf{r}) + 2y(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} \\ &= \cos \phi \mathbf{r} + \sin \phi (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) + (1 - \cos \phi)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} \end{aligned} \quad (7.1)$$

ここで, $1 - 2y, 2x, 2y$ は付録 2 ですでに計算されている. この (7.1) が (2.14) の計算の詳細である.

(2019. 11. 21)

参考文献

- [1] 矢野 忠, 四元数と空間回転 5, 数学・物理通信 第 3 巻, 第 5 号 (2013.9) 16-20
『四元数の発見』(海鳴社) に収録したときに「ベクトルの空間回転」とタイトルをあらためている.
- [2] Goldstein, Poole, Saffko (矢野, 江沢, 渕崎 訳), 『古典力学』(第 3 版) 上 (吉岡書店, 2006) 213-215
- [3] S. L. Altmann, *Rotations, Quaternions, and Double Groups* (Dover, 2005) 162-163
- [4] 矢野 忠, 四元数と空間回転 1, 数学・物理通信 第 2 巻, 第 2 号 (2012.6) 19-29
- [5] 矢野 忠, 四元数と空間回転 2, 数学・物理通信 第 2 巻, 第 5 号 (2012.10) 20-27
- [6] 矢野 忠, 四元数と空間回転 3, 数学・物理通信 第 3 巻, 第 1 号 (2013.3) 15-24
- [7] 矢野 忠, 四元数と空間回転 4, 数学・物理通信 第 3 巻, 第 2 号 (2013.3) 19-28
『四元数の発見』(海鳴社) に収録したときに「空間回転と SU(2)」とタイトルをあらためている.
- [8] 矢野 忠, 四元数と空間回転 6, 数学・物理通信 第 3 巻, 第 8 号 (2013.12) 20-31
『四元数の発見』(海鳴社) に収録したときに「Euler 角と空間回転」とタイトルをあらためている.
- [9] 矢野 忠, ベクトル三重積の公式の記憶法, 数学・物理通信 第 9 巻, 第 3 号 (2019.6) 20-22
- [10] S. L. Altmann, *Rotations, Quaternions, and Double Groups* (Dover, 2005) 162
- [11] <https://en.wikipedia.org/wiki/Rodrigues>
- [12] 矢野 忠, 『四元数の発見』(海鳴社) 95

Levi-Civita の記号とベクトル解析

矢野 忠^{*1}

Levi-Civita Symbol and Vector Analysis

Tadashi YANO^{*2}

1 はじめに

このエッセイはすでに「数学・物理通信」1巻2号に掲載された「Levi-Civita 記号でベクトル解析の初歩を 1」の改訂版である [1]。2018 年か 2019 年にこのエッセイと同じような趣旨のテンソル解析の本 [2] を購入した。趣旨は似ているが、ベクトル解析に出てくる公式については [2] のほうがより完璧に説明している。

そういうこともあるが、力点のおき方が微妙にちがっているし、表現もすこしちがっているだろう。このエッセイではそういう点を考慮して改訂を試みた。

愛媛県数学教育協議会の機関誌「研究と実践」で数回にわたって Levi-Civita の記号の縮約とそのベクトル解析への応用について論じてきた [3]-[6]。今回は新しい着想にもとづいて再挑戦をしてみよう。

電磁気学を本格的に学ぶときにベクトル解析が必要になってくる。それで、大学の物理学科や電気電子工学科等では電磁気学の講義の最初の数時間をとってベクトル解析の初歩を学ぶ。その中にベクトル代数・解析のいろいろな公式が出てくるが、それらを Levi-Civita の記号を用いて簡単に使えるようにしたいというのがこのエッセイの目的である。

しかし、Levi-Civita の記号の縮約公式を導くのが少し難しかった。これは数学としては解決済みの問題 [3] ではあるが、教育的には 3 次元の Levi-Civita の記号の縮約公式をどのようにやさしく導入するかが重要であり、それができれば、一般の学生もベクトル解析の公式の厄介さと手を切ることができる^{*3}。

2 節にベクトル解析の公式にどんなものがあるかを述べる。3 節では Levi-Civita の記号を導入する。4 節では Levi-Civita の記号の積の行列式による表示について述べる。5 節では Levi-Civita の記号の縮約公式について述べる。6 節では Levi-Civita の記号を用いた、ベクトル解析の公式の導出を行う。7 節はまとめである。

改訂にあたって、3 つの付録をつけた。付録 1 は 2 節に述べた以外にどんなベクトル解析の公式があるかを述べ、その導出も述べる。付録 2 は 3 次元の Levi-Civita の記号の一つの発見的な導入法を述べる。付録 3 は直交座標テンソルのための最少限の知識を述べる。

2 どんな公式があるか

まずベクトル解析の面倒さの一端を示すために、ベクトル解析に出てくる公式をまず列挙しておこう。

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (2.1)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \quad (2.2)$$

$$\mathbf{C} \cdot [\mathbf{D} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})] = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) \quad (2.3)$$

^{*1} 元愛媛大学工学部

^{*2} yanotad@earth.ocn.ne.jp

^{*3} その後、ベクトル代数に限れば、Levi-Civita の記号を用いなくても、それらの公式を導くことができることを示した [8]。

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= \mathbf{C}[\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{D})] - \mathbf{D}[\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})] \\ &= \mathbf{B}[\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})] - \mathbf{A}[\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})]\end{aligned}\quad (2.4)$$

$$(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot [(\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})] = [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})]^2 \quad (2.5)$$

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad}(\text{div } \mathbf{A}) - (\Delta \mathbf{A}) \quad (2.6)$$

$$\text{div rot } \mathbf{A} = 0 \quad (2.7)$$

$$\text{rot grad } \phi = 0 \quad (2.8)$$

$$\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} \quad (2.9)$$

ベクトル解析の本を開けばもっと多くの公式があるが、もううんざりといった感がある*4。特に終わりの4つの(2.6)-(2.9)は電磁気学ではよく使う。これらを Levi-Civita の記号を用いて簡単に導く方法を学ぶことにしたい。そのために3節で Levi-Civita の記号を導入しよう。

3 Levi-Civita の記号の導入

Levi-Civita の記号 ϵ_{ijk} を導入しよう*5。まず、3次元の直交座標系 $Oxyz$ を考える。 x, y, z 軸方向の単位基底ベクトルをそれぞれ $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ と表す*6。座標系が直交しているから、それぞれの単位ベクトルのベクトル積の間には

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \quad (3.1)$$

が成り立っている。ところでこれらの式をまとめて書くためにつぎの Levi-Civita の記号 ϵ_{ijk} を導入する。

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i, j, k) \text{ が } (1, 2, 3) \text{ の偶置換のとき} \\ -1 & (i, j, k) \text{ が } (1, 2, 3) \text{ の奇置換のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases} \quad (3.2)$$

この記号を導入すると

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k = \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k \quad (3.3)$$

と表すことができる（テンソル解析では和をとる $\sum$ の記号を省略する。そのかわりに2度くり返された添字について和をとる（Einstein の規約）。以下この規約に従う）。

試みに (3.3) にしたがって計算すれば、 $i=1, j=2$ のとき

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 &= \epsilon_{121} \mathbf{e}_1 + \epsilon_{122} \mathbf{e}_2 + \epsilon_{123} \mathbf{e}_3 \\ &= \epsilon_{123} \mathbf{e}_3 \\ &= \mathbf{e}_3\end{aligned}\quad (3.4)$$

となる。同様に $i=2, j=3$ のとき $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1$ が、 $i=3, j=1$ のとき $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$ が得られる。

ここで、Levi-Civita の記号の性質を見ておこう。(3.2) の ϵ_{ijk} で添字 ijk の ij を互いに置換して jik とすれば、 $\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ijk}$ と元のものに負号がつく。これは一回の置換は元の配列に対して相対的に奇置換になっているからである。また、いま配列 ijk で ij に着目したが、これは配列 ik または jk のいずれであってもその添字の交換

*4 他にどのような公式があるか。付録1に補足して述べる。

*5 この記号の発見法的な導入は付録2に述べる。

*6 以下では直交座標系でのテンソル解析の手法を使う。それを理解するための最小限の説明を付録3に述べる。

をすれば、もとの配列のときと比べて負号がつく。すなわち、添字のどの二つの交換についても Levi-Civita の記号では反対称になっている。例えば、

$$\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ijk} \quad (3.5)$$

であり、また

$$\epsilon_{jki} = -\epsilon_{jik} = (-1)^2 \epsilon_{ijk} = \epsilon_{ijk} \quad (3.6)$$

である。このことから $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ のとき、 $\epsilon_{123} = 1$ ととれば、偶置換のとき $+1$ 、奇置換のとき -1 となる。また添字がその交換に対して反対称であることから、例えば ϵ_{11k} は添字 11 を交換すれば、 $\epsilon_{11k} = -\epsilon_{11k}$ となり、 $\epsilon_{11k} = 0$ となる*7。したがって、Levi-Civita の記号の性質として添字の交換に対して反対称であることが本質的である。

また、添字 $(1, 2, 3)$ を $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$ のようにサイクリックに動かすとき、正順といい、 $(1, 3, 2)$, $(3, 2, 1)$, $(2, 1, 3)$ のようにサイクリックに動かすとき、逆順という。このとき配列 $(1, 2, 3)$ の偶置換はすべて正順から得られ、奇置換はすべて逆順から得られる。したがって、 (i, j, k) が $(1, 2, 3)$ の正順ならば $\epsilon_{ijk} = 1$ であり、逆順ならば $\epsilon_{ijk} = -1$ である。

つぎの 4 節で Levi-Civita の記号の積の行列式による表示を学ぼう。

4 Levi-Civita の記号の積の行列式表示

この節では Levi-Civita の記号の積の行列式による表示を学ぶが、これは 5 節の Levi-Civita の記号の縮約公式を導くのに必要だからである。

その目的のために $\mathbf{e}_k$ と $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j$ とのスカラー 3 重積を考えよう。すなわち、

$$(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k = \epsilon_{ijp} \mathbf{e}_p \cdot \mathbf{e}_k \quad (4.1)$$

単位直交基底ベクトル $\mathbf{e}_p$ と $\mathbf{e}_k$ のスカラー積は

$$\mathbf{e}_p \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{pk} \quad (4.2)$$

である。ここで、 δ_{pk} は Kronecker の記号

$$\delta_{pk} = \begin{cases} 1 & p = k \\ 0 & p \neq k \end{cases} \quad (4.3)$$

である。この Kronecker の δ を用いれば、(4.1) は

$$(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k = \epsilon_{ijp} \delta_{pk} = \epsilon_{ijk} \quad (4.4)$$

と 3 次元の Levi-Civita の記号は単位直交基底ベクトルのスカラー 3 重積で表すことができる。

つぎに、2 つの Levi-Civita の記号 ϵ_{ijk} と ϵ_{pqr} の積をつくろう。

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{pqr} = [(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k][(\mathbf{e}_p \times \mathbf{e}_q) \cdot \mathbf{e}_r] \quad (4.5)$$

ところで、 $(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k$ と $(\mathbf{e}_p \times \mathbf{e}_q) \cdot \mathbf{e}_r$ はそれぞれ行列式で

$$(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k = \begin{vmatrix} (\mathbf{e}_i)_1 & (\mathbf{e}_i)_2 & (\mathbf{e}_i)_3 \\ (\mathbf{e}_j)_1 & (\mathbf{e}_j)_2 & (\mathbf{e}_j)_3 \\ (\mathbf{e}_k)_1 & (\mathbf{e}_k)_2 & (\mathbf{e}_k)_3 \end{vmatrix} \quad (4.6)$$

*7 ϵ_{11k} は 2 つの 1 を交換しても、交換したかどうかかわからないから、交換したとは考えないとすれば、この条件はでてこない。しかし、ここではあえて交換したとすればよい。

$$(\mathbf{e}_p \times \mathbf{e}_q) \cdot \mathbf{e}_r = \begin{vmatrix} (\mathbf{e}_p)_1 & (\mathbf{e}_p)_2 & (\mathbf{e}_p)_3 \\ (\mathbf{e}_q)_1 & (\mathbf{e}_q)_2 & (\mathbf{e}_q)_3 \\ (\mathbf{e}_r)_1 & (\mathbf{e}_r)_2 & (\mathbf{e}_r)_3 \end{vmatrix} \quad (4.7)$$

と表せるから^{*8}, (4.5) は

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} (\mathbf{e}_i)_1 & (\mathbf{e}_i)_2 & (\mathbf{e}_i)_3 \\ (\mathbf{e}_j)_1 & (\mathbf{e}_j)_2 & (\mathbf{e}_j)_3 \\ (\mathbf{e}_k)_1 & (\mathbf{e}_k)_2 & (\mathbf{e}_k)_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (\mathbf{e}_p)_1 & (\mathbf{e}_p)_2 & (\mathbf{e}_p)_3 \\ (\mathbf{e}_q)_1 & (\mathbf{e}_q)_2 & (\mathbf{e}_q)_3 \\ (\mathbf{e}_r)_1 & (\mathbf{e}_r)_2 & (\mathbf{e}_r)_3 \end{vmatrix} \quad (4.8)$$

となる。行列式はその行と列を入れ替えても値は変わらないから、2 番目の行列の行と列を入れ替えて、2 つの行列式の積を計算するとつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr} &= \begin{vmatrix} (\mathbf{e}_i)_1 & (\mathbf{e}_i)_2 & (\mathbf{e}_i)_3 \\ (\mathbf{e}_j)_1 & (\mathbf{e}_j)_2 & (\mathbf{e}_j)_3 \\ (\mathbf{e}_k)_1 & (\mathbf{e}_k)_2 & (\mathbf{e}_k)_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (\mathbf{e}_p)_1 & (\mathbf{e}_q)_1 & (\mathbf{e}_r)_1 \\ (\mathbf{e}_p)_2 & (\mathbf{e}_q)_2 & (\mathbf{e}_r)_2 \\ (\mathbf{e}_p)_3 & (\mathbf{e}_q)_3 & (\mathbf{e}_r)_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_p & \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_q & \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_p & \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_q & \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_p & \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_q & \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_r \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (4.9)$$

これで $\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr}$ を Kronecker の記号を用いて行列式で表すことができた。

5 Levi-Civita の記号の縮約公式

(4.9) から Levi-Civita の記号の積の縮約公式を導こう。まず (4.9) 式で $k = r$ とおいて縮約をすれば、

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk}\epsilon_{pqk} &= \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ik} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jk} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kk} \end{vmatrix} \\ &= \left[\delta_{ik} \begin{vmatrix} \delta_{jp} & \delta_{jq} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} \end{vmatrix} - \delta_{jk} \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} \end{vmatrix} + \delta_{kk} \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} \end{vmatrix} \right] \\ &= \begin{vmatrix} \delta_{jp} & \delta_{jq} \\ \delta_{ip} & \delta_{iq} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} \end{vmatrix} \\ &= \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp} \end{aligned} \quad (5.1)$$

が得られる。(5.1) の右辺の 3 行目で $\delta_{kk} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$ であることを用いた。

さらに (5.1) で $j = q$ とおいて縮約をすれば、

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk}\epsilon_{pj k} &= \delta_{ip}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{jp} \\ &= 3\delta_{ip} - \delta_{ip} \\ &= 2\delta_{ip} \end{aligned} \quad (5.2)$$

が、また (5.2) でさらに $i = p$ とおいて縮約すれば

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 2\delta_{ii} = 6 \quad (5.3)$$

^{*8} この (4.6),(4.7) の式は後の (6.5) から得られる。

が得られる.

ここで縮約公式をまとめておこう.

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp} \quad (5.1)$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{pjk} = 2\delta_{ip} \quad (5.2)$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6 \quad (5.3)$$

ベクトル解析で特に有用なのは (5.1) である.

6 ベクトル解析の公式の導出

ベクトル解析の公式 (2.1)-(2.9) を導く前に準備をしておこう. ベクトル $\mathbf{B}$ とベクトル $\mathbf{C}$ のベクトル積 $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ は Levi-Civita の記号を用いれば

$$(\mathbf{B} \times \mathbf{C})_i = \epsilon_{ijk} B_j C_k \quad (6.1)$$

と表すことができ, また $\nabla \times \mathbf{A}$ は同様に

$$(\nabla \times \mathbf{A})_i = \epsilon_{ijk} \nabla_j A_k \quad (6.2)$$

と表すことができる*9.

では具体的に $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ の成分を考えてみよう. $(\mathbf{B} \times \mathbf{C})_i = \epsilon_{ijk} B_j C_k$ で例えば $i = 1$ とすれば

$$\begin{aligned} (\mathbf{B} \times \mathbf{C})_1 &= \epsilon_{1jk} B_j C_k \\ &= \epsilon_{11k} B_1 C_k + \epsilon_{12k} B_2 C_k + \epsilon_{13k} B_3 C_k \\ &= \epsilon_{121} B_2 C_1 + \epsilon_{122} B_2 C_2 + \epsilon_{123} B_2 C_3 + \epsilon_{131} B_3 C_1 + \epsilon_{132} B_3 C_2 + \epsilon_{133} B_3 C_3 \\ &= \epsilon_{123} B_2 C_3 + \epsilon_{132} B_3 C_2 \\ &= B_2 C_3 - B_3 C_2 \end{aligned} \quad (6.3)$$

ここで, あからさまに $\epsilon_{11k} B_1 C_k$ の k についての和をとっていないのは Levi-Civita の記号の定義から $\epsilon_{11k} = 0$ だからである.

第 2, 第 3 成分についてもまったく同様である. 読者は第 2 成分と第 3 成分について紙の上に自分の手で書き下して確かめて見られるとよい.

つぎにベクトルのスカラー 3 重積 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ について考えてみよう. $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ は $\mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{D}$ とおけば,

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} = A_i D_i = A_i (\epsilon_{ijk} B_j C_k) = \epsilon_{ijk} A_i B_j C_k \quad (6.4)$$

この最後の式は 3 次の行列式の定義式であるから

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \quad (6.5)$$

とも表せる. この (6.5) を用いて実は (4.6) と (4.7) が導かれたのである.

さて, これからベクトル解析の公式 (2.1)-(2.9) の導出について述べよう.

*9 旧稿では以下に Levi-Civita の記号 ϵ_{ijk} を考案した理由を推測した 8 行ほどの文章がつづいていた. その推論は付録 2 の 9.2 節で述べる.

まずベクトルのベクトル 3 重積 (2.1) についてはスカラー 3 重積の場合と同様に $B \times C = D$ とおけば, $A \times (B \times C) = A \times D$ であるから,

$$\begin{aligned}
[A \times (B \times C)]_i &= [A \times D]_i \\
&= \epsilon_{ijk} A_j D_k \\
&= \epsilon_{ijk} A_j (\epsilon_{klm} B_l C_m) \\
&= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} A_j B_l C_m \\
&= \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} A_j B_l C_m \\
&= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) A_j B_l C_m \\
&= B_i (A \cdot C) - C_i (A \cdot B)
\end{aligned} \tag{6.6}$$

したがって,

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B) \tag{2.1}$$

が成り立つ. この公式は英語を話す国々では back-cab ルール ((2.1) の記憶法) として知られている. ただこの記憶法は $(A \times B) \times C$ にはそのままでは使えない. それで $A \times (B \times C)$ にも $(A \times B) \times C$ にも使える別の記憶法として中央項ルールというのがある [7].

つぎに公式 (2.2) を導こう. まず $A \times B = E$, $C \times D = F$ とおけば, $(A \times B) \cdot (C \times D) = E \cdot F$ であるから

$$\begin{aligned}
(A \times B) \cdot (C \times D) &= E \cdot F \\
&= E_i F_i \\
&= (\epsilon_{ijk} A_j B_k)(\epsilon_{imn} C_m D_n) \\
&= \epsilon_{ijk} \epsilon_{imn} A_j B_k C_m D_n \\
&= (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}) A_j B_k C_m D_n \\
&= (A \cdot C)(B \cdot D) - (A \cdot D)(B \cdot C)
\end{aligned} \tag{6.7}$$

したがって,

$$\begin{aligned}
(A \times B) \cdot (C \times D) &= (A \cdot C)(B \cdot D) - (A \cdot D)(B \cdot C) \\
&= \begin{vmatrix} A \cdot C & A \cdot D \\ B \cdot C & B \cdot D \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

ついでに, これに関係した

$$C \cdot [D \times (A \times B)] = (A \times B) \cdot (C \times D) \tag{2.3}$$

が成り立つことを見ておこう. これは $A \times B = E$ とおけば, スカラー 3 重積の中で文字をサイクリックに変えても値は変わらないというスカラー 3 重積の性質から, (2.3) は

$$\begin{aligned}
C \cdot [D \times (A \times B)] &= C \cdot (D \times E) \\
&= E \cdot (C \times D) \\
&= (A \times B) \cdot (C \times D)
\end{aligned} \tag{6.8}$$

であることがわかるが, または

$$\begin{aligned}
C \cdot [D \times (A \times B)] &= C \cdot [D \times E] \\
&= C_i \epsilon_{ijk} D_j E_k \\
&= C_i \epsilon_{ijk} D_j (\epsilon_{klm} A_l B_m) \\
&= (\epsilon_{klm} A_l B_m)(\epsilon_{kij} C_i D_j) \\
&= (A \times B) \cdot (C \times D)
\end{aligned} \tag{6.9}$$

としてもよい. ここで 3 行目から 4 行目に移るときに, $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij}$ であることを用いた.

もっとも (2.3) が成り立つことから逆に (2.2) が成立することは Levi-Civita の記号を用いなくとも簡単にわかる。それは

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= \mathbf{C} \cdot [\mathbf{D} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})] \\
&= \mathbf{C} \cdot [\mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})] \\
&= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})
\end{aligned} \tag{6.10}$$

が得られるから、(2.2) が導かれる。ここで、(6.10) の 1 行目から 2 行目へには中央項ルールを用いた。

つぎに公式 (2.4) を導ぼう。 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{E}, \mathbf{C} \times \mathbf{D} = \mathbf{F}$ とおけば、 $[(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D})] = \mathbf{E} \times \mathbf{F}$ であるから、

$$\begin{aligned}
[(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D})]_i &= [\mathbf{E} \times \mathbf{F}]_i \\
&= \epsilon_{ijk} E_j F_k \\
&= \epsilon_{ijk} (\epsilon_{jlm} A_l B_m) (\epsilon_{kpq} C_p D_q) \\
&= -\epsilon_{jik} \epsilon_{jlm} A_l B_m (\epsilon_{kpq} C_p D_q) \\
&= -(\delta_{il} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{kl}) A_l B_m (\epsilon_{kpq} C_p D_q) \\
&= -(A_i B_k - B_i A_k) \epsilon_{kpq} C_p D_q \\
&= B_i \epsilon_{kpq} A_k C_p D_q - A_i \epsilon_{kpq} B_k C_p D_q \\
&= B_i [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})] - A_i [\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})]
\end{aligned} \tag{6.11}$$

または

$$\begin{aligned}
[(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D})]_i &= \epsilon_{ijk} (\epsilon_{jlm} A_l B_m) (\epsilon_{kpq} C_p D_q) \\
&= \epsilon_{kij} \epsilon_{kpq} (\epsilon_{jlm} A_l B_m) C_p D_q \\
&= (\delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}) (\epsilon_{jlm} A_l B_m) C_p D_q \\
&= (C_i D_j - D_i C_j) \epsilon_{jlm} A_l B_m \\
&= C_i (\epsilon_{lmj} A_l B_m D_j) - D_i (\epsilon_{lmj} A_l B_m C_j) \\
&= C_i [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{D})] - D_i [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})]
\end{aligned} \tag{6.12}$$

となる。したがって、(6.11) と (6.12) から

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= \mathbf{C}[\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{D})] - \mathbf{D}[\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})] \\
&= \mathbf{B}[\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})] - \mathbf{A}[\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})]
\end{aligned} \tag{2.4}$$

が成立する。

この公式に関してはベクトル解析によってもそれほどその導出は難しくはない。それは $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{E}$ においてベクトル 3 重積の公式を用いるか、 $\mathbf{C} \times \mathbf{D} = \mathbf{F}$ においてベクトル 3 重積の公式を用いれば、すぐに公式 (2.4) が導出されるからである^{*10}。

公式 (2.5) を導こう。 $\mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{E}, \mathbf{C} \times \mathbf{A} = \mathbf{F}, \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{G}$ とおけば、(2.5) の左辺は $(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot [(\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})] = \mathbf{E} \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G})$ と表せるから、

$$\begin{aligned}
(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot [(\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})] &= \mathbf{E} \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) \\
&= E_i (\epsilon_{ijk} F_j G_k) \\
&= (\epsilon_{ilm} B_l C_m) \epsilon_{ijk} (\epsilon_{jpp} C_p A_q) (\epsilon_{krs} A_r B_s) \\
&= \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} B_l C_m (\epsilon_{jpp} C_p A_q) (\epsilon_{krs} A_r B_s) \\
&= (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) B_l C_m (\epsilon_{jpp} C_p A_q) (\epsilon_{krs} A_r B_s) \\
&= (B_j C_k - B_k C_j) \epsilon_{jpp} C_p A_q \epsilon_{krs} A_r B_s \\
&= (\epsilon_{jpp} B_j C_p A_q) (\epsilon_{krs} C_k A_r B_s) \\
&= [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})]^2
\end{aligned} \tag{6.13}$$

^{*10} ここでは、またベクトル 3 重積に [7] の中央項ルールを併用すればわかりやすい。

と導出される。ここで、右辺の 6 行目の第 2 項で $\epsilon_{j p q} C_j C_p A_q = 0$ であることを用いている。
したがって、

$$(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot [(\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})] = [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})]^2 \quad (2.5)$$

が成立する。面倒なのはここまでで、(2.6)-(2.9) は比較的簡単である。

まず公式 (2.6) は $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{H}$ とおけば、 $(\nabla \times \mathbf{A})_k = H_k = \epsilon_{klm} \nabla_l A_m$ と表されるから、

$$\begin{aligned} [\text{rot rot } \mathbf{A}]_i &= [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})]_i \\ &= [\nabla \times \mathbf{H}]_i \\ &= \epsilon_{ijk} \nabla_j H_k \\ &= \epsilon_{ijk} \nabla_j (\epsilon_{klm} \nabla_l A_m) \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \nabla_j \nabla_l A_m \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} \nabla_j \nabla_l A_m \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \nabla_j \nabla_l A_m \\ &= \nabla_i (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 A_i \\ &= [\text{grad}(\text{div } \mathbf{A})]_i - (\Delta \mathbf{A})_i \end{aligned} \quad (6.14)$$

ここで、 ϵ_{klm} は微分演算子 ∇_j に対して定数である^{*11}。したがって、

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad}(\text{div } \mathbf{A}) - (\Delta \mathbf{A}) \quad (2.6)$$

が成り立つ。

つぎの公式 (2.7) は $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{H}$ とおけば、 $H_i = \epsilon_{ijk} \nabla_j A_k$ であるから、

$$\begin{aligned} \text{div rot } \mathbf{A} &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \\ &= \nabla \cdot \mathbf{H} \\ &= \nabla_i H_i \\ &= \nabla_i (\epsilon_{ijk} \nabla_j A_k) \\ &= \epsilon_{ijk} \nabla_i \nabla_j A_k \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.15)$$

で導かれる。ここでは ϵ_{ijk} は添字 ij について反対称であるが³、 $\nabla_i \nabla_j$ は添字 ij について対称であることを用いた。したがって、

$$\text{div rot } \mathbf{A} = 0 \quad (2.7)$$

が成り立つ。

公式 (2.8) は $\nabla \phi = \mathbf{G}$ とおけば、 $\nabla \times (\nabla \phi) = \nabla \times \mathbf{G}$ と表せ、また $\nabla_k \phi = G_k$ であるから、

$$\begin{aligned} [\text{rot grad } \phi]_i &= [\nabla \times (\nabla \phi)]_i \\ &= [\nabla \times \mathbf{G}]_i \\ &= \epsilon_{ijk} \nabla_j G_k \\ &= \epsilon_{ijk} \nabla_j (\nabla_k \phi) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.16)$$

で導かれる。ここでも ϵ_{ijk} の添字 jk について反対称であることと $\nabla_j \nabla_k$ が添字 jk について対称であることを用いた。したがって、

$$\text{rot grad } \phi = 0 \quad (2.8)$$

^{*11} 以下は Levi-Civita の記号 ϵ_{ijk} は微分演算子に対して定数であることをくりかえして用いる。そのことを特にことわらないから注意してほしい。

が成り立つ。また公式 (2.9) は $\mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{G}$ とおけば, $G_i = \epsilon_{ijk} E_j H_k$ であるから,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) &= \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \\
&= \nabla \cdot \mathbf{G} \\
&= \nabla_i G_i \\
&= \nabla_i (\epsilon_{ijk} E_j H_k) \\
&= \epsilon_{ijk} (\nabla_i E_j) H_k + \epsilon_{ijk} E_j (\nabla_i H_k) \\
&= H_k \epsilon_{kij} (\nabla_i E_j) - E_j \epsilon_{jik} (\nabla_i H_k) \\
&= \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \\
&= \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}
\end{aligned} \tag{6.17}$$

で導かれる。したがって,

$$\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} \tag{2.9}$$

が成り立つ。

ここでとりあげなかった他の Levi-Civita 記号を用いたベクトル解析の公式の導出については付録 1 を参照されたい。

7 おわりに

ベクトル解析の公式を Levi-Civita の記号が使われているものを主として見てきた。Levi-Civita の記号の縮約公式 (5.1) は本当に有用である。しかし、どうやって縮約公式 (5.1) を導くかが大学教育で教えるための大きな障害になっていたが、それも今回の試みで解決できたと思う。このアイディアをご教示くださった川崎守（元岐阜大学）さんに感謝をしたい。

Levi-Civita の記号のご利益を強調してきたが、しかし、その後それによらなくともベクトル代数の公式に限れば、そんなに難しくはないという認識を得ている。それについてはすでに別のところで述べた [8]。また、6 節で述べなかったベクトル解析の公式が少しだけ残っている。それは付録 1 に述べる。

8 付録 1 その他のベクトル解析の公式

このエッセイの 6 節に載っていない、ベクトル解析の公式で [2] には載っているものをここに挙げておこう。証明も簡単につけたが、その証明は部分的には [2] と同じではない。また記号も [2] では ∂ で示された記号に代えて ∇ を用いた。これは元のベクトル解析の公式を思い出しやすいようにとの配慮からである。

ここでは、Levi-Civita 記号を用いて表せる公式だけを挙げよう。Levi-Civita 記号を用いない公式はテンソル形式で表せば、いずれもほぼ自明である。

第 1 の公式は

$$\nabla \times \mathbf{r} = 0 \tag{8.1}$$

である。その証明は

$$\epsilon_{ijk} \nabla_j x_k = \epsilon_{ijk} \delta_{jk} = 0$$

第 2 の公式は

$$\nabla \times (f \mathbf{A}) = f \nabla \times \mathbf{A} + \nabla f \times \mathbf{A} \tag{8.2}$$

である。その証明は

$$\epsilon_{ijk} \nabla_j (f A_k) = f \epsilon_{ijk} \nabla_j A_k + \epsilon_{ijk} (\nabla_j f) A_k$$

第3の公式は

$$\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = (\nabla \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (8.3)$$

である。その証明は

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} A_j (\epsilon_{klm} \nabla_l B_m) &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} A_j \nabla_l B_m \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) A_j \nabla_l B_m \\ &= A_j \nabla_i B_j - A_j \nabla_j B_i \\ &= (\nabla_i B_j) A_j - A_j (\nabla_j B_i) \end{aligned}$$

第4の公式は

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} \quad (8.4)$$

である。[2]に示された、その証明は右辺から左辺を導くテンソルを使った証明である。しかし、これは見るからに複雑であり、あまり推奨できない。その代わりに私の思いついた証明を述べよう。

この公式(8.4)は実は第3の公式(8.3)の応用である。第3の公式(8.3)の右辺の第2項を式を左辺へ移項した式は

$$\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} = (\nabla \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} \quad (8.5)$$

である。(8.5)で $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ とを入れ替えた式を考える。すなわち

$$\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} = (\nabla \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} \quad (8.6)$$

(8.5)と(8.6)とを辺々加えれば、それが第4の公式(8.4)の右辺である。

$$\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} = (\nabla \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} + (\nabla \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} \quad (8.7)$$

となる。これが証明したい第4の式(8.4)の右辺である。ここまで式が簡単化されると、後の証明すべき式は

$$(\nabla \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} + (\nabla \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (8.8)$$

だけが残っている。これは自明であるとも言えるが、念のためにテンソル形式の証明を与えれば、

$$A_j \nabla_i B_j + B_j \nabla_i A_j = \nabla_i (A_j B_j)$$

であるから、最後の式(8.8)が証明される。したがって、(8.4)が証明された。

第5の公式は

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{A} - (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (8.9)$$

である。この公式を見かけたことがいままでもなかった。ベクトル解析の書でも詳しい本でないと出ていない。

その証明は

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \epsilon_{ijk} \nabla_j (\epsilon_{klm} A_l B_m) \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \nabla_j (A_l B_m) \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} \nabla_j (A_l B_m) \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) (B_m \nabla_j A_l + A_l \nabla_j B_m) \\ &= B_j (\nabla_j A_i) + (\nabla_j B_j) A_i - (\nabla_j A_j) B_i - A_j (\nabla_j B_i) \\ &= (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{A} - (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} \end{aligned}$$

である。これで(8.9)が証明された。

9 付録 2 3 次の Levi-Civita の記号の発見法的導出

9.1 はじめに

2 つのベクトルのベクトル積は 2 つの実部のない四元数の積の虚部に由来しており, また 2 つのベクトルのスカラー積は 2 つの実部のない四元数の積の実部にマイナスの符号をつけたものに由来している.

すなわち, 実部のない 2 つの四元数を $A = A_1i + A_2j + A_3k$, $B = B_1i + B_2j + B_3k$ とすれば,

$$\begin{aligned}(A_1i + A_2j + A_3k)(B_1i + B_2j + B_3k) &= -(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3) + (C_1i + C_2j + C_3k), \\ C_1 &:= A_2B_3 - A_3B_2, \\ C_2 &:= A_3B_1 - A_1B_3, \\ C_3 &:= A_1B_2 - A_2B_1\end{aligned}\tag{9.1}$$

ここで, i, j, k の間には, つぎの積の関係が要請されていた.

$$\begin{aligned}i^2 = j^2 = k^2 &= -1, \\ ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j\end{aligned}$$

Hamilton の実部のない四元数の積から Gibbs はつぎのようなベクトルのスカラー積とベクトル積を定義した.

ベクトルのスカラー積は二つのベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ とを成分で

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3,\tag{9.2}$$

$$\mathbf{B} = B_1\mathbf{e}_1 + B_2\mathbf{e}_2 + B_3\mathbf{e}_3\tag{9.3}$$

と表せば, スカラー積は

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3\tag{9.4}$$

で定義され, またベクトル積は

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_2B_3 - A_3B_2)\mathbf{e}_1 + (A_3B_1 - A_1B_3)\mathbf{e}_2 + (A_1B_2 - A_2B_1)\mathbf{e}_3\tag{9.5}$$

と定義された.

テーマとしてここで取り上げられる Levi-Civita の記号はこのベクトル積の定義 (9.5) と関係している.

3 次の Levi-Civita 記号 ϵ_{ijk} が歴史的にどのようにして導入されたのかは知らない. 9.2 節で述べるのは Levi-Civita がこのように考えたのではないかという推測である.

9.2 Levi-Civita 記号の導入の理由

この 9.2 節では, Levi-Civita の記号の導入の理由を推測してみよう.

普通のベクトル $\mathbf{C}$ を成分で表すと

$$\mathbf{C} = C_1\mathbf{e}_1 + C_2\mathbf{e}_2 + C_3\mathbf{e}_3\tag{9.6}$$

となり, 基底ベクトル $\mathbf{e}_1$ の前の係数には必ず C_1 と第 1 成分を表す添字の数 1 が現れる. 基底ベクトル $\mathbf{e}_2$ と $\mathbf{e}_3$ の前の係数にも C_2 と C_3 と同様にベクトルの第 2 成分, 第 3 成分を表す添字の数 2, 3 が係数にも表れている.

ところがベクトルのベクトル積の成分ではどうであろうか.

それは 9.1 節の (9.5) を見れば, この式からわかるようにベクトル積の $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ の第 1 成分は

$$A_2B_3 - A_3B_2\tag{9.7}$$

であり、第 1 成分を表す 1 という数字はどこにもでて来ない。

同様に第 2 成分は

$$A_3B_1 - A_1B_3 \quad (9.8)$$

であり、第 2 成分を表す 2 という数字はどこにもでて来ない。

第 3 成分

$$A_1B_2 - A_2B_1 \quad (9.9)$$

でも第 3 成分を表す 3 という数字は同様にでて来ない。

一般的にいうとこのベクトル積の定義では $(\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ の第 i 成分 $(\mathbf{B} \times \mathbf{C})_i$ には i が含まれていない。これにはまったく満足できない。それで第 i 成分はそれが第 i 成分であることがわかるように $(\mathbf{B} \times \mathbf{C})_i$ を添字 i から始まるように書き表したい。そのためにどんな記号を導入したらよいか。Levi-Civita はそう考えたに違いない。それが ϵ_{ijk} を考案した理由であろう^{*12}。

9.3 Levi-Civita の記号

まず $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ の第 1 成分 $A_2B_3 - A_3B_2$ について考えてみよう。

$$A_2B_3 - A_3B_2 = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{1jk} A_j B_k \quad (9.10)$$

と ϵ_{ijk} という記号を導入する。ここで、 i, j, k は 1, 2, 3 の値をとる。これは Levi-Civita の記号とか Eddington のイプシロンと呼ばれている。この記号がどういうものかは以下順次みていく。

(9.10) の右辺に現れる、 ϵ_{1jk} は ϵ_{ijk} の $i = 1$ をとったものである。 j, k についてはそれぞれ $j = 1, 2, 3$ および $k = 1, 2, 3$ を重複を許して和をとる。

要するに、 ϵ_{1jk} は 3 次の Levi-Civita の記号 ϵ_{ijk} で $i = 1$ ととったものだが、(9.10) の右辺はこのベクトル積 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ の第 1 成分であることを表している。

では以下に (9.10) の右辺を具体的に書き下してみよう。

$$\begin{aligned} A_2B_3 - A_3B_2 &= \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{1jk} A_j B_k \\ &= \epsilon_{111}A_1B_1 + \epsilon_{112}A_1B_2 + \epsilon_{113}A_1B_3 \\ &\quad + \epsilon_{121}A_2B_1 + \epsilon_{122}A_2B_2 + \epsilon_{123}A_2B_3 \\ &\quad + \epsilon_{131}A_3B_1 + \epsilon_{132}A_3B_2 + \epsilon_{133}A_3B_3 \end{aligned} \quad (9.11)$$

しかし、左辺には 2 つの項 A_2B_3 と A_3B_2 しかない。それで、 ϵ_{ijk} の値の一部が (9.11) から決まる。

ϵ_{1jk} の値は

$$\begin{aligned} \epsilon_{123} &= 1, \epsilon_{132} = -1 \\ \epsilon_{111} &= \epsilon_{112} = \epsilon_{113} = \epsilon_{121} = \epsilon_{122} = \epsilon_{131} = \epsilon_{133} = 0 \end{aligned} \quad (9.12)$$

と決まる。

つづいて、 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ の第 2 成分 $A_3B_1 - A_1B_3$ について考えてみれば、

$$A_3B_1 - A_1B_3 = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{2jk} A_j B_k \quad (9.13)$$

^{*12} こういう推測をどの文献でも読んだことはない。だから、これが歴史的に正しい推測であるとは保証できない。記号の文字として ϵ を用いたのは Eddington であるのだろう。メーラーの『相対性理論』 [9] では 4 次元の Levi-Civita の記号に δ が使われている。

である。これも (9.11) と同じように右辺の (9.13) の j, k の和について表せば,

$$\begin{aligned}
A_3B_1 - A_1B_3 &= \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{2jk} A_j B_k \\
&= \epsilon_{211} A_1 B_1 + \epsilon_{212} A_1 B_2 + \epsilon_{213} A_1 B_3 \\
&\quad + \epsilon_{221} A_2 B_1 + \epsilon_{222} A_2 B_2 + \epsilon_{223} A_2 B_3 \\
&\quad + \epsilon_{231} A_3 B_1 + \epsilon_{232} A_3 B_2 + \epsilon_{233} A_3 B_3
\end{aligned} \tag{9.14}$$

となる。

これから ϵ_{2jk} の値は

$$\begin{aligned}
&\epsilon_{231} = 1, \epsilon_{213} = -1 \\
&\epsilon_{211} = \epsilon_{212} = \epsilon_{221} = \epsilon_{222} = \epsilon_{223} = \epsilon_{232} = \epsilon_{233} = 0
\end{aligned} \tag{9.15}$$

と決まる。

最後に、 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ の第3成分 $A_1B_2 - A_2B_1$ について考えてみれば,

$$A_1B_2 - A_2B_1 = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{3jk} A_j B_k \tag{9.16}$$

である。これも (9.11) と同じように (9.16) の右辺の j, k の和を具体的に表せば,

$$\begin{aligned}
A_1B_2 - A_2B_1 &= \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{3jk} A_j B_k \\
&= \epsilon_{311} A_1 B_1 + \epsilon_{312} A_1 B_2 + \epsilon_{313} A_1 B_3 \\
&\quad + \epsilon_{321} A_2 B_1 + \epsilon_{322} A_2 B_2 + \epsilon_{323} A_2 B_3 \\
&\quad + \epsilon_{331} A_3 B_1 + \epsilon_{332} A_3 B_2 + \epsilon_{333} A_3 B_3
\end{aligned} \tag{9.17}$$

となる。

これから ϵ_{3jk} の値は

$$\begin{aligned}
&\epsilon_{312} = 1, \epsilon_{321} = -1 \\
&\epsilon_{311} = \epsilon_{313} = \epsilon_{322} = \epsilon_{323} = \epsilon_{331} = \epsilon_{332} = \epsilon_{333} = 0
\end{aligned} \tag{9.18}$$

と決まる。

上で決められた ϵ_{ijk} , ($i, j, k = 1, 2, 3$) の求めた値をまとめれば,

$$\begin{aligned}
&\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1, \\
&\epsilon_{132} = \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1, \\
&\epsilon_{111} = \epsilon_{112} = \epsilon_{113} = \epsilon_{121} = \epsilon_{122} = \epsilon_{131} = \epsilon_{133} = 0, \quad (i = 1 \text{ のとき}), \\
&\epsilon_{211} = \epsilon_{212} = \epsilon_{221} = \epsilon_{222} = \epsilon_{223} = \epsilon_{232} = \epsilon_{233} = 0, \quad (i = 2 \text{ のとき}), \\
&\epsilon_{311} = \epsilon_{313} = \epsilon_{322} = \epsilon_{323} = \epsilon_{331} = \epsilon_{332} = \epsilon_{333} = 0, \quad (i = 3 \text{ のとき})
\end{aligned} \tag{9.19}$$

まとめて3次の Levi-Civita の記号の値が全て求められた。

すなわち、これらをまとめて (3.2) の3次の Levi-Civita の記号 ϵ_{ijk} が定義されたのであろう。

10 付録3 直交座標系テンソルための最小限の知識

テンソル解析では座標 x, y, z を添字をつけて x_1, x_2, x_3 と表す。ベクトル $\mathbf{A}$ を斜交座標系ならば,

$$\mathbf{A} = A^1 \mathbf{e}_1 + A^2 \mathbf{e}_2 + A^3 \mathbf{e}_3 \tag{10.1}$$

とベクトルの成分は A^i のように添字を上につけて表し、これをベクトルの反変成分と呼び、逆に

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}^1 + A_2 \mathbf{e}^2 + A_3 \mathbf{e}^3 \quad (10.2)$$

のように同じベクトル $\mathbf{A}$ を A_i のように添字を下につけて表し、これをベクトルの共変成分と呼ぶ。

しかし、直交座標系では基底ベクトル $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}^i$ が成立しているので、ベクトルの成分も A^i と A_i との区別をつけないで、 A_i で表す。

しかし、一般相対性理論では反変テンソルと共変テンソルとを区別する必要がある。または結晶学での直接格子ベクトルと逆格子ベクトルなどのように一般相対性理論でなくともこの二つの区別が絶対に必要な場合がある。一般に結晶格子においては直交した結晶格子ばかりではなく、斜交した結晶格子も存在するからである。

添字を使って表すのがテンソル解析では普通であるので、 x, y, z 軸方向の基底ベクトル $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ と表記しないで $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ という風に数字の添字で表す。同様に成分もたとえば位置ベクトル $\mathbf{r}$ の場合にも x, y, z ではなく、 x_1, x_2, x_3 のように添字をつけて表す。詳しいことを知りたい方はいずれかのテンソル解析の書、たとえば、[10], [11] を参照してください。

(2006.7.18) (2010.4.3 改訂)(2020.1.10 三訂)

参考文献

- [1] 矢野 忠, Levi-Civita の記号でベクトル解析の初歩を 1, 数学・物理通信, 1 巻 2 号 (2010.3) 12-20
(これは 2006 年 7 月 18 日づけで書かれ、「研究と実践」(愛数協)に投稿されたが、掲載されなかった。その後、Joh 著「ベクトル解析」の一項目「テンソル記号を使ってベクトルの公式を導く」(URL: [http://hooktail.sub.jp/vectoranalysis/Vector Formulae By Tensor/](http://hooktail.sub.jp/vectoranalysis/Vector%20Formulae%20By%20Tensor/)) の付録としてインターネット上で公表されている。「数学・物理通信」の掲載にあたって原稿は改訂された)。
- [2] Taha Sochi, *Principles of Tensor Calculus*, ISBN 9781974401390
(この書には発行所も発行年も記載されていない。Preface に August, 2017 と書かれている。巻末の文献に同じ著者の別の著書が引用されており、それによると CreateSpace と出版社が書かれているので、これがこの本の出版元かもしれない)。
- [3] 矢野 忠, テンソル解析の学習における問題点, 研究と実践 (愛数協), 第 18 号 (1985.3) 7-17,
矢野 忠, テンソル解析の学習における問題点, 研究と実践 (愛数協), 第 65 号 (1998.3) 2-17.
(第 65 号のエッセイは第 18 号のエッセイの改訂版である)。
- [4] 矢野 忠, 「Levi-Civita の記号の縮約」再論, 研究と実践 (愛数協), 第 64 号 (1997.3) 2-10.
- [5] 矢野 忠, 「Levi-Civita の記号の縮約」再々論, 研究と実践 (愛数協), 第 77 号 (2001.12) 16-20.
- [6] 矢野 忠, 『数学散歩』(国土社, 2005) に [3] - [5] を改訂し、収録してある。
- [7] 矢野 忠, ベクトル三重積の記憶法, 数学・物理通信, 9 巻 3 号 (2019.6.20) 21-22
- [8] 矢野 忠, ベクトル代数再考, 研究と実践 (愛数協), 第 96 号 (2007.12) 23-29.
矢野 忠, ベクトル代数再考, 数学・物理通信, 4 巻 1 号 (2014.3.31) 9-16.
(初出は「研究と実践」(2007)であるが、「数学・物理通信」(2014)に改訂して掲載された)。
- [9] C. メーラー (永田恒夫, 伊藤大介訳), 『相対性理論』(みすず書房, 1960) 110-111
- [10] 田代嘉宏, 『テンソル解析』(裳華房, 1981)
- [11] 石原 繁, 『テンソル』(裳華房, 1991)

編集後記

2020 年を迎えました。明けましておめでとうございます。

皆様にはご健勝のことと存じます。今年は東京でオリンピックが開かれますが、1964 年の東京オリンピックを覚えている人もまだたくさんおられるでしょう。

「数学・物理通信」9 巻 9 号を発行します。

今号はいつもの世戸さんの論文に、編集者のエッセイ、それぞれ 2 編となった。どうも著者が偏る傾向にあるが、これがいつものことではないように、編集者としては心がけたいと思っている。

いままで論文とかエッセイをご寄稿いただいていない方にも広く投稿を呼びかけていきたい。たとえば、編集者の友人でパソコンとかで AI を楽しんでおられる物理学者もおられる。

そういう人にもその経験を年賀状での紹介だけでなく、このサーキュラーに載せることは多くの人にとって興味深いのではないかと思う。「数学・物理通信」と称しながら、「数学通信」の色彩が強すぎるのはいかなものかという 2020 年の年頭にあたっての反省である。

1 月中に 9 巻 10 号の発行も予定している。9 巻 9, 10 号の発行が年を越したのは昨年 12 月に私のパソコンが 10 日ほど故障してしまったためである。

(矢野 忠)